Beispiellösungen zu Blatt 50

Aufgabe 1

Finde alle natürlichen Zahlen mit der Eigenschaft, dass die Differenz von zweitgrößtem und zweitkleinstem positiven Teiler dieser Zahl genau 1001 ist!

Lösung:

Antwort: Die einzige Zahl mit dieser Eigenschaft ist 2006.

Begründung: Sei n eine Zahl mit der geforderten Eigenschaft. Da die Differenz zwischen zweitgrößtem und zweitkleinstem positiven Teiler ungerade ist, muss genau einer der beiden Teiler gerade sein. Damit ist aber auch n gerade, da n einen geraden Teiler hat. Der zweitkleinste Teiler einer geraden Zahl ist stets 2. Somit muss der zweitgrößte Teiler $1001 + 2 = 1003$ sein. Es folgt also, dass $2 \cdot 1003 = 2006$ der einzig mögliche Wert für n ist, denn das Produkt von zweitgrößtem und zweitkleinstem Teiler ist immer n.
Tatsächlich ist der zweitkleinste Teiler von 2006 gerade 2, der zweitgrößte ist 1003 und es gilt $1003 - 2 = 1001$ wie gefordert.

Aufgabe 2

Der Lehrer hat den Schülern einer Klasse drei positive Zahlen vorgegeben, und als Hausaufgabe sollen diese sich zwei der Zahlen aussuchen, sie addieren und die Summe schließlich mit der dritten vorgegebenen Zahl multiplizieren. Beim Überprüfen der Hausaufgaben stellt der Lehrer fest, dass einige der Schüler als Ergebnis 50, andere 2000 und wieder andere 2006 erhalten haben, und alle diese Ergebnisse sind richtig.
Welche Zahlen hatte der Lehrer vorgegeben?

Lösung:

Die vom Lehrer genannten Zahlen seien a, b und c.
Da es genau drei Möglichkeiten gibt, zwei der drei Zahlen auszusuchen (um sie zu addieren), haben die Schüler alle möglichen Lösungen gefunden. Es ergeben sich folgende Gleichungen:

$$50 = (a+b)c = ac + bc \tag{1}$$
$$2000 = (a+c)b = ab + bc \tag{2}$$
$$2006 = (b+c)a = ab + ac\,. \tag{3}$$

(3) − (2) ergibt $6 = ac - bc$, woraus durch Addition von (1) folgt: $56 = 2ac$, also

$$\begin{aligned} ac &= 28 \quad \text{und weiter} \\ bc &= 50 - ac = 22\,, \\ ab &= 2000 - bc = 1978\,. \end{aligned}$$

Jeweils das Produkt von zwei dieser Gleichungen geteilt durch die dritte ergibt

$$\begin{aligned} c^2 &= \frac{bc \cdot ac}{ab} = \frac{22 \cdot 28}{1978} &\Leftrightarrow c = \sqrt{\frac{11 \cdot 28}{989}}\,, \\ b^2 &= \frac{bc \cdot ab}{ac} = \frac{22 \cdot 1978}{28} &\Leftrightarrow b = \sqrt{\frac{11 \cdot 989}{7}}\,, \\ a^2 &= \frac{ac \cdot ab}{bc} = \frac{28 \cdot 1978}{22} &\Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{28 \cdot 989}{11}}\,. \end{aligned}$$

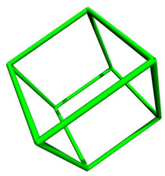
Hierbei haben wir benutzt, dass die Zahlen a, b und c nach Voraussetzung positiv sein sollen und daher jeweils nur die positive Wurzel in Frage kommt. Eine Probe bestätigt diese Ergebnisse:

$$\begin{aligned} ac + bc &= \sqrt{\frac{28 \cdot 989}{11} \cdot \frac{11 \cdot 28}{989}} + \sqrt{\frac{11 \cdot 989}{7} \cdot \frac{11 \cdot 28}{989}} = 28 + 22 = 50\,, \\ ab + bc &= \sqrt{\frac{28 \cdot 989}{11} \cdot \frac{11 \cdot 989}{7}} + \sqrt{\frac{11 \cdot 989}{7} \cdot \frac{11 \cdot 28}{989}} = 1978 + 22 = 2000\,, \\ ab + ac &= \sqrt{\frac{28 \cdot 989}{11} \cdot \frac{11 \cdot 989}{7}} + \sqrt{\frac{28 \cdot 989}{11} \cdot \frac{11 \cdot 28}{989}} = 1978 + 28 = 2006\,. \end{aligned}$$

