Mathematischer Korrespondenz-zirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Beispiellösungen zu Blatt 37

Aufgabe 1

Dieses 37. Aufgabenblatt steht unter einem *guten Stern*, denn $37 - 3 \cdot 7 = 16$ ist eine Quadratzahl!
Wie viele und welche Aufgabenblätter werden noch unter einem *guten Stern* stehen, bevor das 100. Blatt erscheint?

Lösung:

Ist $n = 10a + b$ die Nummer eines Aufgabenblattes mit Einerziffer b und Zehnerziffer a, so steht das Blatt unter einem guten Stern, wenn es eine natürliche Zahl m so gibt, dass $n - ab = 10a + b - ab = m^2$ gilt.
Subtrahiert man in dieser Gleichung auf beiden Seiten 10, so erhält man:

$$m^2 - 10 = 10a + b - ab - 10 = (a-1)(10-b).$$

Hierbei gilt wegen $37 \leq n \leq 99$ auch $3 \leq a \leq 9$ und $0 \leq b \leq 9$ und deswegen

$$2 \leq a - 1 \leq 8 \text{ bzw. } 1 \leq 10 - b \leq 10.$$

Man erhält eine Lösung obiger Gleichung also genau dann, wenn man $m^2 - 10$ in ein Produkt aus einem ersten Faktor zwischen 2 und 8 und einem zweiten Faktor zwischen 1 und 10 zerlegen kann.
Insbesondere muss also $2 \leq m^2 - 10 \leq 80$ sein und daher auch $4 \leq m \leq 9$.
Folgende Tabelle enthält die nun noch fehlenden Rechnungen:

m	$m^2 - 10$	erlaubte Produktdarstellungen	resultierende Paare (a, b)
4	6	$6 \cdot 1, 3 \cdot 2, 2 \cdot 3$	$(7,9)$, $(4,8)$, $(3,7)$
5	15	$5 \cdot 3, 3 \cdot 5$	$(6,7)$, $(4,5)$
6	26	–	–
7	39	–	–
8	54	$6 \cdot 9$	$(7,1)$
9	71	–	–

Somit werden noch genau fünf weitere Blätter unter einem guten Stern stehen, bevor das 100. Blatt erscheint, nämlich die Blätter 45, 48, 67, 71 und 79.

Aufgabe 2

Susanne spielt mit ihrem Taschenrechner. Zuerst tippt sie die Zahl 7 ein und drückt dann ziellos auf einigen Tasten des Rechners herum, genauer gesagt benutzt sie dabei nur die Tasten $\boxed{1/x}$, $\boxed{+1}$ und $\boxed{-1}$. (Die erste Taste ersetzt die aktuelle Zahl x im Display durch ihren Kehrwert $1/x$, die zweite ersetzt

x durch $x+1$ und die dritte ersetzt x durch $x-1$). Danach steht auf dem Display des Rechners -7.
Überrascht versucht sie es mit der Startzahl 100, tippt dieselbe Tastenfolge aus $\boxed{1/x}$, $\boxed{+1}$ und $\boxed{-1}$ und erhält tatsächlich -100. Auch andere Startzahlen halten dem Test stand.
Wie kann eine solche Tastenfolge lauten?

Lösung:

Es gibt verschiedene Tastenfolgen, die zu diesem Ergebnis führen. Eine Möglichkeit ist

$$\boxed{1/x}\quad\boxed{-1}\quad\boxed{1/x}\quad\boxed{+1}\quad\boxed{1/x}\quad\boxed{-1}\,.$$

Überprüfen wir, dass diese Tastenfolge die 7 tatsächlich in die -7 verwandelt:

$$7\ \boxed{1/x} \Rightarrow\ \frac{1}{7}\ \boxed{-1} \Rightarrow\ \frac{1}{7}-1=-\frac{6}{7}\ \boxed{1/x} \Rightarrow\ -\frac{7}{6}$$
$$-\frac{7}{6}\ \boxed{+1} \Rightarrow\ -\frac{7}{6}+1=-\frac{1}{6}\ \boxed{1/x} \Rightarrow\ -6\ \boxed{-1} \Rightarrow\ -7$$

