Mathematischer Korrespondenz-zirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Beispiellösungen zu Blatt 32

Aufgabe 1

Der kleine Tobias kann kaum bis Weihnachten warten. Er will unbedingt wissen, was er geschenkt bekommt – bisher weiß er nur, dass es Bücher, CDs und Stofftiere sind (wobei die Pluralform hier keine Bedeutung hat, es ist aber je mindestens ein Geschenk). Da erscheinen ihm zwei Wesen. Sie sagen ihm Folgendes:

A: Du bekommst genau 2 CDs.

B: Du bekommst genau 9 Geschenke.

A: Du bekommst genau zwei Bücher mehr als Stofftiere.

B: Du bekommst mehr CDs als Stofftiere.

A: Du bekommst mindestens so viele CDs wie Bücher.

Armer Tobias – jetzt ist er noch verwirrter! Hätte ihm jemand gesagt, dass eines der Wesen ein Weihnachtsengel war (der immer die Wahrheit sagt) und das andere ein Weihnachtsteufelchen (das nur Falsches sagt), dann wäre er glücklicher. Oder? Was bekommt Tobias zu Weihnachten geschenkt?

Lösung:

Angenommen, Wesen A würde die Wahrheit sagen. Dann bekäme Tobias aufgrund der ersten Aussage genau zwei CDs, wegen der letzten Aussage höchstens zwei Bücher und wegen der dritten Aussage dann kein Stofftier, was nicht sein kann.
Demnach ist Wesen A das Weihnachtsteufelchen und Wesen B das Engelchen. Ist nun c die Anzahl der CDs, b die Anzahl der Bücher und s die Anzahl der Stofftiere, die Tobias bekommt, so erhält man mit der wahren zweiten Aussage $c + b + s = 9$.
Die wahre vierte Aussage liefert $c > s$ und die Aussage fünf, die ja falsch ist, liefert $b > c$. Das heißt aber $c \geq s + 1$ und $b \geq s + 2$. Da die dritte Aussage falsch sein muss, kann auch nicht $b = s+2$ sein, sondern es muss sogar $b \geq s+3$ gelten. Setzt man das in $c+b+s = 9$ ein, so folgt $9 \geq (s+1)+(s+3)+s = 3s+4$ bzw. $s \leq \frac{5}{3}$. Somit muss $s = 1$ sein.
Wegen der falschen ersten Aussage (und wegen $c > s$) ist dann $c \geq 3$. Wäre sogar $c \geq 4$, so folgte mit $b > c$ auch $b \geq 5$, was aber $c+b+s = 9$ widerspricht. Also ist $c = 3$ und damit $b = 5$.
Tobias bekommt also ein Stofftier, drei CDs und fünf Bücher.

Aufgabe 2

Wir nennen eine natürliche Zahl „lupfig", wenn sie durch alle ihre Ziffern teilbar ist. So ist zum Beispiel 36 lupfig, weil sie durch 3 und 6 teilbar ist, hingegen sind 23, 30 und 71 nicht lupfig.
Was ist die Summe aller lupfigen Zahlen zwischen 10 und 100?

Lösung:

Wir bestimmen zuerst alle lupfigen Zahlen zwischen 10 und 100. Da keine Zahl durch 0 teilbar ist, sind die Ziffern einer lupfigen Zahl nicht 0. Wir können also eine lupfige Zahl k schreiben als $k = 10 \cdot a + b$ mit $1 \leq a \leq 9$ und $1 \leq b \leq 9$. Nun ist k durch b teilbar und daher auch $k - b = 10 \cdot a$, d. h. es gibt eine natürliche Zahl m mit $10 \cdot a = m \cdot b$. Weiter ist k durch a teilbar und damit auch $k - 10 \cdot a = b$. Also gibt es eine natürliche Zahl n mit $b = n \cdot a$. Man sieht fast sofort, dass die Existenz von solchen m und n umgekehrt auch die Lupfigkeit von k zur Folge hat.
Damit ist $10 \cdot a = m \cdot b = m \cdot n \cdot a$ und daher $10 = m \cdot n$. Also sind n und m Teiler von 10, d. h. gleich 1, 2, 5 oder 10.
Wäre $n = 10$, so wäre $b = 10 \cdot a > 9$. Für $n = 5$ erhält man wieder wegen $b \leq 9$ als einzige Möglichkeit $a = 1$ und $b = 5$, d. h. man erhält die lupfige Zahl 15.
Für $n = 2$ erhält man als Bedingung $a \leq 4$ und dies liefert die lupfigen Zahlen $10 \cdot a + 2 \cdot a = 12 \cdot a$ für $a = 1, 2, 3$ oder 4. Zuletzt erhält man für $n = 1$ die neun Zahlen der Form $11 \cdot a$ mit $1 \leq a \leq 9$.
Die Summe dieser Zahlen ist nun

