
Beispiellösungen zu Blatt 45

Aufgabe 1

Der Stamm des Kastanienbaumes in unserem Garten hat einen Durchmesser von vier Metern. Er gabelt sich in drei Äste auf, von denen jeder den halben Durchmesser des Stammes hat, und auch jeder dieser drei Äste gabelt sich wieder in drei kleinere Äste mit halb so großem Durchmesser wie der vorherige Ast auf. Dies gilt ebenso für jeden Ast, dessen Durchmesser mindestens drei Millimeter beträgt; kleinere Zweige gabeln sich nicht weiter auf. An jedem Ast bzw. Zweig (auch an Ästen, die sich noch weiter verzweigen) hängen genau drei Blätter und genau drei Kastanien.

Wie viele Kastanien hängen an dem Baum?

Lösung:

Dem Aufgabentext entsprechend hat der Baum genau 3 Äste mit einem Durchmesser von 2 m, 3^2 Äste mit einem Durchmesser von 1 m, 3^3 Äste mit einem Durchmesser von $\frac{1}{2}$ m, ..., 3^k Äste mit einem Durchmesser von 2^{2-k} m, falls $2^{2-k+1} \geq 0,003$ m. Letztere Bedingung kann man umformen zu $2^k \leq 2666$, was wegen $2^{11} = 2048 < 2666 < 4096 = 2^{12}$ genau für alle k mit $1 \leq k \leq 11$ gilt.

Somit hat unser Baum insgesamt

$$3^1 + 3^2 + \dots + 3^{11} = 3 \cdot (1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{10}) = 3 \cdot \frac{3^{11} - 1}{3 - 1} = 265\,719$$

Äste. Da jeder Ast drei Kastanien trägt, hängen genau $3 \cdot 265\,719 = 797\,157$ Kastanien am Baum.

Aufgabe 2

Zeige, wie man ein gleichseitiges Dreieck in drei gleichschenklige Trapeze zerschneiden kann.

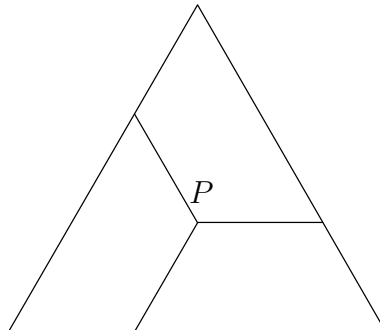
Kann man auch ein Quadrat in eine endliche Anzahl von gleichschenkligen Trapezen zerschneiden, wobei keines der Trapeze ein Rechteck ist?

Zusatzfrage: Welche Arten von Dreiecken kann man noch in solche Trapeze zerlegen?

Hinweis: Ein Trapez heißt gleichschenklige, wenn es bezüglich der Geraden, die durch die Mittelpunkte der beiden parallelen Seiten des Trapezes verläuft, spiegelsymmetrisch ist.

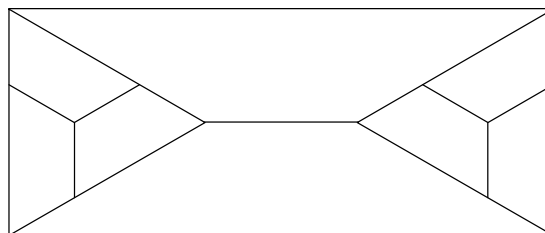
Lösung:

Ein gleichseitiges Dreieck kann man wie folgt in drei gleichschenklige Trapeze zerlegen:

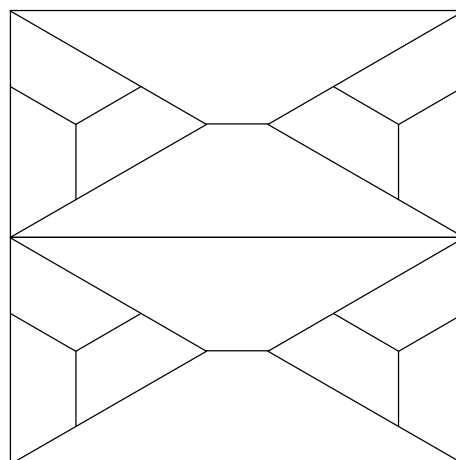


Die Wahl des Punktes P ist dabei sogar beliebig, er muss nur durch drei Strecken mit dem Rand verbunden werden, die zu den drei Seiten parallel sind, und zwar in der Anordnung wie gezeigt oder gespiegelt dazu. Vom Prinzip her ist dies dann auch schon die einzige Möglichkeit der Lösung. (Wenn man mehr als drei Trapeze zulässt, gibt es selbstverständlich noch mehr Lösungen.)

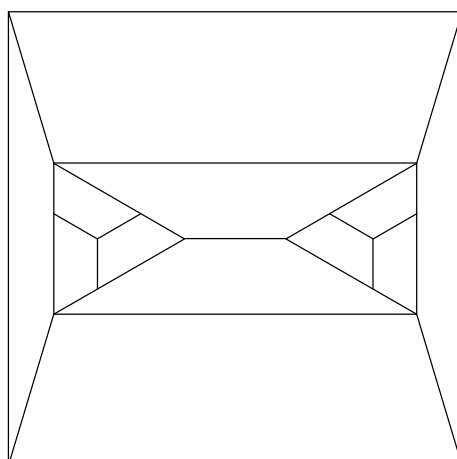
Mit Hilfe zweier solcher gleichseitiger Dreiecke und zweier weiterer Trapeze kann man dann ein längliches Rechteck unterteilen:



Leider geht das so noch nicht für ein Quadrat oder allgemeiner ein Rechteck, dessen Seiten zumindest annähernd gleich lang sind, weil das gleichseitige Dreieck dafür zu „breit“ ist – wenn man aber das Quadrat in zwei Rechtecke unterteilt, geht es gut:

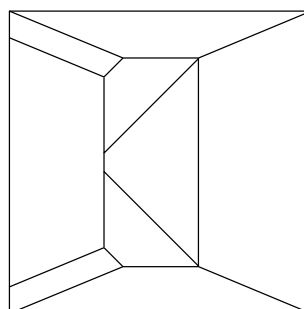
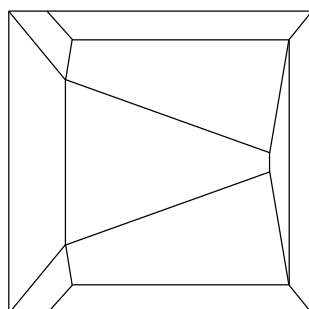


Man kann sich auch mit einem anderen Trick behelfen und braucht dann nur 12 statt 16 Trapeze:



Wie auch schon beim ersten Dreieck und bei fast allen im Folgenden gezeigten Unterteilungen gilt dabei: Im Detail kann die Unterteilung in gewissen Grenzen variiert werden – hier die Größe des inneren Rechtecks, die die Winkel der äußeren Trapeze festlegt.

Schließlich haben wir sogar noch Unterteilungen mit 10 bzw. 9 Trapezen gefunden:



Bei der linken Unterteilung können der Winkel der beiden von den linken Ecken ausgehenden Strecken zu der linken Seite (etwas weniger als 45°), die Länge dieser Strecken sowie eine weitere Länge noch variiert werden; bei der rechten Unterteilung sind die Winkel festgelegt, weil nur auf eine Art der gestreckte Winkel zustande kommt, bei den Seitenlängen kann man wiederum zwei Wahlen treffen.

Der aktuelle uns bekannte Rekord liegt damit bei 9 Trapezen. Wir können aber nicht sagen, ob es nicht noch besser geht.

Unter den Einsendungen war das Beste die oben gezeigte Figur mit 12 Trapezen. Der Anerkennungspreis geht an **Daniel Luckhardt** – Glückwunsch!