Auch bei 100 funktioniert die Abfolge:

$$100\ \Rightarrow\ \frac{1}{100}\ \Rightarrow\ -\frac{99}{100}\ \Rightarrow\ -\frac{100}{99}\ \Rightarrow\ -\frac{1}{99}\ \Rightarrow\ -99\ \Rightarrow\ -100\,.$$

In der Tat verwandelt die Tastenfolge fast jede Zahl n in ihr Negatives $-n$:

$$n\ \boxed{1/x} \Rightarrow\ \frac{1}{n}\ \boxed{-1} \Rightarrow\ \frac{1}{n}-1=\frac{1-n}{n}\ \boxed{1/x} \Rightarrow\ \frac{n}{1-n}\ \boxed{+1} \Rightarrow$$
$$\frac{n}{1-n}+1=\frac{1}{1-n}\ \boxed{1/x} \Rightarrow\ 1-n\ \boxed{-1} \Rightarrow\ (1-n)-1=-n\,.$$

Und wieso verwandelt sie nur *fast* jede Zahl in ihr Negatives? Da man nicht durch 0 teilen kann, gibt es Probleme, wenn ein Zwischenergebnis die 0 ist und im nächsten Schritt $\boxed{1/x}$ ausgeführt werden müsste. Diese Taste drücken wir in unserer Tastenfolge insgesamt dreimal. Die Zahlen jeweils davor, die also nicht 0 sein dürfen, sind: n, $\frac{1-n}{n}$ und $\frac{1}{1-n}$. Daher muss man offensichtlich genau die Zahlen $n=0$ und $n=1$ ausschließen.
Also funktioniert unsere Tastenfolge für alle Zahlen außer für 0 und 1.

Anmerkung: Man kann auch zeigen, dass es keine derartige Tastenfolge gibt, die aus weniger als sechs Tastendrücken besteht.

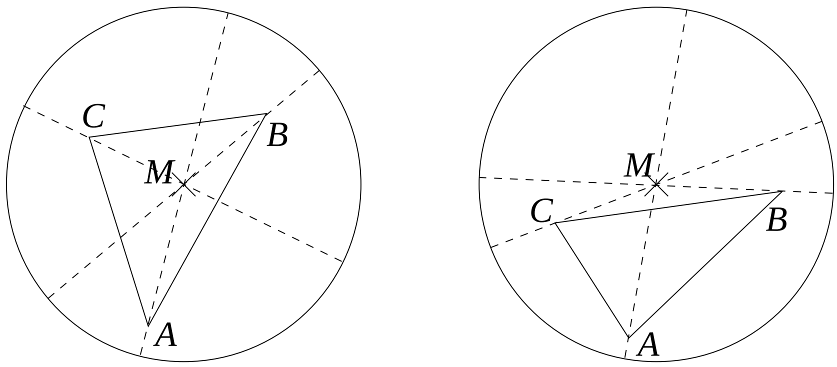
Aufgabe 3

Beim Spiel „Baumeister“ wird aus zwei geich großen kreisförmigen Holzplatten und drei gleich hohen Holzsäulen ein Tempel gebaut. Hierzu wird die erste Holzplatte auf den Boden gelegt, dann werden die drei Säulen irgendwo auf diese Platte gestellt und anschließend soll die zweite Platte auf die Säulen so gelegt werden, dass sie genau über der Grundplatte schwebt.
Wenn die Positionen der drei Säulen zufällig ausgewählt werden, in wie viel

Prozent aller Fälle gelingt dann der Tempelbau ohne Einsturz?
Hinweis: Die Säulen werden als beliebig dünn angenommen.

