
Beispiellösungen zu Blatt 54

Aufgabe 1

Welches ist die kleinste positive natürliche Zahl n mit der Eigenschaft, dass $45 \cdot n$ nur die Ziffern 0 und 7 enthält?

Lösung:

Eine Zahl ist genau dann durch 45 teilbar, wenn sie durch 5 und durch 9 teilbar ist. Da eine Zahl genau dann durch 5 teilbar ist, falls sie als letzte Ziffer eine 0 oder eine 5 aufweist, und nach Voraussetzung die Zahl $45 \cdot n$ nur die Ziffern 0 und 7 enthalten soll, ist die letzte Ziffer von $45 \cdot n$ eine 0. Außerdem ist eine Zahl genau dann durch 9 teilbar, falls sie eine durch 9 teilbare Quersumme hat. Die Anzahl der in $45 \cdot n$ vorkommenden Siebenen muss also ein Vielfaches von 9 sein. Die kleinste Zahl $45 \cdot n$, die die geforderten Eigenschaften aufweist, besteht somit aus 9 Siebenen und der 0 als letzter Ziffer, ist folglich 7777777770. Für das kleinste natürliche n ergibt sich damit der Wert $\frac{7777777770}{45} = 172839506$.

Aufgabe 2

Um die Dauer der Fußballweltmeisterschaft 2010 in Südafrika zu verkürzen, sollte einem Vorschlag zufolge unter den 32 teilnehmenden Teams der Weltmeister wie folgt bestimmt werden:

In jeder Runde werden die Mannschaften, die noch im Wettbewerb sind, zufällig in Paare aufgeteilt; sollte es eine ungerade Anzahl sein, muss eine Mannschaft in dieser Runde nicht spielen. Die entsprechenden Paare spielen ein Spiel gegeneinander, wobei es kein Unentschieden gibt. Sobald eine Mannschaft zweimal verloren hat, ist sie ausgeschieden. Der Vorschlag wurde aber verworfen, weil er angeblich zu keiner Verkürzung des Turniers im Vergleich zu den bei den bisher üblichen Regeln gespielten 64 Spielen führt. Stimmt das? Was ist die kleinste und was die größte mögliche Anzahl an auszutragenden Spielen?

Lösung:

Bei unserem neuen Turniermodus finden 63 oder 62 Spiele statt, je nachdem, ob der Weltmeister selbst auch einmal verloren hat oder nicht. Im Vergleich zu jetzt (um den Weltmeister zu bestimmen, braucht man genaugenommen auch bisher nur 63 Spiele, das 64. Spiel ist das um den dritten Platz) finden also genauso viele oder ein Spiel weniger statt, das Turnier wird demnach nicht länger.

Da es in jedem Spiel genau einen Verlierer gibt, können wir die Gesamtanzahl der Spiele ermitteln, indem wir zählen, wie oft jemand verloren hat.

Jede ausgeschiedene Mannschaft hat genau zweimal verloren, denn nach den Turnierregeln scheidet sie ja genau dann aus, wenn sie das zweite Mal verliert. Am Ende des Turniers ist noch genau eine Mannschaft „im Spiel“, und die restlichen 31 Mannschaften sind ausgeschieden. Letztere haben zusammen $31 \cdot 2 = 62$ Spiele verloren. Außerdem kann es sein, dass der Sieger selbst auch einmal verloren hat. Daher werden insgesamt 62 oder 63 Spiele ausgetragen.

Anmerkung: Die Anzahl der Spiele spricht also nicht gegen unseren neuen Turniermodus. Aber dadurch, dass vorher unbekannt ist, wie viele Mannschaften zu einem Zeitpunkt noch im Turnier sind und wie viele Runden gespielt werden müssen, wird die Organisation der Weltmeisterschaft erheblich erschwert.

Zum Beispiel könnten am zweiten Spieltag dieselben 16 Mannschaften verlieren, die schon am ersten Spieltag verloren haben, dann gibt es am dritten Spieltag nur noch $16 : 2 = 8$ Spiele; es könnten im anderen Extremfall aber auch alle Gewinner des ersten Spieltages am zweiten Spieltag verlieren, dann gibt es am dritten Spieltag noch einmal $32 : 2 = 16$ Spiele.

In diesem zweiten Fall hat nach dem zweiten Spieltag jede Mannschaft genau einmal verloren, folglich scheidet an allen folgenden Spieltagen der Verlierer des Spiels sofort aus. Es werden dann insgesamt sieben Runden gespielt (dritte Runde 16 Spiele, vierte Runde 8 Spiele, danach 4, 2 und 1 Spiel).

Auch ein Turnier mit zwölf Runden ist möglich. Ein Beispiel hierfür kann aus folgender Tabelle gelesen werden:

Runde	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Verbliebene Teams	32	32	16	16	9	7	5	4	3	2	2	2
Unbesiegte Teams	32	16	16	8	7	5	4	3	2	2	1	0

Die Tabelle wurde dabei spaltenweise aufgebaut. Sind in einer Runde noch n Mannschaften im Spiel, so werden in dieser Runde $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ Spiele gespielt, und in jedem Spiel verringert sich entweder die Anzahl der im Turnier verbliebenen Mannschaften oder die Anzahl der unbesiegten Mannschaften um genau eins. Somit gelangt man von einer Spalte zur nächsten, indem man beliebig (unter der Nebenbedingung, dass natürlich nur diejenigen Mannschaften aus dem Turnier ausscheiden können, die bis dato schon einmal verloren haben) die beiden Zahlen der Spalte um insgesamt $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ erniedrigt.