$$15 + 12 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) + 11 \cdot (1 + 2 + \ldots + 9) = 15 + 12 \cdot 10 + 11 \cdot 45 = 630.$$

Die Summe aller lupfigen Zahlen zwischen 10 und 100 beträgt also 630.

Aufgabe 3

Der Kaufhausgehilfe Peter bekommt den Auftrag, die neue Lieferung würfelförmiger Keksdosen im Schaufenster dekorativ aufzubauen. Jede Dose hat dabei eine Seitenlänge von 5 cm und die Lieferung besteht aus einer großen, bis zum Rand gefüllten Kiste mit den inneren Abmessungen 65 cm $\times$ 215 cm $\times$ 305 cm. Als Peter seinem Chef berichtet, er sei mit seiner Arbeit fertig und die Dosen hätten genau gereicht, um zwei verschieden große Quadrate zu formen (jeweils aus genau einer Schicht Dosen, also so, dass jede Dose sichtbar ist), ist der Chef skeptisch. Er behauptet, Peter müsse dann mindestens eine Keksdose unterschlagen haben. Wie kommt er zu dieser Schlussfolgerung?
Zusatzaufgabe: Kann man Peter auch noch nachweisen, dass er noch mehr Dosen unterschlagen haben muss?

Lösung:

Da die Dosen Seitenlänge 5 cm haben, wurden insgesamt $\frac{65}{5} \cdot \frac{215}{5} \cdot \frac{305}{5} = 34099$ Dosen geliefert. Wenn Peter keine Dose unterschlagen hätte, dann könnte man 34099 als Summe zweier Quadratzahlen schreiben.

Der Chef kommt zu seiner Schlussfolgerung, weil man die Zahl 34099 nicht auf diese Weise zerlegen kann, wie im Folgenden gezeigt wird.
Wir betrachten Reste bei Division durch 4: Eine gerade Quadratzahl ist stets durch 4 teilbar, da sie das Quadrat einer durch 2 teilbaren Zahl ist. Ist die Quadratzahl ungerade, d. h. das Quadrat einer ungeraden Zahl $2k+1$, so ist die Quadratzahl $(2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 4(k^2+k)+1$ eine Zahl, die bei Division durch 4 den Rest 1 lässt.
Für die Summe zweier Quadratzahlen bleiben also bei Division durch 4 als mögliche Reste die Zahlen $0 = 0+0$, $1 = 0+1$ und $2 = 1+1$. Die Zahl 34099 lässt allerdings bei Division durch 4 den Rest 3, denn es ist $34099 = 4 \cdot 8524 + 3$. Also lässt sich 34099 nicht als Summe zweier Quadratzahlen schreiben, was Peters Chef zweifellos erkannt hatte.

Peter muss tatsächlich noch mehr Dosen unterschlagen haben, denn auch die Zahl 34098 lässt sich nicht als Summe zweier Quadratzahlen schreiben.
Um dies einzusehen, betrachten wir Reste bei der Division durch 3: Ist eine natürliche Zahl n durch 3 teilbar, so ist ihr Quadrat n^2 auch durch 3 und sogar durch 9 teilbar. Ist n nicht durch 3 teilbar, d. h. n lässt sich schreiben als $n = 3k+1$ oder $n = 3k+2$, so gilt für n^2:

$$n^2 = (3k+1)^2 = 9k^2+6k+1 = 3 \cdot (3k^2+2k)+1$$

bzw.

