

---

## Beispiellösungen zu Blatt 55

### Aufgabe 1

Karsten hat zehn Zahnräder, je eines mit 7, 13, 34, 103, 179, 234, 299, 303, 356 und 385 Zähnen. Er will sie so in eine Reihe legen (natürlich sollen dabei die Achsen geeignet gelagert werden, so dass sich die Räder um die Achsen drehen können), dass sie ineinandergreifen und dass bei einer Umdrehung des ersten Zahnrades das letzte möglichst viele Umdrehungen ausführt.

Wie muss er die Zahnräder dazu anordnen und wie viele Umdrehungen führt das letzte Rad dabei dann aus? Hat er mehr als eine Möglichkeit für die Anordnung der Zahnräder?

### Lösung:

Wir betrachten zunächst zwei ineinandergreifende Zahnräder mit  $m$  und  $n$  Zähnen: Führt das erste Rad eine volle Umdrehung aus, so macht das zweite Zahnrad  $\frac{m}{n}$  Umdrehungen. Nun schauen wir, was passiert, wenn noch weitere Zahnräder dazwischengeschaltet werden: Bei einer Umdrehung des ersten Zahnrades drehen sich alle weiteren Zahnräder um  $m$  Zähne weiter und das letzte Zahnrad führt also immer noch  $\frac{m}{n}$  Umdrehungen aus.

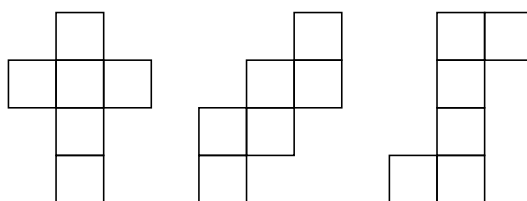
Die Anzahl der Umdrehungen des letzten Zahnrades in der Reihe mit zehn Zahnrädern soll nun maximal werden. Wie eben gezeigt, kommt es dabei nur auf die Anzahl der Zähne des ersten und des letzten Zahnrades an. Hat das erste Zahnrad wie oben  $m$  Zähne und das letzte Zahnrad  $n$  Zähne, macht das letzte Zahnrad  $\frac{m}{n}$  Umdrehungen. Die Anzahl wird also genau dann maximal, wenn  $m$  möglichst groß und  $n$  möglichst klein ist. Karsten muss also das Zahnrad mit 385 Zähnen zuerst und das mit 7 Zähnen zuletzt anordnen, und das letzte Zahnrad macht dann  $\frac{385}{7} = 55$  Umdrehungen. Die Reihenfolge der übrigen acht Zahnräder ist beliebig und Karsten hat insgesamt 8! verschiedene Möglichkeiten für eine Anordnung der Zahnräder, bei der das letzte Zahnrad möglichst viele Umdrehungen ausführt.

### Aufgabe 2

Alex und Ulrike wollen jeden der fünf platonischen Körper – Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder – aus Papier basteln. Dazu wollen sie ein Netz eines jeden Körpers auf Papier malen, dieses ausschneiden, falten und an den Kanten, wo dies nötig ist, zusammenkleben.

Bei welchem der Körper benötigen sie dabei die meisten Klebekanten, bei welchem die zweitmeisten usw.?

*Man beachte, dass es für das Malen der Körpernetze jeweils mehrere Möglichkeiten gibt, bei denen auch die Anzahl der Klebekanten unterschiedlich sein könnte. Für den Würfel gibt es zum Beispiel elf wesentlich verschiedene Netze, von denen drei wie folgt aussehen:*



**Lösung:**

Um die Anzahl der Klebekanten zu bestimmen, nimmt man die Anzahl aller Kanten des Polyeders und subtrahiert davon die Anzahl der Kanten, die nicht geklebt werden müssen. Diese erhält man durch folgende Überlegung:

Beim Erstellen der Körpernetze werden die zugrunde liegenden Vielecke in entsprechender Anzahl nebeneinandergemalt, wobei jedes weitere Vieleck an genau einer Kante an den bereits gezeichneten Teil des Körpernetzes angehängt wird. Sei mit  $f$  die Anzahl der Flächen und damit die Anzahl der Vielecke bezeichnet. Bei jeder der verschiedenen Möglichkeiten entstehen dann  $f - 1$  Zeichenkanten, die später nicht mehr geklebt werden müssen, unabhängig von der genauen Gestalt des Körpernetzes.