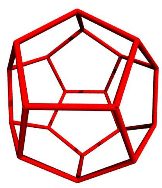
Aufgabe 3

Der nordamerikanische Würfelkäfer läuft auf seiner Suche nach Beute bekanntlich ständig auf einem Rundweg entlang einiger Kanten des großen grünen Würfelstrauches (siehe Abbildung), wobei der Rundweg keine Kante des Würfels doppelt enthält. Wie viele Kanten enthält ein solcher Weg höchstens?

Die Dodekaederspinne hat das gleiche Beutesuchverhalten wie der Würfelkäfer, nur lebt sie auf dem feuerroten Dodekaederbusch (siehe Abbildung), der nur in Südasien beheimatet ist. Biologen vermuten, dass sie einen größeren Anteil der Kanten des Busches ablaufen kann, als es dem Würfelkäfer auf seinem Strauch möglich ist. Mathematiker bezweifeln dies. Warum? Wie lang ist ein längster Rundweg auf dem Busch?



Würfelstrauch



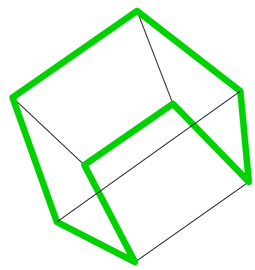
Dodekaederbusch

Zusatzfrage: Um weiteren Fragen der Biologen zuvorzukommen, beantworte dieselbe Frage für die kürzlich entdeckte Tetraederfliege, den Oktaederwurm und die sehr seltene Ikosaederameise!

Lösung:

Betrachten wir zuerst einen Rundweg des Würfelkäfers auf seinem Würfelstrauch:
Ein Würfel hat 8 Ecken und 12 Kanten. Da an jeder Ecke genau 3 Kanten zusammenlaufen, kann der Käfer auf seinem Rundweg höchstens zwei davon benutzen: Eine Kante braucht er als „Zufahrt“, eine als „Ausfahrt“. Auf

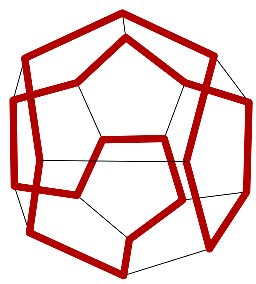
der dritten Kante kann der Käfer entweder nur zur Ecke hin- oder nur von der Ecke wegkrabbeln, diese Kante kann er also nicht in seinem Rundweg verwenden.



An jeder der 8 Ecken gibt es demnach eine Kante, die nicht zu dem Rundweg des Käfers gehört. Da jede Kante aber zwei verschiedene Ecken verbindet, ist es möglich, dass wir einige oder auch alle der Kanten doppelt zählen. Wir können also nur sagen, dass der Käfer auf seinem Rundweg mindestens $8 : 2 = 4$ Kanten nicht erreicht.
Der längste Rundweg auf dem Würfelstrauch enthält damit höchstens $12 - 4 = 8$ der 12 Kanten.

Nun bleibt noch zu zeigen, dass es tatsächlich einen Rundweg mit 8 Kanten auf dem Würfelstrauch gibt: Die Abbildung rechts oben zeigt eine Möglichkeit.

Kommen wir nun zu einem Rundweg der Dodekaederspinne auf dem Dodekaederbusch:
Das Dodekaeder hat, wie der griechische Name verrät, 12 Flächen (Seiten), wobei die Flächen regelmäßige Fünfecke sind. Zählen wir für jede Fläche die Anzahl der Ecken, erhalten wir $12 \cdot 5 = 60$. Da in jeder Ecke aber genau drei Flächen zusammenstoßen, haben wir jede Ecke dreimal gezählt, ein Dodekaeder hat also genau $12 \cdot 5 : 3 = 20$ Ecken. Genauso können wir die Anzahl der Kanten berechnen. Jede Fläche hat 5 Kanten, jede Kante begrenzt zwei Flächen, ein Dodekaeder hat demnach $12 \cdot 5 : 2 = 30$ Kanten.