$$n^2 = (3k+2)^2 = 9k^2+12k+4 = 3 \cdot (3k^2+4k+1)+1\,.$$

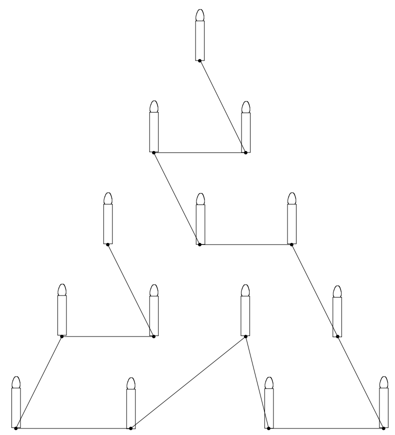
Also lässt n^2 in diesen Fällen Rest 1. Für die Reste einer Summe zweier Quadrate bei Division durch 3 bleiben also die Möglichkeiten 0, 1 und 2, wobei der Rest 0 genau dann auftritt, wenn beide Quadratzahlen durch 3 teilbar sind. In diesem Fall ist die Summe also sogar durch 9 teilbar.
Die Zahl 34098 ist nun durch 3 teilbar ($34098 = 3 \cdot 11366$), weshalb gerade dieser eben genannte Fall eintreten müsste. Allerdings ist 34098 nicht durch 9 teilbar. Somit lässt sich 34098 nicht als Summe zweier Quadratzahlen schreiben.
Peter kann also auch nicht diese Anzahl an Keksdosen aufgebaut haben.

Eine genau entsprechende Betrachtung bezüglich der Teilbarkeit durch 7 zeigt, dass Peter auch nicht 34097 Keksdosen aufgebaut haben kann.

Bemerkung: Auf ähnliche Weise (und mit etwas mehr Geduld) lässt sich sogar zeigen, dass Peter mindestens 11 (!) Keksdosen unterschlagen haben muss, da 34088 die größte Zahl kleiner als 34099 ist, die sich als Summe zweier Quadratzahlen schreiben lässt. Die gelegten Quadrate hätten dann Seitenlängen von $118 \cdot 5$ *cm* $= 590$ *cm bzw.* $142 \cdot 5$ *cm* $= 710$ *cm.*

Aufgabe 4

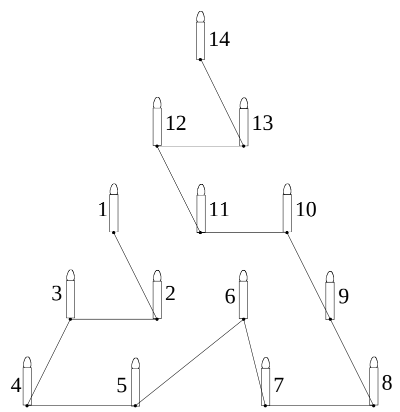
Familie Meiers Weihnachtsbaum ist mit elektrischen Kerzen geschmückt, genauer gesagt mit einer Lichterkette mit 14 Kerzen. (Zur Anordnung siehe Bild unten.) Die Lichter werden jeden Abend angeschaltet, zuerst am 24. Dezember (noch mit den Glühbirnen vom Vorjahr), das letzte Mal am 6. Januar, also genau 14 Abende lang. Die Erfahrung zeigt, dass jede Vorjahresglühbirne im Laufe dieser Zeit kaputtgeht, und zwar an jedem Abend genau eine. Der Ärger, die Birne auszuwechseln, wächst mit der Ebene, auf der sie angebracht ist. (n-te Ebene von unten = n „Ärgerpunkte".) Am Silvestervormittag muss ja sowieso die Feier vorbereitet werden, da wäre es möglich, die Kerzenkette bei gleichem Anordnungsschema umzudrehen, wenn dadurch der noch kommende Ärger verringert werden kann. Mit welcher Wahrscheinlichkeit lohnt sich das?



Die Kerzenkette von Familie Meier

Lösung:

Seien die Kerzen von 1 bis 14 durchnummeriert (siehe Skizze).



