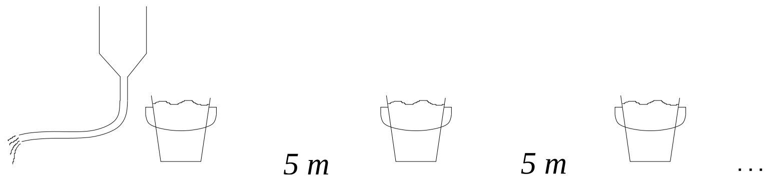
Mathematischer Korrespondenz-zirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Beispiellösungen zu Blatt 40

Aufgabe 1

Bei den Jugendfeuerwehrspielen in Fleckendorf gibt es für einen der Teilnehmer folgende Aufgabe zu bewältigen:
Eine Wasserleitung soll so lange wie möglich ununterbrochen mit Wasser versorgt werden. Die Leitung wird über einen Trichter befüllt, in den 5 Liter passen. Aus ihm läuft in 10 Sekunden genau 1 Liter Wasser in die Leitung. Als Nachschub stehen in einer langen Reihe, jeweils mit 5 m Abstand, gefüllte 5-Liter-Wassereimer bereit. Beim Holen der Eimer geht man erfahrungsgemäß genau einen Meter pro Sekunde (die Eimer sind ja schwer …) und man darf immer nur einen Eimer zur Zeit schleppen. Dafür geht das Befüllen *sehr* schnell. Zu Beginn steht man am Trichter und hat bereits einen 5-Liter-Eimer in der Hand, den man zum Start in den Trichter entleert.



a) Wie lange kann man das Wasser ununterbrochen fließen lassen?

b) Wie lange geht es, wenn der Einfülltrichter 10 Liter fasst?

c) Und wie ist es, wenn er 15 Liter fasst?

Lösung:

Zuerst nummerieren wir die Eimer so, dass der Eimer direkt beim Trichter die 0, der nächste die 1 usw. erhält.

a) Da der Trichter, wenn man kein Wasser nachfüllt, nach spätestens 50 s leer ist, kann man zwischen zwei Befüllungen nicht weiter als $\frac{1}{2} \cdot 5\,\mathrm{s} \cdot 1\,\mathrm{m/s} = 25\,\mathrm{m}$ und zurück laufen. Man erreicht also alle Eimer bis zum fünften; das Wasser läuft $6 \cdot 50\,\mathrm{s} = 300\,\mathrm{s} = 5\,\mathrm{min}$ lang.

b)+c) Nach dieser Argumentation kann man bei dem Zehn-Liter-Trichter nicht weiter als bis zum Eimer Nummer 10 kommen. Tatsächlich erreicht man aber bei allen Trichtern mit einem Fassungsvermögen ab neun Litern nur zehn Eimer einschließlich des Eimers an nullter Position: In der Zeit, die benötigt wird, um einen Eimer mit der Nummer $n > 5$ zu holen, läuft mehr Wasser durch den Trichter, als man nachfüllen kann, der „Verlust“ liegt bei $n - 5$ Litern. Umgekehrt kann man mit Eimern $n < 5$ einen „Vorrat“ anlegen, der jeweils $5 - n$ Liter beträgt. Insgesamt kann man also zehn Liter $(4+3+2+1)$ „Vorrat" anlegen, aber genauso viel verbraucht man auch beim Holen der Eimer 6 bis 9. In der Tat ist es möglich, diese auf theoretischem Wege gefundene Grenze von zehn genutzten Eimern zu erreichen, z. B. indem man immer (für $1 \leq n \leq 4$) nach dem $(5-n)$-ten Eimer den $(5+n)$-ten Eimer holt. Das Wasser läuft dann also $10 \cdot 50\,\mathrm{s} = 500\,\mathrm{s} = 8\,\mathrm{min}\ 20\,\mathrm{s}$ lang.

Aufgabe 2

Drei Mathematiker unterhalten sich:

Thomas sagt: „Ist 32 nicht eine *schöne* Zahl? Berechnet man die dritte Potenz dieser Zahl, also $32^3 = 32768$, so sieht man, dass das Ergebnis ebenfalls mit 32 beginnt."