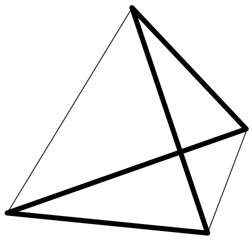
Genau wie auf dem Würfelstrauch kann auch ein Rundweg auf dem Dodeakederbusch in jeder Ecke nur zwei der drei vorhandenen Kanten nutzen.
Die Dodekaederspinne erreicht somit mindestens $20 : 2 = 10$ Kanten nicht, ihr Rundweg enthält höchstens $30 - 10 = 20$ Kanten.

Auch hier müssen wir noch beweisen, dass es einen Rundweg dieser maximal möglichen Länge tatsächlich gibt. Die Abbildung rechts zeigt ein Beispiel.

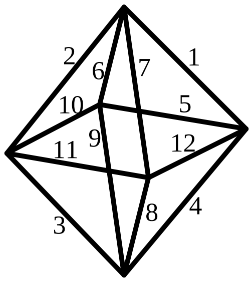
Es folgt, dass die Biologen Unrecht haben, was den Vergleich der Rundwege der beiden platonischen Krabbeltierchen angeht:
Der Würfelkäfer durchläuft auf seinem Rundweg einen Anteil von $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ aller Kanten auf dem Würfelstrauch und auch die Dodekaederspinne erreicht $\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$ aller Kanten auf dem Dodeakederbusch.

Zur Zusatzfrage – Die Tetraederfliege:
Ein Tetraeder besteht aus vier gleichseitigen Dreiecken, von denen in jeder Ecke drei zusammenstoßen. Daher enthält es $4 \cdot 3 : 3 = 4$ Ecken und $4 \cdot 3 : 2 = 6$ Kanten. Da auch hier in jeder Ecke drei Kanten zusammenlaufen, erhalten wir wie bei den vorherigen Krabbeltierchen, dass ein Rundweg mindestens $4 : 2 = 2$ der 6 Kanten nicht enthält. Oder umgekehrt ausgedrückt, dass ein

Rundweg höchstens $6 - 2 = 4$ Kanten, wiederum einen Anteil von $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, enthält.
Ein Rundweg mit 4 Kanten findet sich in der Abbildung.



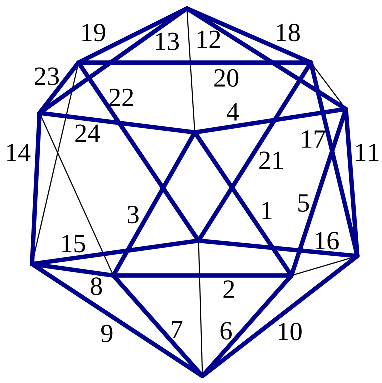
Tetraederfliege

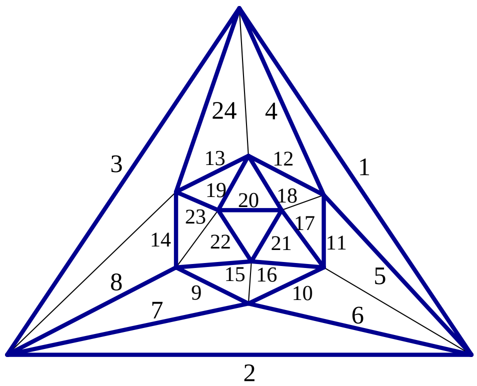


Oktaederwurm

Der Oktaederwurm:
Der Wurm kann auf seinem Rundweg auf dem Oktaedergewächs über alle Kanten kriechen.

Die Ikosaederameise:
Ein Ikosaeder besteht aus 20 gleichseitigen Dreiecken, von denen in jeder Ecke 5 zusammenstoßen. Daher besitzt es $20 \cdot 3 : 5 = 12$ Ecken und $20 \cdot 3 : 2 = 30$ Kanten. Hier laufen in jeder Ecke 5 Kanten zusammen.
Aber auch hier gehört auf einem Rundweg zu jeder „Zufahrt“ in die Ecke eine „Ausfahrt“. Fassen wir die Kanten an einer Ecke zu disjunkten Paaren, jeweils aus Zu- und Ausfahrt bestehend, zusammen, so bleibt erneut eine Kante übrig, die nicht zu dem Rundweg gehören kann. Es bleiben also mindestens $12 : 2 = 6$ Kanten ungenutzt, die Ikosaederameise erreicht auf ihrem Rundweg höchstens $30 - 6 = 24$ Kanten.
Ein Beispiel dafür ist:





(Die rechte Zeichnung stellt das Gleiche wie die linke dar, nur ist das Ikosaeder so flachgedrückt und verzerrt, dass sich keine Kanten überkreuzen.)