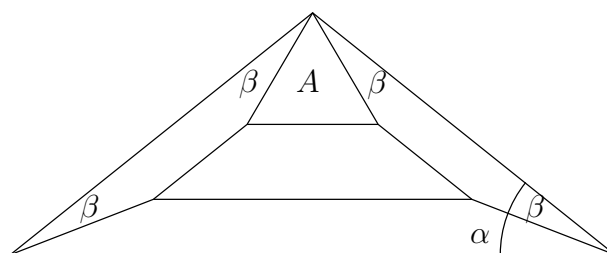
Die Antwort auf die Zusatzfrage lautet:

Man kann jedes beliebige Dreieck in endlich viele solche Trapeze zerlegen!

Die Konstruktion solcher Zerlegungen ist allerdings, abhängig von den Innenwinkeln in den Dreiecken, teilweise etwas aufwendig.

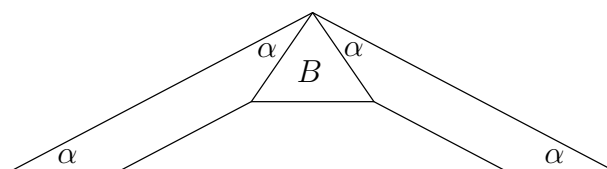
Wir beginnen mit der Konstruktion von Zerlegungen gleichschenkliger Dreiecke; für ein spezielles davon, nämlich das mit Basiswinkel 60° , ist uns bereits eine Lösung bekannt – darauf aufbauend konstruieren wir alle anderen Dreieckszerlegungen.

Gleichschenklige Dreiecke mit einem Basiswinkel α mit $30^\circ < \alpha < 60^\circ$ lassen sich auf folgende Weise zerlegen:



Dabei wird $\beta = \frac{180^\circ - 2\alpha - 60^\circ}{2} = 60^\circ - \alpha$ gewählt, und in der Tat ist dieser Wert kleiner als 30° , also kleiner als α . Das übrig bleibende Dreieck A ist dann nach Konstruktion gleichseitig, kann also weiter zerlegt werden.

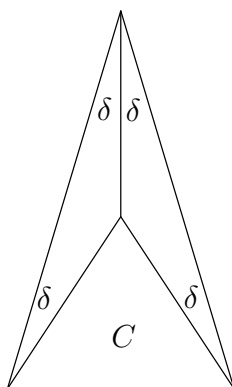
Gleichschenklige Dreiecke mit einem Basiswinkel $\alpha \leq 30^\circ$ kann man wie folgt zerlegen:



Das entstehende offensichtlich gleichschenklige Dreieck B hat an der Spitze einen Winkel von $180^\circ - 2\alpha - 2\alpha$, damit ist der Basiswinkel 2α , also doppelt so groß wie vorher. Solange 2α noch kleiner gleich 30° ist, wiederholen wir den Vorgang. Wird der Basiswinkel schließlich einmal größer als 30° , so muss er nach Vorgabe kleiner gleich 60° werden, und für solch ein gleichschenkliges Dreieck ist uns eine Zerlegung bekannt.

Für gleichschenklige Dreiecke mit einem Basiswinkel größer als 60° geht das Verfahren etwas ähnlich, nur dass wir den Winkel an der Spitze betrachten, der nun kleiner als 60° ist: Wir zerlegen das Dreieck so, dass ein neues gleichschenkliges Dreieck mit einem doppelt so großen Winkel an der Spitze entsteht. Irgendwann (nach endlich vielen Schritten) haben wir dann ein Dreieck mit einem Winkel an der Spitze im Intervall $[60^\circ, 120^\circ[$, folglich einem Basiswinkel im Intervall $]30^\circ, 60^\circ]$, für das wir ja bereits eine Zerlegung kennen.

