Beispiellösungen zu Blatt 33

Aufgabe 1

Was ist die kleinste positive ganze Zahl, die für jede der Ziffern $0, 1, 2, \ldots, 9$ einen Teiler hat, der mit dieser Ziffer endet?

Lösung:

Behauptung: Die gesuchte Zahl ist die 270.
Beweis: Zunächst ist festzustellen, dass 270 die geforderten Bedingungen erfüllt: Es ist

$$\begin{aligned}270 &= 1\mathbf{0} \cdot 27 = \mathbf{1} \cdot 270 = \mathbf{2} \cdot 135 = \mathbf{3} \cdot 90 = 5\mathbf{4} \cdot 5 = \mathbf{5} \cdot 54 \\ &= \mathbf{6} \cdot 45 = 2\mathbf{7} \cdot 10 = 1\mathbf{8} \cdot 15 = \mathbf{9} \cdot 30.\end{aligned}$$

Damit bleibt noch zu zeigen, dass dies die kleinste Zahl mit der geforderten Eigenschaft ist.
Die gesuchte kleinste Zahl hat einen Teiler, dessen letzte Ziffer eine Null ist. Damit muss dieser Teiler durch 10 teilbar sein, mithin auch die Zahl selbst. (Dies folgt übrigens auch daraus, dass die Zahl je einen Teiler hat, dessen letzte Ziffer eine Zwei bzw. eine Fünf ist, man kann die Null also auch weglassen.)
Nun betrachten wir den geforderten Teiler, der auf eine Neun endet. Ist dieser Teiler größer oder gleich 29, so wäre die Zahl ein ganzzahliges Vielfaches des kleinsten gemeinsamen Vielfachen von 10 und diesem Teiler, und das ist gleich dem Produkt dieser beiden Zahlen, also größer als 270. Wäre der Teiler mit der Neun die 19, so wäre die Zahl entsprechend ein ganzzahliges Vielfaches von 190. Da 190 aber nur acht Teiler hat, insbesondere keinen mit einer Drei am Ende, kommt 190 nicht in Frage. Das nächste ganzzahlige Vielfache ist $380 > 270$.
Damit muss 9 ein Teiler der Zahl sein, die somit ein ganzzahliges Vielfaches von 90 ist. Sowohl 90 als auch 180 haben aber keinen Teiler, der auf die Ziffer Sieben endet, so dass 270 wirklich die kleinste Zahl ist.

Aufgabe 2

Für wie viele ganze Zahlen x ist $\sqrt{x^2 + 33x + 1}$ eine natürliche Zahl?

Lösung:

Wenn die Zahl $\sqrt{x^2 + 33x + 1}$ eine natürliche Zahl ist, dann gilt $n^2 = x^2 + 33x + 1$ mit einer natürlichen Zahl n.
Um bei der folgenden quadratischen Ergänzung in der rechten Seite keine Brüche zu erhalten, multiplizieren wir die Gleichung mit 4. Dies liefert dann

$$\begin{aligned}(2n)^2 = 4n^2 = 4x^2 + 4 \cdot 33x + 4 &= ((2x)^2 + 2 \cdot (2x) \cdot 33 + 33^2) - 33^2 + 4 \\ &= (2x + 33)^2 - 33^2 + 4,\end{aligned}$$

bzw.

$$(2x + 33)^2 - (2n)^2 = 33^2 - 4 = (33 - 2)(33 + 2) = 31 \cdot 35.$$

Das bedeutet aber, dass das Paar $(a, b) = (2x+33, 2n)$ Lösung der Gleichung $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = 5 \cdot 7 \cdot 31$ ist.
Es gibt aber bis auf die Reihenfolge nur die folgenden acht Möglichkeiten, $5 \cdot 7 \cdot 31$ als Produkt zweier ganzer Zahlen zu schreiben: $1 \cdot (5 \cdot 7 \cdot 31)$, $5 \cdot (7 \cdot 31)$, $7 \cdot (5 \cdot 31)$, $31 \cdot (5 \cdot 7)$, $(-1) \cdot (-5 \cdot 7 \cdot 31)$, $(-5) \cdot (-7 \cdot 31)$, $(-7) \cdot (-5 \cdot 31)$ und $(-31) \cdot (-5 \cdot 7)$.
Jede dieser Zerlegungen kann man auf zwei Arten auf die beiden Faktoren $(a - b)$ und $(a + b)$ verteilen. Da jedoch

$$\begin{aligned} x = \frac{1}{2}(a - 33) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\big((a - b) + (a + b)\big) - 33\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\big((a + b) + (a - b)\big) - 33\right) \end{aligned}$$

gilt, liefern beide Möglichkeiten dasselbe x, so dass es dementsprechend auch höchstens folgende acht x gibt, für die der gegebene Wurzelausdruck eine natürliche Zahl sein kann: 255, 39, 24, 0, -288, -72, -57 und -33.
Eine kurze Probe durch Einsetzen in den gegebenen Ausdruck zeigt, dass diese x auch tatsächlich Lösungen sind.
Es gibt also genau acht ganzzahlige x der gesuchten Art.

Aufgabe 3

Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC. Zeige, dass es für jeden inneren Punkt P von ABC ein Dreieck mit den Seitenlängen $|PA|$, $|PB|$ und $|PC|$ gibt.
Ist diese Aussage auch noch wahr, wenn ABC nicht gleichseitig ist?

