Mathematischer Korrespondenz-zirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Beispiellösungen zu Blatt 38

Aufgabe 1

In einem Bioreaktor liegt ein einsames Bakterium. Nach einer Sekunde hat es sich in zwei Bakterien geteilt. Nach jeder weiteren Sekunde teilt sich genau eines der vorhandenen Bakterien in zwei Bakterien. Irgendwann befinden sich genau 172 801 Bakterien im Reaktor. Zeige, dass eines von ihnen mindestens einen Tag alt ist.

Lösung:

Die folgende Lösung stammt von der Teilnehmerin Julia Brandes:

Jede Sekunde erhöht sich die Zahl der Bakterien um 1, nach 172800 Sekunden sind also genau 172801 Bakterien im Reaktor. Ein Tag hat $24 \cdot 60 \cdot 60 = 86400$ Sekunden; 172800 Sekunden sind also genau zwei Tage. Nach einem Tag enthält der Reaktor 86401 Bakterien, von denen sich aber innerhalb des nächsten Tages höchstens 86400 teilen können. Folglich ist danach mindestens ein Bakterium mindestens einen Tag alt.

Aufgabe 2

Wenn man vor eine zweistellige Zahl ihr Doppeltes schreibt, so ergibt sich die Dezimaldarstellung einer vier- oder fünfstelligen Zahl. Solche Zahlen sind zum Beispiel 26 13 bzw. 148 74. Welche der auf diese Weise gebildeten Zahlen sind durch 29 teilbar?
Welche der Zahlen, die man auf analoge Weise aus dreistelligen Zahlen erhält, sind durch 29 teilbar?

Lösung:

Sei n eine zweistellige Zahl. Wenn man vor n ihr Doppeltes schreibt, ergibt sich die Dezimaldarstellung der Zahl $m = 2n \cdot 100 + n$. Nun gilt $m = 2n \cdot 100 + n = 201 \cdot n$. Da $201 = 3 \cdot 67$ teilerfremd zu 29 ist, ist m genau dann durch 29 teilbar, wenn n durch 29 teilbar ist. Damit ergeben sich genau folgende drei Möglichkeiten für m: 5829, 11658, 17487.

Ist n nun eine dreistellige Zahl, so ergibt sich die Zahl, die man erhält, wenn man vor n ihr Doppeltes schreibt, als $m = 2n \cdot 1000 + n = 2001 \cdot n$. Es ist aber $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$. Also sind alle so gebildeten Zahlen m durch 29 teilbar.

Aufgabe 3

An drei Ecken eines quadratischen Rasenstückes der Seitenlänge 10 m ist je ein Schaf an einer 10 m langen Leine angebunden. Die Schafe weiden den Rasen ab, wobei Flächenstücke, die von mehreren Schafen erreichbar sind,

von diesen auch jeweils zu gleichen Teilen abgegrast werden.
Welchen Anteil des Rasens frisst jedes der Schafe?

Lösung:

Sei $a = 10\,\mathrm{m}$ die Seitenlänge des Rasenquadrates. Die Schafe seien mit X, Y, Z bezeichnet und der Rasen werde durch die jeweiligen Weidegebiete (und einen zusätzlich eingezeichneten Viertelkreis) in Teilgebiete mit den Flächeninhalten A, B und C unterteilt (siehe Abbildung 1).

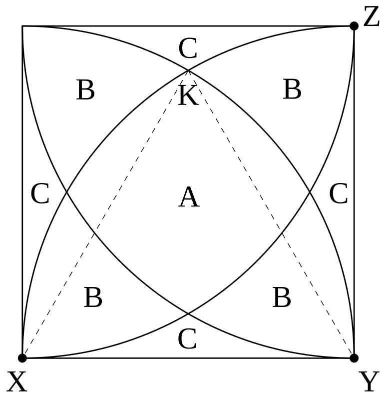

Abbildung 1: Die drei Schafe

Dann weiden die Schafe X und Z jeweils die Fläche der Größe A zu einem Drittel, ein Stück der Größe B (das bei Schaf Y) ebenfalls zu einem Drittel, zwei Stücke der Größe B zur Hälfte, ein Stück der Größe C zur Hälfte und eines der Größe C vollständig ab. Dies entspricht also einem Rasenanteil von

$$\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + 2 \cdot \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C + C = \frac{1}{3}A + \frac{4}{3}B + \frac{3}{2}C.$$