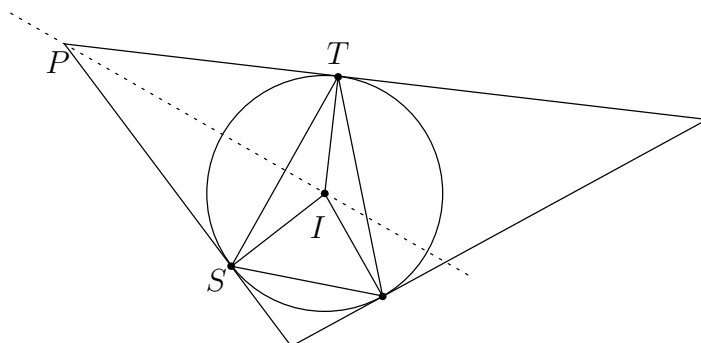
Eine Zerlegung eines solchen gleichschenkligen Dreiecks mit einem Winkel 2δ an der Spitze sieht so aus:



Die beiden gleichschenkligen Dreiecke mit Basiswinkel δ können wir bereits zerlegen, da natürlich $\delta \leq 30^\circ$ ist. Das neue gleichschenklige Dreieck C hat tatsächlich an der Spitze einen Winkel 4δ , wie man leicht nachrechnet.

Damit können wir nun jedes gleichschenklige Dreieck in eine endliche Anzahl an gleichschenkligen, nicht-rechtwinkligen Trapezen zerlegen.

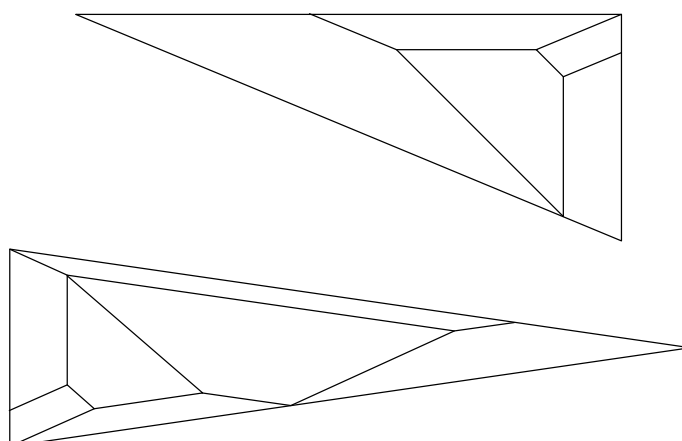
Damit ist auch der Fall eines beliebigen Dreiecks schnell erledigt, denn dieses kann man in jedem Fall in sechs gleichschenklige zerlegen: Man nehme den Inkreismittelpunkt I und die drei Radien auf die drei Seiten (die natürlich gleich lang sind). Ihre Fußpunkte verbinde man paarweise; so erhält man sechs Dreiecke. Dass die „inneren“ drei gleichschenklige sind, erkennt man sofort. Dass dies auch für die äußeren gilt, ist ebenfalls leicht einzusehen,



denn spiegelt man die Figur an der Geraden durch P und I , so gehen S und T als Berührungspunkte der beiden Tangenten von P an den Inkreis ineinander über, folglich muss auch PST ein gleichschenkliges Dreieck sein.

Anmerkungen: In vielen Fällen kann man die Zahl der benötigten Trapeze noch deutlich reduzieren. Wir haben auf eine solche Verbesserung verzichtet, weil sie die Übersichtlichkeit der – ja eher nur für theoretische Zwecke nützlichen – Lösung stören würde. Außerdem bleibt bei allen uns bekannten Verfahren (das sind zugegebenermaßen auch nicht allzu viele) eine Eigenschaft bestehen: Es gibt keine obere Schranke für die Zahl der benötigten Trapeze. Dass man spitze Winkel auch nur mit sehr spitzwinkligen Trapezen ausfüllen kann, könnte dafür sprechen, dass das allgemein gilt. Einen Beweis dafür oder für das Gegenteil können wir jedoch nicht liefern.