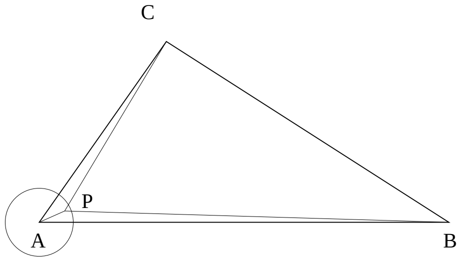
Lösung:

Aus drei Strecken mit den Längen a, b und c mit $a \geq b \geq c$ kann man genau dann ein Dreieck zusammensetzen, wenn $a < b + c$ gilt. Es reicht also für den ersten Aufgabenteil, diese Ungleichung nachzuweisen.
Sei P ein Punkt im Inneren von ABC. Durch Tausch der Bezeichnungen kann man erreichen, dass $|PA| \geq |PB|$ und $|PA| \geq |PC|$ gilt. Weiter gilt dann

$$|PA| < |BA| = |BC| < |BP| + |PC|$$

nach der im Dreieck BCP gültigen Dreiecksungleichung, und damit gilt die gesuchte Ungleichung.

Wenn ABC nicht gleichseitig ist, stimmt die Aussage nicht mehr. Wiederum durch Vertauschen der Bezeichnungen können wir erreichen, dass $|AB| > |AC|$ gilt. Sei $r = (|AB| - |AC|)/3$ und sei P ein Punkt in der Schnittmenge des Inneren von ABC und des Inneren des Kreises mit Radius r um A.



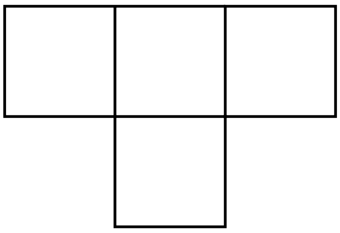
Dann ist (mit mehrmaliger Anwendung der Dreiecksungleichung in verschiedenen Variationen)

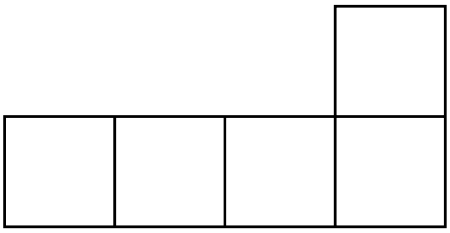
$$\begin{aligned} |PA| + |PC| &< |PA| + |PA| + |AC| < 2r + |AC| \\ &= |AB| - r \qquad\qquad \text{nach Wahl von } r \\ &< |AB| - |PA| < |PB|\,. \end{aligned}$$

Somit kann aus den Strecken PA, PB und PC kein Dreieck gebildet werden.

Aufgabe 4

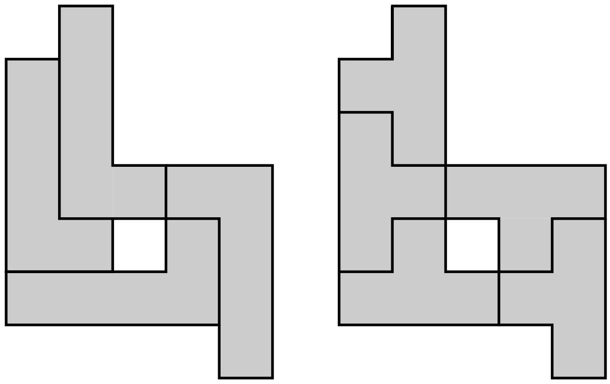
Herr Meyer hatte sich für sein Bad Fliesen der Form „T“ bestellt (siehe Bild), um eine gewisse zusammenhängende Fläche auszubessern. Die Fliesen hatte er dabei genau so ausgesucht, dass sie die Fläche bei geeigneter Anordnung haargenau füllen.
Nun bekam Herr Meyer aber eine falsche Lieferung, die nur Fliesen der Form „L“ enthielt (siehe Bild). Es stellte sich jedoch heraus, dass er die auszubessernde Fläche auch mit diesen Fliesen vollständig füllen konnte.
Was ist die minimale Größe einer solchen Fläche, die sich sowohl mit T-Fliesen als auch mit L-Fliesen ausfüllen lässt?


Form „T“


Form „L“

Lösung:

Da sich die gesuchte Fläche vollständig mit Fliesen der Form „T“ auslegen lässt, muss ihre Maßzahl (in Einheitsquadraten) durch 4 teilbar sein. Genauso folgt aus der Tatsache, dass man die Fläche vollständig mit „L“-Fliesen pflastern kann, dass die Maßzahl ein Vielfaches von 5 sein muss.
Zusammen folgt daher, dass die Fläche mindestens $\text{kgV}(4, 5) = 20$ Einheitsquadrate groß sein muss.
Eine solche Fläche mit genau 20 Einheitsquadraten gibt es auch, wie folgende Abbildung verdeutlicht:



Bemerkung: Anscheinend gibt es keine solche Fläche mit 20 Einheitsquadraten, die kein „Loch“ hat. So etwas gibt es dann aber für 40 Einheitsquadrate, wie in der nächsten Abbildung dargestellt.