Sei mit  $k$  die Anzahl der Kanten des Polyeders bezeichnet. Dann ergibt sich die Anzahl der Klebekanten zu  $k - (f - 1) = k - f + 1$ .

Wer die Eulersche Polyederformel  $f - k + e = 2$  kennt, wobei mit  $e$  die Anzahl der Ecken bezeichnet sei, kann dieses Ergebnis noch vereinfachen: Es gibt  $k - f + 1 = e - 1$  Klebekanten.

|             |       | Tetraeder | Würfel | Oktaeder | Dodekaeder | Ikosaeder |
|-------------|-------|-----------|--------|----------|------------|-----------|
| Flächen     | $(f)$ | 4         | 6      | 8        | 12         | 20        |
| Kanten      | $(k)$ | 6         | 12     | 12       | 30         | 30        |
| Ecken       | $(e)$ | 4         | 8      | 6        | 20         | 12        |
| Klebekanten |       | 3         | 7      | 5        | 19         | 11        |

Die meisten Klebekanten benötigt also das Dodekaeder, gefolgt vom Ikosaeder, dem Würfel und dem Oktaeder. Die wenigsten Klebekanten hat das Tetraeder.

**Aufgabe 3**

Benno hat 20 quaderförmige Bauklötze, die jeweils ein Volumen von  $125 \text{ cm}^3$  haben. Bei jedem Bauklotz sind zwei gegenüberliegende Seitenflächen rot gefärbt, zwei andere gegenüberliegende blau und die letzten beiden (auch gegenüberliegenden) gelb. Benno baut nun nacheinander drei Türme: einen blau-gelben, indem er immer rote Flächen aufeinander legt, dann entsprechend einen blau-roten Turm und zuletzt einen gelb-roten.

Zeige, dass wenigstens einer der Türme mindestens einen Meter hoch ist.

Ist es auch immer so, dass einer der Türme höchstens einen Meter hoch ist?

*Hinweis: Die Bauklötze haben natürlich nicht unbedingt alle die gleiche Form.*

**Lösung:**

Seien  $r_1, g_1, b_1$  die drei Kantenlängen des ersten Quaders in Zentimetern, und zwar so, dass  $r_1$  der Abstand der beiden roten Flächen,  $g_1$  der Abstand der beiden gelben und  $b_1$  der Abstand der beiden blauen Flächen ist. Dann trägt dieser erste Quader zum blau-gelben Turm genau die Höhe  $r_1$  bei, im blau-roten Turm hat er die Höhe  $g_1$  und im gelb-roten die Höhe  $b_1$ .

Entsprechend bezeichnen wir die Kantenlängen der anderen 19 Quader mit  $r_2, g_2, b_2$  bis  $r_{20}, g_{20}, b_{20}$ . Die drei Türme sind dann

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + \dots + r_{20} \text{ cm} \\ g_1 + g_2 + \dots + g_{20} \text{ cm und} \\ b_1 + b_2 + \dots + b_{20} \text{ cm} \end{aligned}$$

hoch.

Angenommen, alle drei Türme wären echt kleiner als einen Meter. Dann wäre die Summe der drei Höhen echt kleiner als drei Meter.

Wenn wir nun aber zeigen können, dass diese Summe mindestens drei Meter sein muss, ist unsere Annahme falsch und wir haben bewiesen, dass mindestens einer der Türme einen Meter hoch sein muss.