Genauso sieht man, dass Schaf Y einen Anteil von

$$\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + 2 \cdot \frac{1}{2}B + 2 \cdot \frac{1}{2}C = \frac{1}{3}A + \frac{4}{3}B + C$$

erhält. Wir wissen nun zunächst, dass

$$A + 4B + 4C = a^2 \tag{1}$$

gilt, denn alle Flächen zusammen ergeben den gesamten Rasen. Außerdem ist die Fläche jedes der auftretenden Viertelkreise gerade

$$A + 3B + 2C = \frac{\pi}{4}a^2. \tag{2}$$

Schließlich kann man die Fläche mit den Ecken X, Y und K, die von zwei Kreisbögen und einer Quadratseite begrenzt wird, betrachten. Ihre Fläche ist gerade $A+2B+C$, und sie setzt sich zusammen aus dem gleichseitigen Dreieck XYK und zwei Kreisabschnitten, deren zugehörige Mittelpunktswinkel 60°

groß sind. Ersteres hat eine Fläche von $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ und letztere haben jeweils eine Fläche von $\frac{\pi}{6}a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ (die Fläche eines Sechstelkreises minus der Fläche eines gleichseitigen Dreiecks). Daher gilt:

$$A + 2B + C = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 2 \cdot \left(\frac{\pi}{6}a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right) = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)a^2. \tag{3}$$

Mit den drei Gleichungen (1) bis (3) kann man nun zunächst die Rasenflächen A, B und C berechnen. Die Differenz der ersten beiden Gleichungen ergibt

$$B + 2C \quad = \quad \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \cdot a^2.$$

Die Differenz von Gleichung (2) und Gleichung (3) ergibt hingegen

$$B + C \quad = \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{12}\right) \cdot a^2. \tag{4}$$

Zieht man nun die letzten beiden Gleichungen voneinander ab, so erhält man

$$C = \left(1 - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \cdot a^2.$$

Setzt man diesen Ausdruck für C in die Gleichung (4) ein, so ergibt sich für B:

$$B = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12} - 1\right) \cdot a^2.$$

Nun kann man noch Gleichung (1) benutzen, um A zu berechnen, und erhält

$$A = \left(1 + \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\right) \cdot a^2.$$

Diese Ausdrücke für A, B und C kann man jetzt in die Terme für die gesuchten Rasenanteile einsetzen und erhält:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}A + \frac{4}{3}B + \frac{3}{2}C \quad &= \quad \left(\frac{1}{3}\left(1 + \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\right) + \frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12} - 1\right) + \right. \\
&\qquad \left. \frac{3}{2}\left(1 - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right) \cdot a^2 \\
&= \quad \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{36} - \frac{\sqrt{3}}{24}\right) \cdot a^2. \\
\frac{1}{3}A + \frac{4}{3}B + C \quad &= \quad \left(\frac{1}{3}\left(1 + \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\right) + \frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12} - 1\right) + \right. \\
&\qquad \left. \left(1 - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right) \cdot a^2 \\
&= \quad \left(\frac{\pi}{18} + \frac{\sqrt{3}}{12}\right) \cdot a^2.
\end{aligned}$$

Also fressen die Schafe X und Z je einen Anteil von

$$\frac{1}{2} - \frac{\pi}{36} - \frac{\sqrt{3}}{24} \approx 0{,}3406 = 34{,}06\%$$

und Schaf Y muss sich mit einem Anteil von

$$\frac{\pi}{18} + \frac{\sqrt{3}}{12} \approx 0{,}3189 = 31{,}89\%$$

begnügen.

Aufgabe 4

Eine Kugel k mit Radius r rollt irgendwie auf einer festen Kugel K mit Radius R. Zu Beginn liegt der Südpol von k auf dem Nordpol von K.
Auf welchen Punkten von K kann der Nordpol von k unter diesen Voraussetzungen zu liegen kommen, wenn

a) $r = R$ gilt;

b) $r < R$ gilt.

Hinweis: Beim Abrollen dürfen die Kugeln im momentanen Berührpunkt nicht gegeneinander verdreht werden, bzw., in mathematisch exakter Sprechweise, die Drehachse von k ist zu jedem Zeitpunkt parallel zur Tangentialebene an die Kugel K im momentanen Berührpunkt.

