Beispiellösungen zu Blatt 35

Aufgabe 1

Im Herbst des Jahres 2003 gab der älteste Deutsche einer großen Tageszeitung folgende Antwort auf die Frage nach seinem Alter:

> *„Ich wurde an einem wunderschönen Sommersonntag geboren und auch meinen siebenten Geburtstag feierte ich an einem warmen Sonntag im Sommer.“*

Wie alt war der älteste Deutsche zum Zeitpunkt des Interviews?

Lösung:

Ein Jahr mit 365 Tagen besteht aus 52 Wochen plus einem einzelnen Tag, denn es ist $365 = 7 \cdot 52 + 1$. Das bedeutet, dass sich der Wochentag eines fest gegebenen Datums beim Übergang zum folgenden Jahr um einen Tag nach hinten verschiebt. Nach sieben Jahren ohne Schalttag(e) ist man also genau wieder bei demselben Wochentag wie zu Anfang.
Kommt ein Schalttag hinzu, verschiebt sich der Wochentag um einen weiteren Tag nach hinten, weil dieser Tag ebenfalls „überzählig“ ist. Das kommt nach unserem Kalender maximal einmal in vier bzw. somit maximal zweimal in sieben Jahren vor. Um nach sieben Jahren aber auf demselben Wochentag zu landen, braucht man eine durch sieben teilbare Zahl an Schalttagen. Dies ist nach obigen Überlegungen nur möglich, wenn es in den sieben Jahren gar keinen Schalttag gab. Normalerweise ist ja alle vier Jahre ein Schalttag eingefügt, aber alle 100 (jedoch nicht alle 400) Jahre fällt dieser nach dem Gregorianischen Kalender aus. Da wir davon ausgehen können, dass der älteste Deutsche nicht über 200 Jahre alt ist, muss er um das Jahr 1900 herum geboren worden sein, und zwar nach dem letzten Schalttag davor (1896), und seinen siebten Geburtstag muss er im Sommer vor dem ersten Schalttag nach 1900 (der war 1904) gefeiert haben, also im Sommer 1903 oder früher, also wurde er 1896 oder früher geboren. Beides zusammen ergibt, dass er im Sommer 1896 geboren worden sein muss. Demnach war er beim Interview 107 Jahre alt.

Aufgabe 2

Kristin, Karsten und Robert puzzeln ein rechteckiges Puzzle. Wie üblich beginnen sie mit den Randteilen. Nach zwei Stunden haben sie den Rand vollständig fertig und Karsten bemerkt: „Damit haben wir genau vier Prozent aller Teile gepuzzelt!“
Kristin antwortet darauf: „Tatsächlich! Bei einem Puzzle mit weniger Teilen wäre das nicht möglich gewesen.“

Robert schaut ganz verwirrt drein und beginnt die Randteile zu zählen, um die Behauptungen zu überprüfen.
Wie viele Teile hat das Puzzle und wie viele haben die drei schon verbaut?

Lösung:

Wir nehmen natürlich an, dass das Puzzle eine gewöhnliche Form hat, d. h. dass es eindeutige Zeilen und Spalten gibt.
Dann sei s die Anzahl an Spalten und z die Anzahl an Zeilen. Das Puzzle hat damit $s \cdot z$ Teile, und der Rand hat $2s + 2z - 4$ Teile (die Ecken dürfen nicht doppelt gezählt werden).
Nach den genannten zwei Stunden des Puzzelns gilt also:

$$25 \cdot (2s + 2z - 4) = sz, \tag{1}$$

und umgeformt ergibt das (für $s \neq 50$):