**Behauptung:** Die drei Türme sind zusammen mindestens drei Meter, also 300 cm hoch:

$$(r_1 + r_2 + \dots + r_{20}) + (g_1 + g_2 + \dots + g_{20}) + (b_1 + b_2 + \dots + b_{20}) \geq 300.$$

Die Summanden in dieser Gleichung können wir statt nach Farben auch wieder nach den Quadern sortieren; wir haben dann zu zeigen, dass  $(r_1 + g_1 + b_1) + (r_2 + g_2 + b_2) + \dots + (r_{20} + g_{20} + b_{20}) \geq 300$  gilt. Dazu reicht es zu zeigen, dass für jeden der zwanzig Quader  $r_i + g_i + b_i \geq 300 : 20 = 15$  gilt.

Im Weiteren betrachten wir erst mal nur einen Quader mit den drei Seitenlängen  $r, g$  und  $b$ . Wäre unser Quader ein Würfel, so wären alle drei Seiten gleich lang, und zwar  $r = g = b = \sqrt[3]{r g b} = \sqrt[3]{125} = 5$ . In diesem Fall gilt in der oben zu zeigenden Ungleichung sogar Gleichheit  $r + g + b = 15 \geq 15$ , und wir sehen, dass sich die 15 auf der rechten Seite gerade als  $3 \cdot \sqrt[3]{r g b}$  zusammensetzt.

Die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel (siehe unten) besagt, dass  $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$  für beliebige positive  $a, b, c$  ist. In unserem Fall gilt damit tatsächlich  $\frac{r+g+b}{3} \geq 5$  bzw.  $r + g + b \geq 15$  für jeden Quader mit Volumen  $125 \text{ cm}^3$ .

Wie oben ausgeführt ist, folgt dann, dass mindestens einer der drei Türme mindestens einen Meter hoch ist.

**Behauptung:** Es kann sein, dass keiner drei Türme höchstens einen Meter hoch ist.

Dazu seien drei Quader mit den Seitenlängen 1 cm, 1 cm, 125 cm gegeben. Bei dem ersten färben wir die kleine  $1 \cdot 1 \text{ cm}^2$ -Fläche rot, beim zweiten färben wir die kleine Fläche blau und beim dritten gelb. Dann ist jeder der drei Türme

mindestens 125 cm hoch, also größer als einen Meter, egal wie die anderen 17 Quader geformt sind.

*Die obige Mittelungleichung dürft ihr bei uns jederzeit ohne Beweis benutzen; für diejenigen, die sie bisher noch nicht kannten, folgt hier ein Beweis.*

**Behauptung:** Für alle positiven Zahlen  $a, b, c$  gilt die sogenannte *Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel*

$$\frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

Links steht dabei die Zahl, die man umgangssprachlich als Durchschnitt oder Mittelwert der drei Zahlen  $a, b, c$  bezeichnet. Der Mathematiker sagt dazu *arithmetisches Mittel*. Da wir drei Zahlen addieren, müssen wir auch wieder durch 3 teilen.

Auf der rechten Seite steht eine Art multiplikativer Durchschnitt, das sogenannte *geometrische Mittel*. Dabei wird die Addition durch die Multiplikation ersetzt, deshalb muss das Teilen auch durch Wurzelziehen ersetzt werden; und weil es drei Faktoren sind, muss die dritte Wurzel gezogen werden.

Diese Ungleichung gibt es auch für zwei positive Zahlen:  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ . Sie wollen wir nun beweisen: Seien  $A$  und  $B$  zwei positive Zahlen. Da jede Quadratzahl nichtnegativ ist, gilt  $0 \leq (A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$  oder umgestellt  $A^2 + B^2 \geq 2AB$ . Teilen wir noch durch 2 und ersetzen  $A = \sqrt{a}$ ,  $B = \sqrt{b}$  (Letzteres dürfen wir tun, solange  $A, B, a, b$  nichtnegativ sind), so erhalten wir die geforderte Ungleichung für zwei Zahlen

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}. \tag{1}$$

Jetzt machen wir einen kleinen Umweg und zeigen zuerst, dass die entsprechende Ungleichung auch für vier positive Zahlen  $a, b, c, d$  gilt:  $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$ .