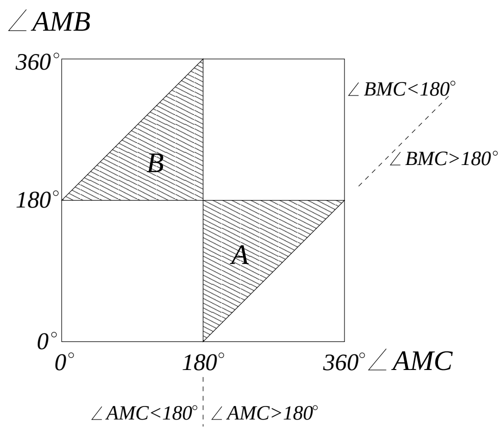
Lösung:

Die Deckplatte des Tempels liegt genau dann stabil auf den Säulen, wenn ihr Schwerpunkt (also ihr Mittelpunkt) im Inneren des Dreiecks liegt, das von den Säulen (von oben betrachtet) aufgespannt wird. Werden die Ecken des Dreiecks wie üblich mit A, B und C und der Mittelpunkt der Deckplatte mit M bezeichnet, so ist das genau dann der Fall, wenn entweder A, B, C in dieser Reihenfolge im Gegenuhrzeigersinn angeordnet sind und jeder der drei orientierten Winkel $|\angle AMB|$, $|\angle BMC|$ und $|\angle CMA|$ kleiner als $180°$ ist oder wenn A, B, C in dieser Reihenfolge im Uhrzeigersinn angeordnet sind und jeder der drei orientierten Winkel $|\angle BMA|$, $|\angle CMB|$ und $|\angle AMC|$ kleiner als $180°$ ist.



Stabiler und instabiler Fall

Den sich ergebenden „erfolgreichen Wertebereich“ macht man sich am einfachsten an einem Koordinatendiagramm klar:



Da die Säulen an jeden Ort mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gestellt werden und die Platte kreisrund ist, ist auch jeder Winkel gleich wahrscheinlich. Daher ist das Verhältnis der schraffierten Fläche zur Gesamtfläche gleich der gesuchten Wahrscheinlichkeit: nämlich $2/8 = 1/4$.

Anmerkung: Es läge durchaus nahe, in der folgenden Art zu argumentieren: Jeder Punkt des Dreiecks definiert einen ihn enthaltenden Durchmesser

des Kreises. Wir sagen, dieser Punkt *trennt* (die beiden anderen Punkte), wenn die beiden anderen Punkte im Inneren von verschiedenen durch diesen Durchmesser gegebenen Hälften des Kreises liegen.
Wenn ein Punkt nicht trennt, liegt die Deckplatte nicht stabil. In diesem Fall gibt es noch einen weiteren der drei Punkte (nämlich den, der bezüglich des Winkels weiter von dem ersten entfernt ist), der nicht trennt.
Das heißt umgekehrt: Genau dann, wenn bereits zwei der drei Punkte *trennen*, ist der Tempelbau stabil. (Vgl. auch erste Skizze oben.)
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebig, aber fest gewählter Punkt trennt, beträgt, wie man schnell bestimmen kann, $1/2$. Also könnte man (jetzt unbegründet!) schließen, da ja zwei frei wählbare Punkte trennen müssen, dass die Wahrscheinlichkeit für einen stabilen Tempelbau $1/2 \cdot 1/2 = 1/4$ ist, und hat damit das richtige Ergebnis gefunden.
Damit man so argumentieren darf, muss man allerdings zeigen, dass die beiden Wahrscheinlichkeiten *stochastisch unabhängig* sind. Das heißt, dass das Eintreten des ersten Ereignisses (der erste Punkt trennt) die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des zweiten (der zweite Punkt trennt) nicht verändert. Das ist in der Tat möglich, z. B. auf eine ähnliche Weise, wie oben das Gesamtergebnis hergeleitet wurde(!). Die stochastische Unabhängigkeit ist aber nicht so offensichtlich, wie man zunächst annehmen mag, denn auch wenn im Falle des Trennens des ersten Punktes die beiden anderen Punkte noch viele verschiedene Lagen einnehmen können, so sind es ja nicht mehr alle möglichen.
Zur „Abschreckung“ sei darauf hingewiesen, dass man ja auch sagen könnte, dass der Tempelbau genau dann gelingt, wenn die Bedingung für alle *drei* Punkte erfüllt ist; dies würde zu einer Wahrscheinlichkeit von $(1/2)^3 = 1/8$ führen, was offensichtlich falsch ist.
Wir haben hier also den Fall, dass die drei Ereignisse „Der erste/zweite/dritte Punkt trennt“ paarweise stochastisch unabhängig sind, aber nicht alle drei zusammen.
Dass die genannten Ereignisse zumindest paarweise stochastisch unabhängig sind, liegt auch wesentlich daran, dass die Säulen auf der gesamten Kreisscheibe mit gleicher Wahrscheinlichkeit verteilt werden. Denn wenn man sie beispielsweise nur in eine Hälfte stellen wollte, so wäre die Wahrscheinlichkeit, dass ein fest gewählter Punkt trennt, immer noch nicht null (sondern $1/3$), aber man könnte trotzdem offensichtlich keinen stabilen Tempel mehr bauen.