$$z = \frac{50(s-2)}{s-50}\,.$$

Wenn man mit der Differentialrechnung vertraut ist, kann man nun das Produkt sz als Funktion von s auffassen und mit Hilfe der Ableitungen das Minimum der Funktion finden. Wir zeigen aber lieber, wie es auch ohne diese Theorie geht:
Zunächst ist festzustellen, dass $s > 50$ sein muss, denn für $50 > s \geq 2$ ist $z \leq 0$, und das macht genauso wenig Sinn wie $s = 1$. Für $s = 50$ (dadurch durften wir ja nicht teilen) ergibt sich die Gleichung (1) zu $25 \cdot 96 + 50z = 50z \quad\Leftrightarrow\quad 25 \cdot 96 = 0$ und damit ein Widerspruch. Außerdem können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $s \leq z$ gilt. Ferner stellen wir fest, dass z umso kleiner wird, je größer s wird, denn für $x > 0, s > 50$ gelten die Äquivalenzen

$$\begin{aligned}
& & \frac{50(s-2)}{s-50} &> \frac{50(s+x-2)}{s+x-50} \\
&\Leftrightarrow & (s+x-50)(s-2) &> (s+x-2)(s-50) \\
&\Leftrightarrow & (s-50)(s-2) + x(s-2) &> (s-50)(s-2) + x(s-50) \\
&\Leftrightarrow & s-2 &> s-50\,,
\end{aligned}$$

und das Letztere ist eine wahre Aussage.
Schließlich sollen sowohl s als auch z ganzzahlig sein. Daher muss $s - 50$ ein Teiler von $50(s-2)$ sein. Da ein Teiler von $s - 2$ nur dann ebenso ein Teiler von $s - 50$ sein kann, wenn er auch die Differenz $(s-2)-(s-50) = 48$ teilt, muss $s - 50$ demnach unter den Teilern von $50 \cdot 48 = 2400 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^2$ zu finden sein. (Und wir können mit der Suche aufhören, sobald z kleiner als s wird.)
Für die Suche füllen wir also die folgende Tabelle aus:

$s-50$	$s-2$	s	z	sz
1	49	51	2450	124950
2	50	52	1250	65000
3	51	53	850	45050
4	52	54	650	35100
5	53	55	530	29150
6	54	56	450	25200
8	56	58	350	20300
10	58	60	290	17400
12	60	62	250	15500
15	63	65	210	13650
16	64	66	200	13200
20	68	70	170	11900
24	72	74	150	11100
25	73	75	146	10950
30	78	80	130	10400
32	80	82	125	10250
40	88	90	110	9900
48	96	98	100	9800
50	98	100	98	9800

Somit hat das Puzzle 9800 Teile und der Rand besteht aus 392 Teilen.

Einen noch raffinierteren Lösungsweg hat unser Teilnehmer Manuel Hohmann gefunden: Er bezeichnet die Gesamtanzahl an Teilen mit n, löst die Formel $sz = n$ nach $z = \frac{n}{s}$ auf und setzt dies in $n = 25 \cdot (2s + 2z - 4)$ ein. Damit erhält er für den Wert von s eine quadratische Gleichung mit Parameter n:

$$\begin{aligned} n &= 25 \cdot (2s + 2\frac{n}{s} - 4) \\ \Leftrightarrow \quad ns &= 50s^2 + 50n - 100s \\ \Leftrightarrow \quad s^2 - \frac{100+n}{50}s + n &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung hat die Lösungen

$$s_{1,2} = \frac{1}{100}\left(100 + n \pm \sqrt{10000 - 9800n + n^2}\right);$$

die beiden Werte müssen genau die beiden Kantenlängen liefern, weil ihr Produkt (vgl. Vieta!) n ist.
Für $2 \le n \le 9798$ ist $10000 - 9800n + n^2 < 0$, daher gibt es keine reelle Lösung. $n = 1$ scheidet offenbar als unsinnig aus und für $n = 9799$ ist $10000 - 9800n + n^2 = 201$ kein Quadrat einer ganzen Zahl, aber für $n = 9800$ ist $s = 98$ und $z = 100$ (oder umgekehrt). Damit muss dieses n das kleinstmögliche sein.