Das gezeigte Zerlegungsverfahren lässt vermuten, dass man in jedem Fall ein oder mehrere gleichseitige Dreiecke als ‚Kerne‘ von weiteren Hilfskonstruktionen benötigt. Diese Vermutung ist falsch, wie wir nach einigem Suchen entdeckt haben: Ein Dreieck mit Winkeln $22,5^\circ$, $67,5^\circ$ und 90° lässt sich auf andere Art in fünf Trapeze zerlegen – dabei sind alle auftretenden Winkel Vielfache von $22,5^\circ$ – und ein gleichschenkliges Dreieck mit Basiswinkel $81\frac{9}{11}^\circ$ in sieben Trapeze (die Winkel lassen sich sämtlich leicht berechnen, wenn man mit dem Winkel an der Spitze beginnt, bei den Seitenlängen hat man wiederum gewisse Freiheiten):



Insofern gibt es keinen Grund anzunehmen, dass es nicht eine größere Menge an Dreiecken gibt, die sich zum einen so zerlegen lassen, dass in der Zerlegungsstruktur kein anderes Dreieck auftaucht, und zum anderen mit verhältnismäßig wenigen Trapezen auskommen.

Aufgabe 3

Olaf ist immer noch mit seiner Zahlenfolge

$$1, 2, 2, 4, 8, 3, 2, 2, 4, 6, 4, \dots$$

beschäftigt. Zur Erinnerung: Beginnend mit den Ziffern 1 und 2 multipliziert Olaf immer zwei benachbarte Ziffern und schreibt das Ergebnis der Rechnung hinten ans Ende der Reihe.

Enttäuscht, dass seine Folge keine der Ziffern 0, 5, 7 und 9 enthält, fragt er sich nun, ob die Folge der Ziffern wenigstens irgendwann periodisch wird. Kannst du ihm diese Frage beantworten?

Hinweis: Eine Folge $a_1, a_2, a_3, \dots$ von Zahlen heißt periodisch, wenn es eine positive ganze Zahl k gibt, für die $a_{n+k} = a_n$ für alle $n \geq 1$ gilt.

Lösung:

Man muss Olaf wieder enttäuschen: Seine Folge ist auch nicht periodisch.

Angenommen, die Folge ist periodisch. Dann gibt es eine maximale Anzahl n aufeinander folgender Achten, oder aber die Folge besteht nur aus Achten. Letzteres ist offenbar nicht der Fall.

Zunächst setzen wir die Folge ein wenig fort:

1, 2, 2, 4, 8, 3, 2, 2, 4, 6, 4, 8, 2, 4, 2, 4, 3, 2, 1, 6, 8, 8, 8, 1, 2, ...

Wie man sieht, muss $n \geq 3$ sein. Angenommen, wir haben nun diese n aufeinander folgenden Achten irgendwo gefunden. Dann ergeben sich aus diesen an geeigneter Stelle später in der Folge $n - 1$ Produkte 64, also die Ziffernfolge 6, 4, 6, 4, ..., 6, 4, bestehend aus insgesamt $2n - 2$ Ziffern. Hieraus wiederum entstehen dann $2n - 3$ Produkte 24, also die Ziffernfolge 2, 4, 2, 4, ..., 2, 4 mit insgesamt $4n - 6$ Ziffern. Diese Ziffernfolge erzeugt schließlich später in der Folge $4n - 7$ Produkte 8, also $4n - 7$ aufeinander folgende Achten. Wegen $n \geq 3$ ist nun $4n - 7 \geq n + 1$, es gibt daher mindestens $n + 1$ aufeinander folgende Achten in der Folge im Widerspruch zur Maximalität von n . Also war die Annahme falsch und die Folge ist nicht periodisch.