Wer mag, kann noch beweisen, dass die Anzahl der Spieltage tatsächlich minimal 7 und maximal 12 beträgt.

Aufgabe 3

In einem Dreieck mit Flächeninhalt 1 bilden sowohl die drei Seitenlängen als auch die Längen der drei Höhen eine arithmetische Zahlenfolge. Bestimme die Seitenlängen dieses Dreiecks!

Hinweis: Drei Zahlen a, b, c bilden eine arithmetische Zahlenfolge, wenn es eine reelle Zahl d so gibt, dass $a + d = b$ und $b + d = c$ gilt.

Lösung:

Seien mit a, b, c die Dreiecksseiten und mit h_a, h_b, h_c die entsprechenden Höhen im Dreieck bezeichnet. Nun gilt für den Flächeninhalt A des Dreiecks $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$ und damit

$$ah_a = bh_b = ch_c.$$

Ist b die zweitlängste Seite, so ist auch h_b die zweitgrößte Höhe im Dreieck. Nach Voraussetzung gibt es dann reelle Zahlen d, e so, dass $a+d = b, b+d = c$ und $h_c + e = h_b, h_b + e = h_a$ gelten. Setzen wir dies für a, h_a bzw. für c, h_c in die obige Gleichung ein und formen weiter um, erhalten wir

$$\begin{aligned} ah_a &= bh_b = ch_c \\ \iff (b-d)(h_b+e) &= bh_b = (b+d)(h_b-e) \\ \iff bh_b + be - dh_b - de &= bh_b = bh_b - be + dh_b - de \\ \iff be - dh_b = de \text{ und } -(be - dh_b) &= de \\ \implies de = 0 &\iff d = 0 \text{ oder } e = 0. \end{aligned}$$

Dann ist auch $be - dh_b = de = 0$. Falls $e = 0$ ist, folgt $dh_b = 0$ und damit $d = 0$, denn h_b ist als Dreieckshöhe echt positiv. In jedem Fall ist also $d = 0$ und es ergibt sich $a = b = c$. Das Dreieck ist somit gleichseitig.

Umgekehrt bilden in jedem gleichseitigen Dreieck sowohl die Seitenlängen als auch die Längen der Höhen eine arithmetische Zahlenfolge.

Nach dem Satz des Pythagoras gilt für die Höhe h in einem gleichseitigen Dreieck $h^2 = a^2 - (\frac{1}{2}a)^2$, also $h = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Mit der Anfangsbedingung $1 = A = \frac{1}{2}ah = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$ folgt nun $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Das gesuchte Dreieck ist somit gleichseitig mit Seitenlänge $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Aufgabe 4

Finde eine natürliche Zahl N so, dass jede der Zahlen $N, 2 \cdot N, 3 \cdot N, \dots, 2006 \cdot N$ eine durch 2006 teilbare Quersumme hat.

Gibt es auch eine natürliche Zahl N so, dass jedes Vielfache von N eine durch 2006 teilbare Quersumme hat?

Lösung:

Eine mögliche Lösung für den ersten Teil der Aufgabe ist die Zahl

$$N = 1000100010001 \dots 00010001,$$

die mit genau 2006 Einsen (und $2005 \cdot 3$ Nullen) geschrieben wird. Jedes der Vielfachen $k \cdot N$ mit $1 \leq k \leq 2006$ besteht dann aus 2006 hintereinander geschriebenen Zahlen k (mit eventuell führenden Nullen, um k „vierstellig“ zu machen). Die Quersumme einer solchen Zahl $k \cdot N$ ist dann das 2006fache der Quersumme von k , also insbesondere durch 2006 teilbar.

Obige Zahl N funktioniert im Allgemeinen nicht mehr für Vielfache über $9999 \cdot N$. Tatsächlich gibt es gar keine Zahl N so, dass alle ihre Vielfachen eine durch 2006 teilbare Quersumme haben. Um dies zu beweisen, nehmen wir das Gegenteil an: Angenommen, es gibt eine Zahl N so, dass jedes ihrer Vielfachen eine durch 2006 teilbare Quersumme hat. Angenommen, N hat n Ziffern. Dann kann man die beiden Vielfachen $A = (10^{n+1} - 1) \cdot N = 10^{n+1} \cdot N - N$ und $B = (10^{n+2} - 1) \cdot N = 10^{n+2} \cdot N - N$ von N betrachten. A besteht aus den Ziffern von N , gefolgt von einer Neun und dann gefolgt von den Ziffern der Zahl $10^n - N$. B hingegen besteht aus den Ziffern von N , gefolgt von zwei Neunen und dann ebenfalls gefolgt von den Ziffern der Zahl $10^n - N$.

Die Quersummen von A und B , die ja nach Annahme beide durch 2006 teilbar sind, unterscheiden sich also um genau 9 – ein Widerspruch.

Es gibt daher keine solche Zahl N .