Ulrich sagt: „Mal was anderes: Ich vermute, dass die Dezimaldarstellung jeder der Zahlen $\sqrt[k]{10}$ mit $k \geq 2$ unendlich viele Neunen enthält!"

Benno sagt: „Wenn Ulrich mit seiner Vermutung Recht hat, dann gibt es unendlich viele schöne Zahlen, die nicht durch 10 teilbar sind, und ich kann euch zeigen, wie man beliebig große schöne Zahlen berechnen kann!"

a) Zeige, dass Benno die Wahrheit sagt!

b) Auch für höhere Exponenten gibt es *schöne* Zahlen, denn zum Beispiel ist

$$46416^4 = 4641633499322843136 \quad \text{und}$$

$$14678^7 = 14678043942752567843726128371 2.$$

Zeige: Wenn Ulrich Recht hat, dann gibt es zumindest für jeden der Exponenten $3, 4, 5, \ldots, 10$ unendlich viele schöne Zahlen, die nicht durch 10 teilbar sind!

Lösung:

Wir zeigen gleich Aufgabenteil b), da aus diesem Bennos Aussage folgt. Hierzu geben wir eine explizite Vorschrift an, wie man schöne, nicht auf Null endende Zahlen für einen Exponenten k mit $3 \leq k \leq 10$ konstruieren kann. Sei also ein solches k gegeben. Betrachte die Zahl $x = \sqrt[k-1]{10}$. Wenn Ulrichs Aussage stimmt, findet man in der Dezimaldarstellung von x unendlich viele Neunen. Anders formuliert bedeutet das, dass in der Dezimalzahl $10^n \cdot x$ für unendlich viele n die Ziffer 9 direkt vor dem Komma steht. Das heißt aber, dass

$$10 \cdot a - 1 < 10^n \cdot x < 10 \cdot a$$

für eine n-stellige natürliche Zahl a gilt. Als illustratives Beispiel für das Bisherige betrachte man $k = 7$, also $x = \sqrt[6]{10} = 1{,}467799\ldots$ Hier gilt dann

$$10 \cdot 14678 - 1 < 10^5 \cdot x < 10 \cdot 14678,$$

also $a = 14678$.
Wir behaupten nun, dass unter den unendlich vielen so konstruierten Zahlen a unendlich viele schöne Zahlen zu finden sind.
Es gilt ja zum einen sicher

$$a^k = a \cdot a^{k-1} > a \cdot \left(10^{n-1} \cdot x\right)^{k-1} = a \cdot 10^{(n-1)(k-1)+1}.$$

Andererseits folgt mit dem binomischen Lehrsatz:

$$\begin{aligned}
a^k &= a \cdot a^{k-1} \\
&< a \cdot ((10^n \cdot x + 1)/10)^{k-1} \\
&= a \cdot \left(10^{n-1} \cdot x + 1/10\right)^{k-1} \\
&= a \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \cdot 10^{(k-1-i)(n-1)} \cdot 10^{(k-1-i)/(k-1)} \cdot 10^{-i}
\end{aligned}$$

Nun trennen wir den ersten Summanden dieser Summe ab und benutzen $k \leq 10$, also sicher auch $\binom{k-1}{i} \leq 9^i$ für $0 \leq i \leq k-1$, für den Rest der Summe:

$$\begin{aligned}
a^k &< a \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \cdot 10^{(k-1-i)(n-1)} \cdot 10^{(k-1-i)/(k-1)} \cdot 10^{-i} \\
&= a \cdot 10^{(n-1)(k-1)+1} \\
&\quad + a \cdot \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k-1}{i} \cdot 10^{(k-1-i)(n-1)} \cdot 10^{(k-1-i)/(k-1)} \cdot 10^{-i} \\
&< a \cdot 10^{(n-1)(k-1)+1} \\
&\quad + (x \cdot 10^{n-1} + 1/10) \cdot \sum_{i=1}^{k-1} 9^i \cdot 10^{(k-1-i)(n-1)} \cdot 10^{(k-1-i)/(k-1)} \cdot 10^{-i} \\
&= a \cdot 10^{(n-1)(k-1)+1} + \sum_{i=1}^{k-1} 0{,}9^i \cdot 10^{(k-i)(n-1)+(k-i)/(k-1)} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k-1} 0{,}9^i \cdot 10^{(k-1-i)(n-1)-i/(k-1)}
\end{aligned}$$