Zur Übersicht noch einmal die wichtigsten Daten:

Körper	Flächen	Kanten	Ecken	Rundweg	Anteil
Tetraeder	4	6	4	4	2/3
Würfel	6	12	8	8	2/3
Oktaeder	8	12	6	12	1
Dodekaeder	12	30	20	20	2/3
Ikosaeder	20	30	12	24	4/5

Aufgabe 4

Die beiden Cousinen Anna und Beate haben sich seit Jahren nicht gesehen und sind zur Geburtstagsfeier ihrer Großtante eingeladen. Dummerweise haben die beiden vor dem Fest keine Gelegenheit, sich wegen eines Geschenks abzusprechen. Jede von ihnen weiß: Wenn sie ein Geschenk mitbringt, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Tante damit unzufrieden ist (und es infolgedessen am ganzen Abend bleibt), genau 50 Prozent. Sie muss allerdings auch nicht unbedingt ein Geschenk mitbringen; bekommt die Tante aber von beiden nichts, ist sie ebenso unzufrieden.
Beide Cousinen sind von Beruf Mathematikerinnen und haben einen Spielwürfel zur Hand. Zeige, dass die beiden bei geeigneter Strategie mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/3 ein zufriedenes Geburtstagsfest feiern können!

Lösung:

Sei a die Wahrscheinlichkeit, mit welcher Anna ein Geschenk mitbringt, und b die Wahrscheinlichkeit, dass Beate ihre Großtante beschenkt. Die Tante ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 Prozent zufrieden, falls Anna ein Geschenk mitbringt und Beate nicht und umgekehrt. Außerdem ist die Tante mit der Wahrscheinlichkeit von 25 Prozent zufrieden, falls sowohl Anna als auch Beate ein Geschenk mitbringen. Die Tante ist also mit der Wahrscheinlichkeit $Z(a,b) = \frac{1}{2}a(1-b) + \frac{1}{2}b(1-a) + \frac{1}{4}ab$ zufrieden. Da die Situation beider Cousinen vertauschbar ist, darf man davon ausgehen, dass in der bestmöglichen Strategie a und b gleich sind. Damit erhält man $Z(a,b) = Z(a) = a(1-a) + \frac{1}{4} \cdot a^2 = a - \frac{3}{4}a^2$. Nun ist

$$a - \frac{3}{4}a^2 = -\frac{3}{4}\left(a^2 - \frac{4}{3}a\right) = -\frac{3}{4}\left(\left(a - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}\right) = -\frac{3}{4}\left(a - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\,.$$

Da ein quadratischer Term niemals negativ werden kann, befindet sich das Maximum bei $a = \frac{2}{3}$ und hat den Wert $\frac{1}{3}$.

Wer mit der Infinitesimalrechnung vertraut ist, kann die Lösung natürlich auch in Form einer Extremwertaufgabe ermitteln:
Die beste Strategie maximiert Z, und es gilt $0 = Z'(a) = 1 - \frac{3}{2}a$ genau dann, wenn $a = \frac{2}{3}$ ist. Da $Z''(a) = -\frac{2}{3} < 0$ ist, handelt es sich hier wirklich um ein Maximum. Wegen $\frac{2}{3} \in [0,1]$ liegt das Maximum im Definitionsbereich, und weil außerdem $Z(0) = 0$ und $Z(1) = \frac{1}{4}$ gilt, gibt es keine Maxima auf dem Rand.
Wenn also beide Cousinen mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ ein Geschenk mitbringen, so ist die Tante mit einer Wahrscheinlichkeit von $Z(\frac{2}{3}) = \frac{2}{3} - \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{3}$ zufrieden.

Für die Cousinen bietet sich nun folgende Entscheidungsregel an: Anna und Beate würfeln jeweils mit ihrem Spielwürfel. Fällt eine 1, 2, 3 oder 4, so bringen sie ein Geschenk mit, denn dies entspricht genau der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$, sonst nicht.