Aufgabe 4

Das uns bereits bekannte, ansonsten aber unscheinbare und abgelegene Kloster Wan-Dan birgt viele weitere Geheimnisse. So besteht die Klosterbibliothek aus einem sehr langen Regal, auf dem die alten Schriften vor sehr langer Zeit in 999 Bänden durchnummeriert von links nach rechts in einer Reihe angeordnet standen. Seitdem durfte zu keinem Zeitpunkt mehr als eines der kostbaren Bücher aus dem Regal zur Ausleihe entnommen werden. Außerdem musste, den heiligen Regeln des Konfusius folgend, ein entnommenes Buch stets so an eine neue Stelle des Regals einsortiert werden, dass zwischen dem alten und neuen Standort eine gerade Anzahl anderer Bücher steht. Ein Nichtbeachten dieses Rituals resultiert – wie immer – in großem Unheil für das Kloster.

Eines morgens schreitet der Bibliothekar nun bei seinem Rundgang das Regal der 999 Bücher von rechts nach links ab und liest dabei still die Nummern der Bücher: „Band 1“, „Band 2“, „Band 3“, ..., bis er am Ende des Regals bei „Band 999“ ankommt.

Nach kurzem Nachdenken erschrickt er zutiefst und schlägt Alarm. Warum?

Lösung:

Der Bibliothekar hat erkannt, dass wenigstens einmal die heilige Regel des Konfusius gebrochen worden sein muss! Um das einzusehen, kann man folgende Überlegung machen: Sei a_i die Nummer des Buches an der i -ten Stelle in der Buchreihe zu einem bestimmten Zeitpunkt. Vor sehr langer Zeit war also einmal $a_1 = 1, a_2 = 2, \dots, a_{999} = 999$. Wenn für zwei beliebige Stellen i und j (mit $i < j$) in der Buchreihe $a_i > a_j$ gilt, dann nennen wir das eine *Inversion*. Die Buchreihe hat also genau so viele Inversionen, wie es Buchpaare gibt, bei denen dasjenige mit der größeren Nummer vor dem mit der kleineren Nummer steht. Eine (kurze) Buchreihe der Form 2, 4, 3, 1 hätte also genau 4 Inversionen.

Sei I die Anzahl der Inversionen in der Buchreihe zu einem bestimmten Zeitpunkt. Zu Beginn ist sicher $I = 0$.

Nimmt nun ein Bibliotheksbenutzer eines der Bücher, es sei A genannt, aus der Reihe und stellt es später an einer anderen Stelle wieder in die Reihe, so gilt für jedes Buch B , das zwischen alter und neuer Position des Buches A steht: Lag vor dem Herausnehmen eine Inversion zwischen A und B vor, dann ist das nach dem Wiederhineinstellen nicht mehr der Fall, und lag vor dem Herausnehmen keine Inversion vor, so hat man, nachdem Buch A wieder hineingestellt wurde, eine Inversion zu B vorliegen. Wenn also vor dem Herausnehmen von A mit genau x Büchern zwischen alter und neuer Position eine Inversion vorlag und mit genau y Büchern dies nicht der Fall war, so hat man nach dem Hineinstellen genau y Inversionen mit den betrachteten Büchern vorliegen. Die Anzahl I der Inversionen ändert sich also um $-x + y$. Wenn das Hineinstellen aber nun nach der Regel des Konfusius erfolgt, ist $x + y$ und damit auch $y - x$ gerade (denn $y - x = y + x - 2x$). Also ändert sich I um eine gerade Zahl!

Da I zu Beginn gerade war, muss es also immer gerade bleiben, wenn alle die Regeln befolgen.

Gilt nun aber, wie vom Bibliothekar beobachtet, $a_1 = 999, a_2 = 998, \dots, a_{999} = 1$, so steht jedes Buchpaar in Inversion, es gibt also genau so viele Inversionen, wie es Paare von Büchern gibt, und das sind bekanntlich genau $\frac{999 \cdot 998}{2} = 999 \cdot 499$.

Diese Zahl ist sicher ungerade und deswegen muss die Regel des Konfusius irgendwann einmal gebrochen worden sein.