Die Kerzenkette von Familie Meier – durchnummeriert

Wir betrachten zuerst, wie sich die Ärgerpunkte der einzelnen Kerzen ändern, wenn man die Kette umdreht. Kerze 1 (K1) kommt an die Stelle von Kerze 14 (K14), also zwei Ebenen höher, bekommt somit 2 Ärgerpunkte dazu. Die Ärgerpunkte von K14 verringern sich also um 2. Genauso erhöhen sich bei den Kerzen K2, K3, K4 und K5 die Ärgerpunkte um 2 und die von K10, K11,

K12 und K13 verringern sich um 2. Dagegen ändern sich die Ärgerpunkte von K6, K7, K8 und K9 nicht, da K6 und K9 bzw. K7 und K8 beim Umdrehen vertauscht werden.
Das Umdrehen der Kette lohnt sich genau dann, wenn sich die Gesamtsumme der Ärgerpunkte der noch funktionierenden Kerzen verringert, also genau dann, wenn unter den Kerzen K10, K11, K12, K13 und K14 mehr funktionierende Kerzen sind als unter den Kerzen K1, K2, K3, K4 und K5; sind es genauso viele, ist es egal, ob man die Kette umdreht oder nicht, und wenn unter den Kerzen K1, ..., K5 sogar noch mehr funktionieren als unter den Kerzen K10, ..., K14, dann würde man sich durch das Umdrehen sogar noch mehr Ärger einhandeln.
Nun ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich lohnt, die Kette umzudrehen, genauso groß wie die Wahrscheinlichkeit, dass es ungünstiger ist, wenn man die Kette umdreht, denn die umgedrehte Kette liefert ja genau die andere Situation. Wenn wir also die Wahrscheinlichkeit, dass es egal ist, ob man die Kette umdreht, berechnet haben, ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, dass es sich lohnt, die Kette umzudrehen, durch die Formel: $p(L) = \frac{1}{2}(1 - p(E))$, wobei $p(E)$ die Wahrscheinlichkeit für „egal“ und $p(L)$ diejenige für „lohnt sich“ ist.
Die Wahrscheinlichkeit $p(E)$ berechnet sich nun als Quotient der Anzahl der möglichen Situationen für dieses Ereignis (dass es egal ist, ob man die Kerzenkette umdreht) durch die Anzahl aller möglichen Situationen am Silvestermorgen. Damit es egal ist, ob man die Kette umdreht oder nicht, müssen unter den Kerzen K1, ..., K5 genauso viele bereits kaputt gewesen sein wie unter den Kerzen K10, ..., K14. Und insgesamt sind am Silvestervormittag ja 7 Kerzen schon ausgewechselt worden.
Wäre in diesen zwei Gruppen je eine Kerze kaputtgegangen, so müssten von den vier Kerzen K6 bis K9 schon fünf kaputt gewesen sein, was offensichtlich nicht geht. Somit könnten in den zwei Fünfergruppen K1, ..., K5 und K10, ..., K14 je zwei Kerzen kaputtgegangen sein und noch drei der vier restlichen Kerzen; oder es könnten in den zwei Fünfergruppen je drei Kerzen kaputtgegangen sein und noch eine der restlichen vier.
Damit ist die Anzahl der möglichen Situationen, in denen es egal ist, ob man die Kette umdreht oder nicht, gerade: [1]

$$\binom{5}{2}\binom{5}{2}\binom{4}{3} + \binom{5}{3}\binom{5}{3}\binom{4}{1} = 10 \cdot 10 \cdot 4 + 10 \cdot 10 \cdot 4 = 800.$$

Die Gesamtzahl der möglichen Situationen ist $\binom{14}{7} = 3432$ (7 der 14 Kerzen waren kaputt).

[1] Dabei bezeichnet $\binom{n}{k}$ die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge. Hier speziell ist $\binom{5}{2}$ die Anzahl der Möglichkeiten, dass zwei der fünf Kerzen K1, ..., K5 (oder K10, ..., K14) kaputt sind.
Es heißt $\binom{n}{k}$ der Binomialkoeffizient „n über k“ und berechnet sich als $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ mit $m! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (m-1) \cdot m$.

Damit ist $p(E) = \frac{800}{3432} = \frac{100}{429}$ und daher:

$$p(L) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{100}{429}\right) = \frac{329}{858} \approx 0{,}383$$

Also ist es mit einer Wahrscheinlichkeit von ungefähr 38,3 % von Vorteil, die Kette am Silvestervormittag umzudrehen.