Aufgabe 3

Jonas sucht einen Bruch $\frac{p}{q}$, dessen Dezimaldarstellung bis zur zehnten Nachkommastelle mit der Dezimaldarstellung von $\sqrt{2} = 1{,}414213\ldots$ übereinstimmt.
Finde einen solchen Bruch!
Jonas behauptet, einen solchen Bruch mit $q < 50\,000$ zu kennen. Zeige, dass er sich verrechnet hat.

Lösung:

Ein Näherungsbruch, dessen Dezimaldarstellung bis zur zehnten Nachkommastelle mit der Dezimaldarstellung von $\sqrt{2}$ übereinstimmt, ist leicht gefunden, wenn man einen Taschenrechner zur Hand hat, der einem die zehn Nachkommastellen liefert: Mit

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623\ldots$$

stimmt sicherlich

$$\frac{14142135623}{10000000000}$$

bis zur zehnten Nachkommastelle mit $\sqrt{2}$ überein.
Sehr befriedigend ist das allerdings noch nicht, weil Zähler und Nenner ja recht groß sind.
„Schönere" Lösungen erhält man z. B. mit dem Heron-Verfahren: Zur Berechnung der Quadratwurzel der Zahl a wählt man zunächst einen Startwert x_0, am einfachsten a selbst, und dann definiert man rekursiv

$$x_{n+1} := \frac{x_n + a/x_n}{2}.$$

Die Idee dahinter ist in aller Kürze, dass man sich den Wert x_n als eine Seitenlänge eines Rechtecks vorstellt, wozu man dann die andere Seitenlänge so bastelt, dass dessen Flächeninhalt gleich a ist (also a/x_n). Wäre das Rechteck ein Quadrat, hätte man als Seitenlänge die Wurzel von a. Also sucht man ein neues Rechteck, dessen Seitenlängen näher beieinander liegen als bei dem vorigen. Als eine Seitenlänge kann man nun am einfachsten den arithmetischen Mittelwert der beiden vorigen Seitenlängen nehmen. Dieser ist garantiert näher an der Lösung dran, weil vorher die lange Seitenlänge zu lang und die kurze zu kurz war.
Man kann berechnen, dass dieses Verfahren „quadratisch konvergiert", d. h. grob gesagt, dass sich die Zahl der richtigen Stellen in jedem Schritt mindestens verdoppelt. Es ist also ein recht schnelles Verfahren. Außerdem liefert es für einen rationalen Startwert offensichtlich auch nur rationale Näherungswerte. Für $x_0 = a = 2$ ergibt sich:

$$x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = \frac{17}{12}, \quad x_3 = \frac{577}{408}, \quad x_4 = \frac{665857}{470832}, \ldots$$

Mit x_4 kann man bereits aufhören, denn die Differenz der beiden Kantenlängen und damit der maximale Fehler in der Näherung ist

$$\begin{aligned}\left|\frac{665857}{470832} - \frac{2}{\frac{665857}{470832}}\right| &= \frac{665857^2 - 2 \cdot 470832^2}{665857 \cdot 470832} = \frac{1}{665857 \cdot 470832} \\ &= \frac{1}{313506783024} < 10^{-11}\,,\end{aligned}$$

und die Näherung

$$\frac{665857}{470832} = 1{,}4142135623746\ldots$$

hat an der elften Nachkommastelle weder eine Null noch eine Neun.

Falls sich jemand mit diesem Problem noch allgemeiner beschäftigen will, so sei an dieser Stelle noch das Stichwort *Kettenbruch* genannt; damit hat man ebenfalls ein brauchbares Hilfsmittel, um Näherungsbrüche mit kleinen Nennern, aber guter Näherung zu erhalten.