Wir behaupten nun, dass

$$\sum_{i=1}^{k-1} 0{,}9^i \cdot 10^{(k-i)(n-1)+(k-i)/(k-1)} + \sum_{i=1}^{k-1} 0{,}9^i \cdot 10^{(k-1-i)(n-1)-i/(k-1)} < 10^{(n-1)(k-1)+1}$$

für genügend große n gilt. Um das einzusehen, dividieren wir auf beiden Seiten durch $10^{(n-1)(k-1)+1}$ und erhalten dann äquivalent

$$\sum_{i=1}^{k-1} 0{,}9^i \cdot 10^{-(i-1)(n-1)-(i-1)/(k-1)} + \sum_{i=1}^{k-1} 0{,}9^i \cdot 10^{-i(n-1)-i/(k-1)-1} < 1.$$

Für festes k geht die linke Seite im Limes $n \to \infty$ gegen 0,9 (es bleibt nur der erste Summand der ersten Summe übrig, alle übrigen werden mit wachsendem n beliebig klein, weil durch immer höhere Zehnerpotenzen dividiert wird), was kleiner als 1 ist. Also ist für genügend große n auch

$$a^k < a \cdot 10^{(n-1)(k-1)+1} + 10^{(n-1)(k-1)+1} = (a+1) \cdot 10^{(n-1)(k-1)+1}.$$

Demnach beginnt die Dezimaldarstellung von a^k für genügend große n mit den Ziffern von a und somit ist a eine schöne Zahl. Da nun aber unendlich viele n existieren, für die man geeignete a erhält, gibt es auch unendlich viele genügend große n. Somit kann man auf die angegebene Weise unendlich viele schöne Zahlen a konstruieren. Ein solches a endet dabei genau dann auf 0, wenn in x an entsprechender Stelle zwei Neunen aufeinander folgen. Es kann aber nicht passieren, dass irgendwann nur noch Neunen in der Dezimaldarstellung von x stehen, denn dann wäre $x = \sqrt[k-1]{10}$ rational, was es bekanntlich nicht ist. Also gibt es unendlich viele passende Stellen in der Dezimaldarstellung von x, an denen vor einer Neun keine zweite steht, so dass das daraus berechnete a nicht auf Null endet. Das war zu zeigen.

Das erste Beispiel ist übrigens nicht aus $\sqrt[3]{10}$, sondern nach derselben Idee aus $\sqrt[3]{100}$ entstanden. $\sqrt[3]{10}$ hat am Anfang keine genügend hohen Ziffern, das erste daraus sich ergebende Bespiel ist siebenstellig.

Aufgabe 3

Ausgehend von einem beliebigen positiven Bruch $\frac{a}{b}$ bildet Stephan den Bruch $\frac{a+7b}{a+b}$ und wiederholt diese Prozedur einige Male. Überrascht stellt er fest, dass sich sehr bald der Wert des Bruches kaum mehr ändert!

a) Welchem Wert nähern sich die Brüche bei wiederholter Ausführung der Prozedur? (Anders gesagt: Gegen welchen Wert konvergiert die Folge der Brüche?)

b) Wie ist die Antwort, wenn man in der Prozedur die Zahl „7“ durch irgendeine andere nichtnegative Zahl n ersetzt?

c) Was geschieht für negative n?

