μathematischer
Korrespondenz-
zirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

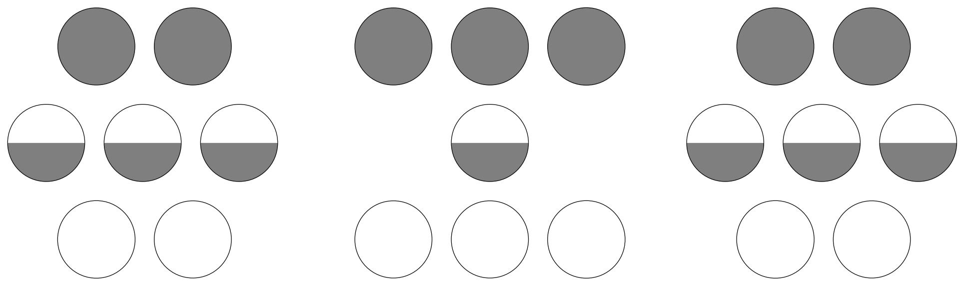
Beispiellösungen zu Blatt 34

Aufgabe 1

Drei Piraten wollen sich 21 gleich große Fässer Rum teilen, von denen sieben voll, sieben halb voll und sieben leer sind.
Kann jeder dieselbe Menge an Rum und dieselbe Anzahl an Fässern bekommen?

Lösung:

Ja, das ist möglich.
Folgende Abbildung verdeutlicht eine der beiden Varianten:



Zwei Piraten bekommen je zwei volle, drei halb volle und zwei leere Fässer, der dritte bekommt drei volle, ein halb volles und drei leere. Damit erhält jeder dreieinhalb Fässer Rum und insgesamt sieben Fässer.

Bemerkung: Die andere Möglichkeit wäre, dass zwei der Piraten je drei volle, ein halb volles und drei leere Fässer bekommen und der dritte ein volles, fünf halb volle und ein leeres.
Dass es keine anderen Möglichkeiten gibt, kann man sich so verdeutlichen: Insgesamt gibt es $7 + 7 \cdot 1/2 = 10{,}5 = 3 \cdot 3{,}5$ Fässer Rum, für jeden also dreieinhalb. Keiner darf demnach mehr als drei volle Fässer bekommen. Andererseits muss mindestens einer genau drei Fässer bekommen, ansonsten würden nicht alle sieben vollen Fässer verteilt werden. Dieser eine muss dann noch ein halb volles Fass erhalten (um genau seine dreieinhalb Fässer Rum zu bekommen) und noch drei leere, um auf sieben Fässer zu kommen. Für die Verteilung der weiteren vollen Fässer auf die beiden anderen Piraten gibt es dann noch genau die beiden Möglichkeiten 3:1 bzw. 2:2. Daraus ergeben sich dann die Anzahlen der halb vollen und leeren Fässer zwingend aus den Vorgaben.

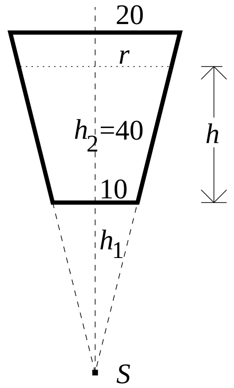
Aufgabe 2

Peter hat zwei Schalen für seine Geburtstagsbowle, die in der folgenden Abbildung dargestellt sind. Beide Gefäße sind 40 cm hoch. Das linke hat oben einen Durchmesser von 40 cm und unten einen Durchmesser von 20 cm und das rechte hat einen konstanten Durchmesser von 30 cm. Peter füllt jeweils

genau die Hälfte seiner Bowle in die beiden Gefäße und stellt überrascht fest, dass beide bis zur gleichen Höhe gefüllt sind.
Wie viel Bowle hat Peter seinen Gästen anzubieten?