Dass es keinen Bruch mit einem Nenner < 50000 gibt, der $\sqrt{2}$ auf zehn Nachkommastellen genau annähert, erkennt man z. B. wie folgt:
Wir nehmen an, wir hätten so einen Bruch p/q mit $q < 50000$ und $|\sqrt{2} - p/q| < 10^{-10}$ (Letzteres ist ja sicherlich der Fall, wenn die ersten zehn Nachkommastellen übereinstimmen). Es gilt:

$$|\sqrt{2} - \frac{p}{q}| \cdot |\sqrt{2} + \frac{p}{q}| = |2 - \frac{p^2}{q^2}| = \frac{1}{q^2}|2q^2 - p^2| \geq \frac{1}{q^2}.$$

Die letzt Abschätzung erhält man dabei wie folgt: Wir können annehmen, dass p und q teilerfremd sind. Dann kann $2q^2 - p^2$ nicht null sein, denn sonst müsste 2 ein Teiler von p^2 sein, also auch von p. Damit wäre aber 4 ein Teiler von p^2, mithin auch von $2q^2$, folglich wäre 2 ein Teiler von q^2 und von q. Das steht aber im Widerspruch zur Teilerfremdheit. Da aber mit Sicherheit $2q^2 - p^2$ eine ganze Zahl ist, muss ihr Betrag mindestens 1 sein.
Wegen $2\sqrt{2} \approx 2{,}828$ ist in jedem Fall $\sqrt{2} + p/q < 3$. Aus der vorigen Gleichungskette folgt damit nun:

$$|\sqrt{2} - \frac{p}{q}| \geq \frac{1}{3 \cdot q^2}.$$

Für $q < 50000$ hat der letzte Bruch den Wert

$$\frac{1}{3 \cdot 50\,000^2} = \frac{1}{7\,500\,000\,000} = \frac{4}{3} \cdot 10^{-10}\,,$$

also kann die Näherung nicht so genau sein wie gefordert. Jonas hat sich verrechnet.

Aufgabe 4

Der Präsident der USA, der Ministerpräsident Japans und der Regierungschef Brasiliens wollen sich zu wichtigen Verhandlungen treffen. Damit niemand benachteiligt wird, einigt man sich auf einen Treffpunkt, der von Washington, Tokio und Brasilia aus (auf der Erdoberfläche gemessen) gleich weit entfernt liegt.
In welchem Land und nahe welcher Stadt trifft man sich?

Lösung:

Der Lösungsweg wird zunächst allgemein beschrieben:
Gegeben seien drei Punkte A,B,C auf der Erdoberfläche durch ihren Längengrad ϕ und ihren Breitengrad θ (im Bogenmaß), wobei östliche Länge und nördliche Breite als positiv gerechnet werden.
Wir legen die Erde in ein kartesisches Koordinatensystem mit Ursprung im Mittelpunkt, die positive x-Achse gehe durch den Punkt $\phi = 0, \theta = 0$, die positive y-Achse durch $\phi = \pi/2, \theta = 0$ und die positive z-Achse gehe durch $\phi = 0, \theta = \pi/2$ (Nordpol).
Man rechnet nach, dass dann

$$x_P = R\cos\theta_P\cos\phi_P, \quad y_P = R\cos\theta_P\sin\phi_P, \quad z_P = R\sin\theta_P \tag{2}$$

gilt, wobei R der Erdradius ist und P ein beliebiger Punkt auf der Erde.
Im folgenden identifizieren wir Punkte mit ihren Ortsvektoren.
Alle Punkte, die von A und B im Raum gleich weit entfernt liegen, liegen auf der Ebene mit Normalenvektor $A - B$ durch den Punkt $\frac{1}{2}(A + B)$.
Alle Punkte, die von A und C im Raum gleich weit entfernt liegen, liegen auf der Ebene mit Normalenvektor $A - C$ durch den Punkt $\frac{1}{2}(A + C)$.
Die Punkte des Raumes, die von allen drei Punkten gleich weit entfernt liegen, liegen also auf der Schnittgeraden dieser beiden Ebenen, welche dann sowohl senkrecht auf $A - B$ als auch auf $A - C$ steht und durch den Ursprung geht (denn dieser liegt gleich weit entfernt von A,B,C). Diese Gerade hat also die Gleichung

$$g(t) = t \cdot (A - B) \times (A - C), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