Lösung:

a) Zum Test beginnen wir mit dem Bruch $\frac{2}{3}$. Dann ergeben sich schrittweise folgende Brüche: $\frac{23}{5}, \frac{58}{28}, \frac{254}{86}, \frac{856}{340}, \frac{3236}{1196}, \frac{11608}{4432}, \frac{42632}{16040}, \frac{154912}{58672}, \frac{565616}{213584}, \dots,$ bzw. in Dezimalbruchschreibweise $0{,}6666\ldots$, $4{,}6$, $2{,}0714\ldots$, $2{,}9534\ldots$, $2{,}5176\ldots$, $2{,}7056\ldots$, $2{,}6191\ldots$, $2{,}6578\ldots$, $2{,}6403\ldots$, $2{,}6482\ldots$ usw.

Die Werte scheinen sich also einer Zahl bei etwa 2,64 zu nähern. Nur welcher Zahl ganz genau?

Nehmen wir einmal an (und das dürfen wir entsprechend der Aufgabenstellung), dass sich die Folge der Brüche der Zahl x beliebig nähert, also gegen x konvergiert. Dann ist also $x \approx \frac{a}{b}$ für jedes Glied $\frac{a}{b}$ der Folge, welches weit hinten in der Folge steht. Aber auch das nächste Glied, nämlich $\frac{a+7b}{a+b}$, ist dann nahe an x. Somit muss zwangsläufig $\frac{a}{b} \approx \frac{a+7b}{a+b}$ sein. Da das „nahe" in der Tat beliebig nahe sein kann, gilt im Grenzwert tatsächlich

$$\frac{a}{b} = \frac{a+7b}{a+b} = x.$$

Umgeformt bedeutet dies aber $a^2 + ab = ab + 7b^2$ bzw. $a^2 = 7b^2$. Demnach ist $x = \frac{a}{b} = \sqrt{7} \approx 2{,}6458$.

Das ist also der gesuchte Wert.

Diese etwas heuristische Herleitung kann man mit Mitteln der Analysis auch mathematisch exakt aufschreiben: Nennt man die Folgenglieder $x_n = \frac{a_n}{b_n}$ und geht man davon aus, dass die Folge (x_n) gegen x konvergiert, so gilt

$$\begin{aligned} x &= \lim_{n\to\infty} x_n \\ &= \lim_{n\to\infty} x_{n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + 7b_n}{a_n + b_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a_n}{b_n} + 7}{\frac{a_n}{b_n} + 1} \\ &= \frac{\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} + 7}{\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} + 1} \\ &= \frac{x+7}{x+1}. \end{aligned}$$

Also gilt $x = \frac{x+7}{x+1}$, was umgeformt $x = \pm\sqrt{7}$ ergibt. Da offenbar alle Folgenglieder positiv sind, kommt nur $x = \sqrt{7}$ in Frage.

b) Es ist nicht schwer zu sehen, dass die Herleitung in Teil a) für jede nicht negative ganze (oder auch reelle) Zahl n als Ergebnis $\sqrt{n}$ liefert. Man ersetze im Text oben einfach jede auftretende 7 durch n.

c) Für negative n nähern sich die Brüche keiner Zahl. Die Folge divergiert also. Dies sieht man am schnellsten so ein:

Angenommen, die Folge würde auch für ein negatives n gegen eine Zahl x konvergieren. Dann würde dieselbe Herleitung wie oben zeigen, dass $x^2 = n$ gelten müsste. Das ist aber für negative n in reellen Zahlen nicht lösbar.

Als Beispiel betrachtet man die Folge für $n = -1$ mit dem Startwert $\frac{2}{3}$. Hier beginnt sie mit den Gliedern $\frac{2}{3}, \frac{-1}{5}, \frac{-6}{4}, \frac{-10}{-2}, \frac{-8}{-12}, \frac{4}{-20}, \frac{24}{-16}, \frac{40}{8}, \frac{32}{48}, \ldots$

Die Folge ist also periodisch mit Periode $\frac{2}{3}, -\frac{1}{5}, -\frac{3}{2}, 5$. Auch für $n = -3$ ist sie periodisch (unabhängig vom Anfangsglied). Für alle anderen negativen n ist sie nicht periodisch, sondern wechselt unendlich oft von beliebig großen zu beliebig kleinen Werten, ohne sich dabei je zu wiederholen.