Es ist nämlich  $\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{1}{2} \left( \frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2} \right)$ . Wenden wir die Ungleichung (1) für zwei Zahlen auf die beiden Summanden einzeln an, erhalten wir  $\frac{1}{2} \left( \frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2} \right) \geq \frac{1}{2} \left( \sqrt{ab} + \sqrt{cd} \right)$ ; ein drittes Anwenden der Ungleichung liefert  $\frac{1}{2} \left( \sqrt{ab} + \sqrt{cd} \right) \geq \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}}$ . Zusammengesetzt ergibt das die Ungleichung

$$\frac{a + b + c + d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd} \tag{2}$$

für vier positive Zahlen.

Damit können wir nun abschließend die Ungleichung für drei Zahlen beweisen. Wir wählen  $d := \frac{a+b+c}{3}$  und erhalten mit der Ungleichung (2) für vier Zahlen

$$\frac{a + b + c}{3} = \frac{a + b + c + \frac{a+b+c}{3}}{4} \geq \sqrt[4]{abc \cdot \frac{a + b + c}{3}} = \sqrt[4]{abc} \cdot \left( \frac{a + b + c}{3} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Nun teilen wir noch durch den zweiten Faktor der rechten Seite

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{\frac{3}{4}} \geq \sqrt[4]{abc},$$

potenzieren mit  $\frac{4}{3}$  und erhalten wie gewünscht und behauptet

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

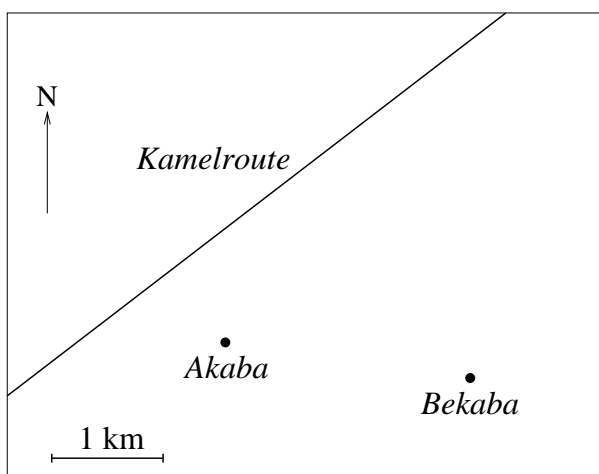
*Bemerkung:* Ohne Beweis sei noch erwähnt, dass diese Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

auch für  $n$  positive Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  gilt. Gleichheit gilt dabei genau dann, wenn alle  $n$  Zahlen gleich sind.

#### Aufgabe 4

Auf der Jagd nach dem Goldschatz der vierzig Räuber ist Ali Baba anscheinend kurz vor dem Ziel: Er hat in einer alten Truhe die unten abgebildete Landkarte gefunden und weiß aus alten Erzählungen, dass der Schatz in der Mitte einer kreisrunden Oase vergraben liegt. Die Oase selbst ist über die Jahrhunderte hinweg leider verschwunden. Aber Ali Baba hat in Erfahrung gebracht, dass die beiden Dörfer Akaba und Bekaba damals direkt am südlichen Oasenrand lagen und dass die alte, schnurgerade Kamelroute damals schon existierte und auf einer Länge von genau 2 km durch die Oase führte.

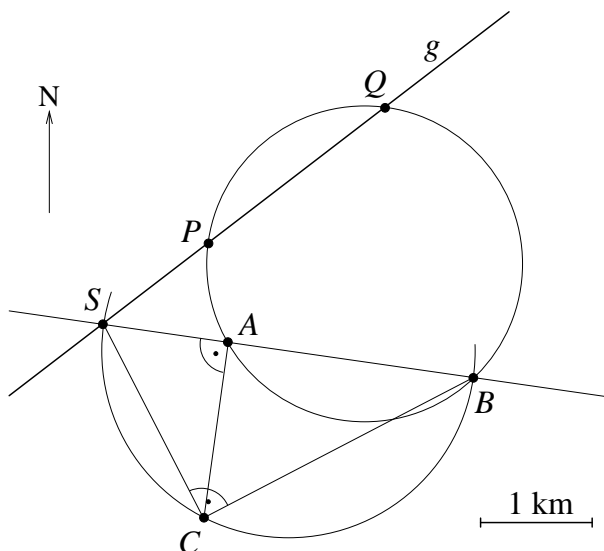


Kann Ali Baba allein mit diesem Wissen und mit Zirkel und Lineal die Lage des Schatzes auf der Karte genau konstruieren?