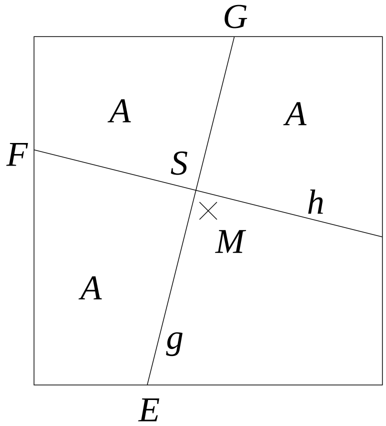
Aufgabe 4

Herr Meyer hat einen quadratischen Garten, den er in vier Blumenbeete unterteilen will. Hierzu zieht er aufs Geratewohl zwei gerade, zueinander senkrechte Grenzlinien. Da Herr Meyer ein Freund moderner Landschaftsarchitektur ist, sind diese Grenzlinien aber nicht unbedingt parallel zu den Seiten des Quadratgartens.
Beim anschließenden Ausmessen stellt sich heraus, dass drei der entstandenen Beete gleich groß sind.

Zeige, dass dann sogar alle vier Beete die gleiche Größe haben müssen.

Lösung:

Die eine Grenzlinie sei mit g, die andere mit h, und die Größe der drei gleich großen Beete sei mit A bezeichnet. Durch Drehen der Betrachtung und ggf. Tauschen der Bezeichnungen kann man in jedem Fall erreichen, dass zwei der gleich großen Beete links von g liegen und das obere dieser beiden sowie das dritte oberhalb von h (vgl. Skizze).



M sei der Mittelpunkt des Quadrats.
Die Strecke g teilt also das Quadrat so, dass der linke Teil die Größe $2A$ hat; ebenso teilt h das Quadrat so, dass der obere Teil dieselbe Größe hat.
Nun werde g um $90°$ mit dem Uhrzeigersinn um M gedreht, es entsteht die Strecke g'. Weil das Quadrat drehsymmetrisch ist, teilt g' es nun wiederum so in zwei Teile, dass der (nun) obere Teil die Größe $2A$ hat. Außerdem liegt g' parallel zu h, das dieselben Eigenschaften hat. Da aber offensichtlich jedes Verschieben von h in vertikaler Richtung die Größe der oberen Fläche verändert, muss $g' = h$ sein.
Jetzt betrachten wir die Strecke SF. Sie teilt den linken, durch g begrenzten Teil in zwei gleich große Teile. Da bei Drehung um M um $90°$ im Uhrzeigersinn g auf h abgebildet wird, muss das Abbild von SF unter dieser Drehung den Teil oberhalb von h in zwei gleich große Teile teilen. Es ist außerdem senkrecht zu h. Nach Voraussetzung hat auch SG diese Eigenschaften, und es ist wiederum klar, dass diese Strecke die einzige solche Strecke ist. Demnach wird die Strecke SF bei der betrachteten Drehung um $90°$ um M auf die Strecke SG und dabei der Punkt S auf sich selbst abgebildet, was nur im Fall $S = M$ möglich ist. Damit ist allerdings die gesamte Unterteilung drehsymmetrisch (um Vielfache von $90°$), womit alle vier Beete gleich groß sein müssen.

Anmerkung: In der Skizze sind alle Beete als Vierecke gezeichnet worden. Theoretisch sind auch Drei- und Fünfecke denkbar (wobei tatsächlich nur in einem Fall keine Vierecke, sondern dann Dreiecke auftreten), das ist aber für die Argumentation im Beweis egal.