Bemerkung 1: Es ist unerheblich, ob die Brüche während der Bildung der Folge gekürzt sind oder nicht, da die Rekursionsvorschrift in Zähler und Nenner linear ist. Verwendet man zum Beispiel statt $\frac{a}{b}$ den Bruch $\frac{ma}{mb}$, so ergibt sich statt $\frac{a+nb}{a+b}$ der Bruch $\frac{ma+nmb}{ma+mb} = \frac{a+nb}{a+b}$.

Bemerkung 2 (für Leser, die mit etwas linearer Algebra und den komplexen Zahlen vertraut sind): Betrachtet man zu jedem Bruch $\frac{a_k}{b_k}$ den Vektor $v_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$ und die Matrix

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

so kann man die Rekursion auch in Matrizenschreibweise wie folgt notieren:

$$v_{k+1} = M_n v_k.$$

Nun ist $M_n = A \begin{pmatrix} 1+\sqrt{n} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{n} \end{pmatrix} A^{-1}$ mit $A = \begin{pmatrix} \sqrt{n} & -\sqrt{n} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $A^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{n} \\ -1 & \sqrt{n} \end{pmatrix}$, weswegen man v_k wie folgt berechnen kann:

$$v_k = M_n^k v_0 = A \begin{pmatrix} (1+\sqrt{n})^k & 0 \\ 0 & (1-\sqrt{n})^k \end{pmatrix} A^{-1} v_0.$$

Setzt man als Startwerte $a_0 = 0$ und $b_0 = 1$, so erhält man

$$v_k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{n}((1+\sqrt{n})^k - (1-\sqrt{n})^k) \\ (1+\sqrt{n})^k + (1-\sqrt{n})^k \end{pmatrix}.$$

Wenn man dagegen als Startwerte $a_0 = 1$ und $b_0 = 0$ nimmt (das darf man dann vorläufig nur in der Vektorschreibweise deuten(!)), so erhält man

$$v_k = \frac{1}{2\sqrt{n}} \begin{pmatrix} \sqrt{n}((1+\sqrt{n})^k + (1-\sqrt{n})^k) \\ (1+\sqrt{n})^k - (1-\sqrt{n})^k \end{pmatrix}.$$

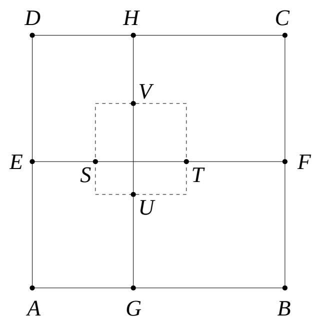
Durch Linearkombination erhält man für beliebige Startwerte $a_0 > 0$ und $b_0 > 0$ die Folge der Brüche

$$\begin{aligned}
\frac{a_k}{b_k} &= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{n}\left(b_0((1+\sqrt{n})^k - (1-\sqrt{n})^k) + \frac{1}{\sqrt{n}}a_0((1+\sqrt{n})^k + (1-\sqrt{n})^k)\right)}{\frac{1}{2}\left(b_0((1+\sqrt{n})^k + (1-\sqrt{n})^k) + \frac{1}{\sqrt{n}}a_0((1+\sqrt{n})^k - (1-\sqrt{n})^k)\right)} \\
&= \sqrt{n} \cdot \frac{1 - x^k + \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{a_0}{b_0}(1+x^k)}{1 + x^k + \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{a_0}{b_0}(1-x^k)} \\
&= \sqrt{n} \cdot \frac{\frac{1-x^k}{1+x^k} + \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{a_0}{b_0}}{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{a_0}{b_0}\frac{1-x^k}{1+x^k}} \\
&= \sqrt{n} \cdot \frac{y_k + \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{a_0}{b_0}}{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{a_0}{b_0} y_k},
\end{aligned}$$