(Mit „$\times$“ wird das Kreuzprodukt im dreidimensionalen Vektorraum bezeichnet.) Die Gerade schneidet die Erdkugel genau zweimal, nämlich in

$$M_1 = \frac{(A - B) \times (A - C)}{|(A - B) \times (A - C)|} \quad \text{und} \quad M_2 = -M_1. \tag{4}$$

Hat man M_1 und M_2 bestimmt, erhält man Längen- und Breitengrade durch die Umkehrung zu (2), nämlich:

$$\theta_{M_1} = \arcsin(z_{M_1}/R), \quad \phi_{M_1} = \arctan(y_{M_1}/x_{M_1}) \quad (\pm\pi) \tag{5}$$

und analog für M_2. Das $\pm\pi$ ist wegen der Uneindeutigkeit von arctan anzupassen, um das richtige Vorzeichen von x_{M_1} bzw. y_{M_1} zu erhalten.

Nun setzen wir konkret unsere Werte ein:
Wir rechnen mit $R = 1$, da der Wert von R offenbar keine Rolle für das Ergebnis spielt.

Ort	θ (Grad/Bogen)	ϕ (Grad/Bogen)
Washington	$38°54'/\ 0{,}678933$	$-77°\ 2'/-1{,}344490$
Brasilia	$-15°46'/-0{,}275180$	$-47°55'/-0{,}836304$
Tokio	$35°42'/\ 0{,}623083$	$139°46'/\ 2{,}439390$

Ort	x	y	z
Washington	0,174625	−0,758399	0,627963
Brasilia	0,644995	−0,714248	−0,271720
Tokio	−0,619961	0,524526	0,583541

Mit diesen Orten als A,B,C (in dieser Reihenfolge), erhält man

$$(A-B)\times(A-C) = \begin{pmatrix} -0{,}470370 \\ -0{,}044151 \\ 0{,}899683 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}794586 \\ -1{,}282925 \\ 0.044422 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}152265 \\ 0{,}735770 \\ 0{,}638531 \end{pmatrix}$$

und

$$\left| \begin{pmatrix} 1{,}152265 \\ 0{,}735770 \\ 0{,}638531 \end{pmatrix} \right| = 1{,}508905,$$

also

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0{,}763643 \\ 0{,}487619 \\ 0{,}423175 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad M_2 = -M_1. \tag{6}$$

Wegen $\arcsin(0{,}423175) = 0{,}43695 \cong 25°2'$ und $\arctan(0{,}487619/0{,}763643) = 0{,}568279 \cong 32°34'$ liegt M_1 also bei $25°2'$ nördlicher Breite und $32°34'$ östlicher Länge.
Analog sieht man, dass M_2 bei $25°2'$ südlicher Breite und $147°26'$ westlicher Länge liegt. M_1 liegt in Ägypten ziemlich direkt am Nil etwa zwischen Luxor und Idfu.
M_2 liegt mitten im Pazifik.
Also treffen sich die drei in Ägypten bei Luxor.

Bemerkung:
Viele Einsender haben versucht, den gesuchten Ort zu bestimmen, indem sie in einem Atlas den Umkreismittelpunkt des durch die drei Städte gegebenen Dreiecks bestimmten. Dies führt nicht zur richtigen Lösung.
Das liegt daran, dass die Erdoberfläche eine Kugeloberfläche ist, welche im Gegensatz zum ebenen Atlas eine Krümmung aufweist. Eine Konsequenz dieser Tatsache ist, dass in einem Atlas nie die wahren Abstände zwischen allen Orten wiedergegeben werden können.