Lösung:

a) Wenn $r = R$ ist, kann der Nordpol von k nur auf dem Südpol von K zu liegen kommen.

   Um dies einzusehen, denke man sich zu jedem Zeitpunkt eine Ebene E, die die beiden Kugeln in ihrem momentanten Berührpunkt berührt, die also tangential zu den beiden Kugeln ist. In Gedanken halten wir nun E fest, so dass beim Abrollen von k auf K beide Kugeln auf E rollen. Da die Kugeln gleich groß sind und E ständig im selben Punkt berühren, müssen sie bei diesem Abrollen aber die (bis auf Spiegelung an E) gleichen Bewegungen ausführen. Daher gilt auch: Liegt irgendwann der Nordpol von k auf E, so muss auch der Südpol von K auf E liegen. Das zeigt die Behauptung.

b) Sei nun $r < R$. In diesem Fall kann der Nordpol von k bei geeignetem Abrollen tatsächlich auf jedem Punkt der Oberfläche von K zu liegen kommen. Um dies zu beweisen, kann man folgende kleine Tatsache benutzen:

   Behauptung: Ist α eine reelle Zahl mit $0 < \alpha < 1$, dann kann man eine natürliche Zahl n so finden, dass

$$\frac{1}{4} \leq n \cdot \alpha - \lfloor n \cdot \alpha \rfloor \leq \frac{3}{4}$$

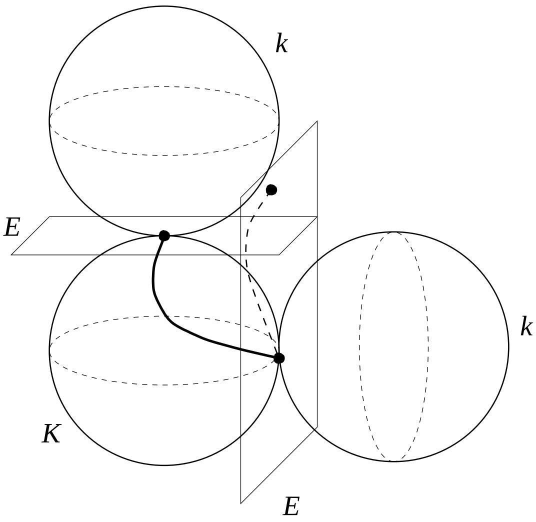

Abbildung 2: Gleich große Kugeln

gilt. Hierbei bezeichnet $\lfloor n \cdot \alpha \rfloor$ wie üblich die größte natürliche Zahl, die nicht größer als $n \cdot \alpha$ ist, so dass die Differenz $n \cdot \alpha - \lfloor n \cdot \alpha \rfloor$ gerade den Nachkommastellenanteil von $n \cdot \alpha$ wiedergibt.

Beweis der Behauptung: Wenn $\frac{1}{4} \leq \alpha \leq \frac{3}{4}$ ist, dann kann man einfach $n = 1$ nehmen.

Andernfalls gibt es zwei Fälle: Ist $\alpha < \frac{1}{4}$, dann wähle man die kleinste natürliche Zahl n, für die $n\alpha \geq \frac{1}{4}$ ist. Eine solche Zahl gibt es, weil die Folge der Zahlen $m \cdot \alpha$ unbeschränkt wächst.

Wir müssen zeigen, dass für dieses n auch $n\alpha \leq \frac{3}{4}$ gilt. Wäre aber $n\alpha > \frac{3}{4}$, so wäre wegen $\alpha < \frac{1}{4}$ auch $(n-1)\alpha > \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$ im Widerspruch zur Minimalität von n. Also ist $n\alpha < \frac{3}{4}$ und somit $n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor = n\alpha$ im geforderten Intervall.

Ist nun $\alpha > \frac{3}{4}$ so kann man $\alpha = 1 - \alpha'$ mit $0 < \alpha' < \frac{1}{4}$ schreiben. Wie eben findet man ein n so, dass $\frac{1}{4} \leq n\alpha' - \lfloor n\alpha' \rfloor \leq \frac{3}{4}$ gilt und deswegen ist dann auch $n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor = -n\alpha' - \lfloor -n\alpha' \rfloor = 1 - (n\alpha' - \lfloor n\alpha' \rfloor)^1$, was demnach auch im gesuchten Intervall liegt.