wobei $x = \frac{1-\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$ und $y_k = \frac{1-x^k}{1+x^k}$ gesetzt wurde.
Ist nun $n > 0$, so ist x dem Betrage nach kleiner als 1 und daher konvergiert die Folge y_k gegen 1, weswegen die Folge der Brüche gegen $\sqrt{n}$ strebt (wie oben schon gesehen).
Ist $n < 0$ und erlaubt man das Rechnen mit komplexen Zahlen, so ist x eine solche komplexe Zahl, und zwar mit Betrag 1. Eine etwas detailliertere Analyse zeigt, dass x dann genau für $n = -1$ und $n = -3$ eine Einheitswurzel ist (die also $x^m = 1$ für ein $m > 0$ erfüllt). Daher wird die Folge in genau diesen Fällen periodisch. In den anderen Fällen wandert die Folge x^k den komplexen Einheitskreis entlang, ohne periodisch zu werden, und kommt dabei allen Werten auf dem Kreis unendlich oft beliebig nahe (die Folgenglieder liegen *dicht* auf dem Kreis). Hierbei variiert dann y_k auf der imaginären Achse und kommt dort jedem Wert beliebig nahe. Daraus kann man dann aber schnell ersehen, dass auch die Folge der Brüche dicht auf der reellen Achse verteilt ist und dort also jedem Wert (irgendwann einmal) beliebig nahe kommt, insbesondere werden die Brüche unendlich oft beliebig groß und beliebig klein.

Aufgabe 4

Konrad sagt zu Jonathan: „Hier habe ich ein Quadrat $ABCD$ mit Seitenlänge 1. In Gedanken habe ich darin achsenparallel ein zweites Quadrat versteckt. Du sollst herausfinden, wo dessen Mittelpunkt liegt.“
Jonathan erwidert: „Sag mir wenigstens, ob die Strecke EF (die die Seitenmitten von AD und BC verbindet) das Quadrat schneidet.“
Daraufhin Konrad: „Sie schneidet das Quadrat in zwei Punkten S und T, wobei S näher an E liegt als T. Ich sage dir zwar nicht, wo genau diese Schnittpunkte liegen, aber es gilt $\frac{|ES|}{|FT|} = 1/4$.“
Wo kann jetzt noch der Mittelpunkt des Quadrates liegen?



Jonathan fragt weiter: „Und wie ist es mit der Strecke GH (sie liegt parallel zur Seite AD und hat von ihr den Abstand 2/5)?“
Konrad antwortet: „Auch sie schneidet das kleine Quadrat, und zwar in zwei Punkten U (näher an G) und V, und der Bruch $\frac{|GU|}{|HV|}$ hat den Wert 2/3.“
Wie sieht die Situation mit dieser weiteren Information aus?

Lösung:

Bezeichnen wir zunächst die Seitenlänge des kleinen, versteckten Quadrates mit a und die Länge der Strecke ES mit b. Wegen $\frac{|ES|}{|FT|} = 1/4$ folgt daraus

$|FT| = 4b$, und außerdem gilt, weil die Strecke EF parallel zur Quadratseite AB ist, $b + a + 4b = 1$, also $b = (1-a)/5$.
Der einfacheren Beschreibung wegen legen wir unsere Figur so in ein kartesisches Koordinatensystem, dass A auf $(0,0)$ und C auf $(1,1)$ zu liegen kommt. Der Mittelpunkt M des kleinen Quadrats liege dann auf (x_M, y_M). Mit obiger Rechnung ergibt sich

$$x_M = b + \frac{a}{2} = \frac{1-a}{5} + \frac{a}{2} = \frac{1}{5} + \frac{3}{10}a\,. \tag{1}$$

Da $0 < a < 1$ gilt, folgt

$$\frac{1}{5} < x_M < \frac{1}{2}\,.$$

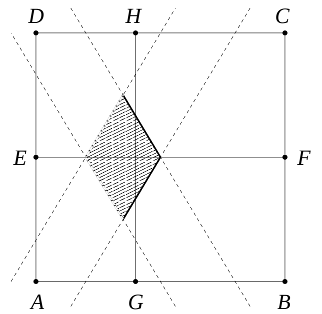
Weil das kleine Quadrat die obere und untere Seite des großen Quadrats nicht übertreten darf, gilt $\frac{a}{2} \le y_M \le 1 - \frac{a}{2}$. Zusammen mit (1), umgestellt nach a ($a = \frac{10}{3}x_M - \frac{2}{3}$) und eingesetzt, ergibt sich daraus

$$\frac{5}{3}x_M - \frac{1}{3} \le y_M \le -\frac{5}{3}x_M + \frac{4}{3}\,. \tag{2}$$