Lösung:

Der Übersichtlichkeit halber lassen wir alle Einheitenangaben weg; wir rechnen durchweg in Zentimetern.
Das linke, schrägbewandete Gefäß hat folgenden Querschnitt:



Nach dem Strahlensatz mit Zentrum S gilt

$$\begin{array}{rrcl} & \frac{h_1+h_2}{20} & = & \frac{h_1}{10} \\ \Leftrightarrow & 10h_2 & = & 10h_1 \\ \Leftrightarrow & h_1 & = & h_2 = 40\,. \end{array}$$

Ist das Gefäß bis zur Höhe h gefüllt, hat die Flüssigkeit nach demselben Strahlensatz an der Oberfläche den Radius

$$r = \frac{10(h+h_1)}{h_1} = \frac{10(h+40)}{40} = \frac{1}{4}(h+40)$$

und damit hat die eingefüllte Bowle das Volumen (nach der bekannten Formel $V = \frac{\pi}{3}R^2H$ für das Volumen eines Kegels)

$$\begin{aligned} V_{\text{li}} &= \frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{4}(h+40)\right)^2(h+40) - \frac{\pi}{3}10^2 \cdot 40 \\ &= \frac{\pi}{48}((h+40)^3 - 64000) \\ &= \frac{\pi}{48}(h^3 + 120h^2 + 4800h) \qquad (1) \end{aligned}$$

Das rechte, zylindrische Gefäß enthält bei Befüllung bis zur Höhe h Bowle im Volumen von

$$V_{\text{re}} = \pi \cdot h \cdot 15^2. \qquad (2)$$

Nach Voraussezung sollen die beiden Volumina (1) und (2) gleich sein, es gilt also

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{48}(h^3 + 120h^2 + 4800h) = \pi \cdot 225h \\ \Leftrightarrow\ & h^3 + 120h^2 + 4800h - 10800h = 0 \\ \Leftrightarrow\ & h(h^2 + 120h - 6000) = 0. \end{aligned}$$

Die Nullstellen dieser Gleichung sind $h_1 = 0$, $h_2 = -60 + \sqrt{9600}$ und $h_2 = -60 - \sqrt{9600}$. Da die Gefäße nicht leer sein sollen, ist nur $h_2 = -60 + \sqrt{9600} \approx 37{,}98$ eine sinnvolle Lösung; dies ergibt für die Gesamtmenge an Bowle:

$$2 \cdot V_{\text{re}} = 2\pi \cdot h_2 \cdot 15^2 \approx 53692\text{cm}^2 \approx 53{,}7\ell.$$

Aufgabe 3

Jessicas Mathematiklehrer gibt seiner Klasse vier Zahlen mit der Aufgabe, bis zur nächsten Stunde die sechs paarweisen Produkte dieser Zahlen auszurechnen.
Am nächsten Tag, kurz bevor die Hausaufgaben eingesammelt werden, stellt Jessica bestürzt fest, dass sie diese vergessen hat. Heimlich lässt sie sich schnell einen Zettel mit den Antworten zustecken. Auf diesem kann sie aber nur die Zahlen $2, 3, 4, 5$ und 6 entziffern. Die sechste Zahl ist verwischt.
Kann sie diese mit Hilfe der gegebenen Informationen bestimmen?

Lösung:

Ja, das kann sie. Hierzu kann sie sich zum Beispiel Folgendes überlegen. Wenn die vier gegebenen Zahlen a, b, c, d waren, dann sind die sechs gesuchten Produkte folgende: ab, ac, ad, bc, bd, cd.
Jessica weiß nun zwar nicht, welche fünf der sechs Produkte sie auf ihrem Zettel hat, aber sie weiß, dass man alle sechs Produkte in drei Paare (ab, cd), (ac, bd) und (ad, bc) aufteilen kann, wobei das Produkt der beiden Zahlen in jedem Paar gleich $abcd$ ist. Auch wenn, wie im vorliegenden Fall, eines der sechs Produkte fehlt, muss sie also unter den übrigen fünf Produkten wenigstens zwei Paare von Zahlen finden, deren Produkt dasselbe (nämlich $abcd$) ist.
Nun bildet Jessica schnell alle Produkte von jeweils zwei der Zahlen $2, 3, 4, 5, 6$. Das sind $2 \cdot 3 = 6$, $2 \cdot 4 = 8$, $2 \cdot 5 = 10$, $2 \cdot 6 = 12$, $3 \cdot 4 = 12$, $3 \cdot 5 = 15$, $3 \cdot 6 = 18$, $4 \cdot 5 = 20$, $4 \cdot 6 = 24$ und $5 \cdot 6 = 30$. Da nur die Zahl 12 mehr als einmal, nämlich genau zweimal vorkommt, weiß Jessica, dass $abcd = 12$ sein muss, und darüber hinaus weiß sie, dass zwei der oben erwähnten Paare $(2, 6)$ und $(3, 4)$ sind. Das dritte Paar enthält das fehlende Produkt p und die Zahl 5. Da $p \cdot 5 = abcd = 12$ gelten muss, kann Jessica zu guter Letzt schließen, dass $p = \frac{12}{5}$ sein muss.

Übrigens gibt es (bis auf die Reihenfolge) genau vier Möglichkeiten für die vier Zahlen a, b, c, d, welche zu den sechs Produkten $2, \frac{12}{5}, 3, 4, 5, 6$ führen. Das sind $\frac{1}{5}\sqrt{30}$, $\frac{1}{3}\sqrt{30}$, $\frac{2}{5}\sqrt{30}$, $\frac{1}{2}\sqrt{30}$ und $\frac{2}{5}\sqrt{10}$, $\frac{1}{2}\sqrt{10}$, $\frac{3}{5}\sqrt{10}$, $\sqrt{10}$ sowie die beiden Möglichkeiten, die man durch Vorzeichenumkehr aus diesen beiden erhält.

Aufgabe 4

An einer großen Tafel stehen die Zahlen $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{2004}$. In einem Schritt darf man nun zwei beliebige Zahlen a und b an der Tafel wegwischen, muss dafür aber die Zahl $ab + a + b$ wieder an die Tafel schreiben. Da sich dabei die Anzahl der Zahlen an der Tafel um genau eins verringert, steht nach 2003

derartigen Schritten nur noch eine Zahl N an der Tafel.
Was ist das kleinstmögliche und was ist das größtmögliche N, das man auf diese Weise erhalten kann?

Lösung:

Die ursprüngliche Tafel sei mit T bezeichnet. An einer zweiten Tafel T' sollen zu Beginn die Zahlen $1+1, \frac{1}{2}+1, \frac{1}{3}+1, \ldots, \frac{1}{2004}+1$ stehen. Außerdem sei vereinbart: Wenn man einen Schritt an T mit den Zahlen a und b ausführt, muss man an T' die beiden Zahlen $a+1$ und $b+1$ wegwischen und dafür ihr Produkt $(a+1)(b+1)$ anschreiben.
Dies ist stets möglich, denn wir zeigen im Folgenden: Zu jedem Zeitpunkt stehen an Tafel T' genau die Zahlen, die man aus den Zahlen von T durch Addition von 1 erhält.
Dies ist zu Beginn sicherlich der Fall.
Wählt man vor einem Schritt die Zahlen a, b an T aus, so gibt es also an T' die Zahlen $a+1$ und $b+1$. Nach dem Schritt steht statt a und b an T jetzt $ab+a+b$. An T' steht statt $a+1$ und $b+1$ nach dem Schritt aber $(a+1)(b+1) = (ab+a+b)+1$. Damit ist die Aussage bewiesen.
Da es bei der Multiplikation reeller Zahlen nicht auf deren Reihenfolge ankommt, steht nach 2003 Schritten an T' die Zahl

$$\begin{aligned} N' &= (1+1)\cdot\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{3}+1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2004}+1\right) \\ &= \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{2005}{2004} \\ &= 2005. \end{aligned}$$

Also steht an der ursprünglichen Tafel T am Ende in jedem Fall die Zahl $N = N' - 1 = 2004$.