Wir nennen einen Punkt auf K *erreichbar*, wenn der Nordpol von k bei geeignetem Abrollen auf diesem Punkt zu liegen kommt. Nun zeigen wir Folgendes:

Ist ein Punkt P auf K erreichbar, so sind auch alle Punkte der (abgeschlossenen) Halbkugel von K mit Mittelpunkt P erreichbar. Das ist die Menge aller Punkte, deren Abstand (alle Abstände auf der Oberfläche von K gemessen) von P maximal $\frac{\pi R}{2}$ ist.

Sei nämlich Q ein Punkt dieser Halbkugel und sei d der Abstand von P zu Q. Dann kann man die Menge aller Punkte auf K betrachten, die

[1] Hier wurde die Beziehung $\lfloor -x \rfloor = -(1 + \lfloor x \rfloor)$ benutzt, die für positive, nicht ganzzahlige x gilt.

von P und Q den gleichen Abstand haben. Diese bilden einen Großkreis t. Der minimale Abstand eines Punktes auf t zu P ist dann $\frac{d}{2}$, der maximale Abstand ist genau $\pi R - \frac{d}{2}$ und alle Abstände zwischen diesen kommen tatsächlich als Abstände von Punkten auf t zu P vor.

Nun ist $0 < \frac{r}{R} < 1$ und entsprechend der Behauptung von oben findet man eine natürliche Zahl n so, dass $\frac{1}{4} \leq n\frac{r}{R} - \lfloor n\frac{r}{R} \rfloor \leq \frac{3}{4}$ ist. Setzt man $m = \lfloor n\frac{r}{R} \rfloor$ und multipliziert die letzte Ungleichungskette mit πR, so ergibt sich

$$\frac{\pi R}{4} \leq n\pi r - m\pi R \leq \frac{3\pi R}{4}.$$

Weil nun $d \leq \frac{\pi R}{2}$ ist, gilt dann sicherlich auch

$$\frac{d}{2} \leq n\pi r - m\pi R \leq \pi R - \frac{d}{2}.$$

Mithin findet man auf t einen Punkt T, der von P (und demnach auch

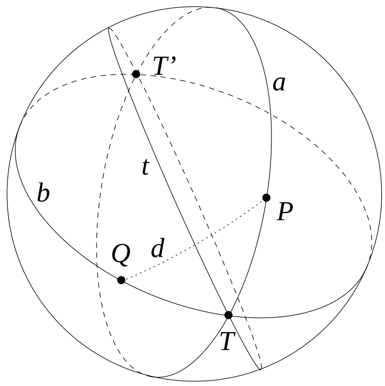

Abbildung 3: Abrollweg

von Q) genau den Abstand $n\pi r - m\pi R$ hat. Sei T' der T diametral gegenüberliegende Punkt auf K. Man betrachte nun den durch P und T bestimmten Großkreis a und den durch Q und T bestimmten Großkreis b.

Man führe dann ausgehend von der Ausgangsposition nachstehende Folge von Abrollvorgängen aus:

- Rolle so ab, dass der Nordpol von k auf P landet. Das geht nach Voraussetzung, denn P ist erreichbar.
- Rolle k entlang a ab, wobei in Richtung T gestartet wird. Rolle so lange, bis k genau n halbe Umdrehungen vollendet hat. Wegen $n\pi r = (n\pi R - m\pi R) + m\pi R$ kommt dabei der Nordpol (falls n gerade ist) bzw. der Südpol (falls n ungerade ist) von k auf T (falls m gerade ist) oder auf T' (falls m ungerade ist) zu liegen.
- Rolle nun entlang b in Richtung Q, wobei der Abrollvorgang aus dem vorigen Schritt an der durch t bestimmten Ebene gespiegelt

und in umgekehrter Richtung erfolgt. Danach liegt der Nordpol von k auf Q.

Dass man irgendeinen Punkt P auf K erreichen kann, ist klar – man rolle einfach entlang eines Meridians von K, bis der Nordpol von k die Kugel K berührt. Wie eben gezeigt, kann man dann auch die gesamte Halbkugel um P erreichen. Aber auch jeder Punkt dieser Halbkugel ist Mittelpunkt einer Halbkugel, die demnach vollständig erreichbar ist. Offenbar erreicht man somit dann die gesamte Kugel K.