Nun wird das kleine Quadrat nach Voraussetzung ja von EF in genau zwei Punkten geschnitten, daher muss $y_M - \frac{a}{2} < \frac{1}{2}$ und $y_M + \frac{a}{2} > \frac{1}{2}$ gelten, also

$$-\frac{5}{3}x_M + \frac{5}{6} < y_M < \frac{5}{3}x_M + \frac{1}{6}\,. \tag{3}$$

Damit kann M noch genau in dem schraffierten Bereich der folgenden Figur liegen.



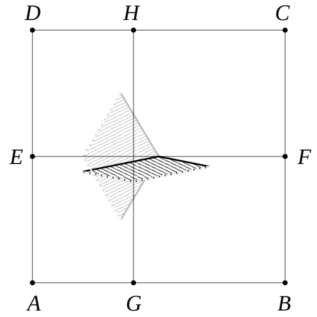
Nehmen wir jetzt die Informationen hinzu, die sich durch den Schnitt mit der Strecke GH ergeben. Analoge Überlegungen wie oben liefern die Beziehungen

$$y_M = \frac{2}{5} + \frac{1}{10}a\,, \tag{4}$$

$$\frac{2}{5} < y_M < \frac{1}{2}\,, \tag{5}$$

$$5y_M - 2 \le x_M \le -5y_M + 3 \quad \text{und} \quad -5y_M + \frac{12}{5} < x_M < 5y_M - \frac{8}{5} \tag{6}$$

und damit die folgende Figur (mit der vorher gefundenen in Hellgrau zum Vergleich).



Die Menge der noch möglichen Lagen von M ist aber bedeutend kleiner als der Schnitt dieser beiden Parallelogramme: Wir haben noch nicht bedacht, dass zu jedem Punkt in jedem Parallelogramm auch die Information vorhanden ist, wie groß a ist – und das muss natürlich zueinander passen.
Ganz leicht erkennen wir die Folgen daraus, indem wir a aus (1) und (4) eliminieren – dann erhalten wir die Geradengleichung

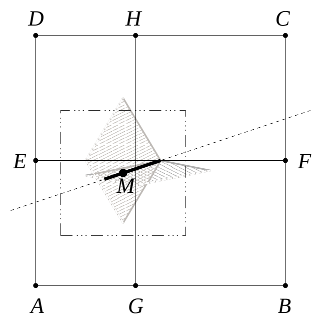
$$y_M = \frac{1}{3}x_M + \frac{1}{3}\,; \tag{7}$$

auf dieser Geraden muss M liegen.
Setzt man diese Beziehung in die oben gefundenen Doppelungleichungen (2), (3), (5) und (6) ein, so erhält man nacheinander

$$x_M \leq \frac{1}{2}\,,\; x_M \leq \frac{1}{2}\,, \frac{1}{4} < x_M\,,\; \frac{1}{8} < x_M\,,\; \frac{1}{5} < x_M\,,\; x_M < \frac{1}{2}\,,$$

$$x_M \leq \frac{1}{2}\,,\; x_M \leq \frac{1}{2}\,,\; \frac{11}{40} < x_M\,,\; -\frac{1}{10} < x_M\,.$$

Damit kann insgesamt M noch genau auf der Geraden (7) mit x-Werten im Intervall $\left]\frac{11}{40}, \frac{1}{2}\right[$ liegen. Die Seitenlänge des kleinen Quadrats, a, nimmt dann Werte zwischen $\frac{1}{4}$ und 1 an.



Die Strecke, auf der M liegen kann,
sowie ein mögliches M mit dem zugehörigen Quadrat.