#### Lösung:

Ja, Ali Baba kann die Lage des Schatzes exakt rekonstruieren.

Zunächst vereinfachen wir die Bezeichnungen und schreiben  $A$  für Akaba,  $B$  für Bekaba und  $g$  für die Gerade der Kamelroute. Dann zeichnen wir in die Skizze die Gerade durch  $A$  und  $B$ ; ihr Schnittpunkt mit  $g$  heiße  $S$ . Die beiden Punkte, an denen der frühere Rand(-Kreis) der Oase die Kamelroute schneidet, seien mit  $P$  und  $Q$  bezeichnet, wobei  $P$  näher an  $S$  liegt.



Nach dem Sekantensatz<sup>1</sup> gilt nun:

$$\begin{aligned} |SA| \cdot |SB| &= |SP| \cdot |SQ| \\ &= |SP| \cdot (|SP| + 2). \end{aligned} \tag{3}$$

Damit ist die Lage von  $P$  fast eindeutig bestimmt, denn  $|SP|$  muss eine Lösung der quadratischen Gleichung  $x^2 + 2x - |SA| \cdot |SB| = 0$  sein. Eine der beiden Lösungen dieser Gleichung ist jedoch negativ, so dass zumindest die Länge  $|SP|$  eindeutig ist; und da  $A$  und  $B$  am südlichen Rand der früheren Oase liegen sollen, muss  $P$  – mit Abstand  $|SP|$  – nördlich von  $S$  liegen. Weil durch drei Punkte (hier  $A, B$  und  $P$ ) höchstens ein Kreis geht, ist hiermit auch der Mittelpunkt der Oase eindeutig bestimmt.

Die Gleichung (3) wollen wir jetzt für unsere geometrische Konstruktion verwenden. Als Erstes konstruieren wir den Thaleskreis über  $SB$  und die Senkrechte auf der Geraden  $(AB)$  durch  $A$  (die Hilfskreise und -strecken dafür sind nicht eingezeichnet) und bezeichnen einen der Schnittpunkte mit dem Thaleskreis mit  $C$ . Es ist dann  $SCB$  ein rechtwinkliges Dreieck, so dass nach dem Kathetensatz gilt:

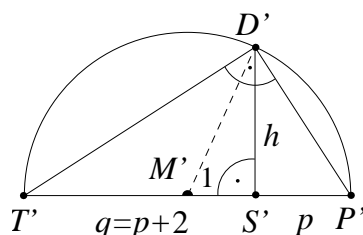
$$|SC|^2 = |SA| \cdot |SB|. \tag{4}$$

<sup>1</sup>Der Sekantensatz besagt: Wenn zwei Geraden, die durch einen gemeinsamen Punkt  $S$  gehen, Sekanten eines Kreises sind, d. h. diesen Kreis in je zwei Punkten  $A$  und  $B$  bzw.  $C$  und  $D$  schneiden, dann gilt  $|SA| \cdot |SB| = |SC| \cdot |SD|$ . Der Satz gilt auch noch, wenn eine oder beide der Sekanten zu Tangenten entarten oder anders gesagt die Schnittpunkte zusammenfallen: Wenn man zwei Tangenten hat, ist die Aussage aus Symmetriegründen trivial; wenn man genau eine Tangente hat, heißt die Aussage *Sekanten-Tangenten-Satz*.

Nun ist  $|SP|$  zu konstruieren; da aus (3) und (4) die Gleichung

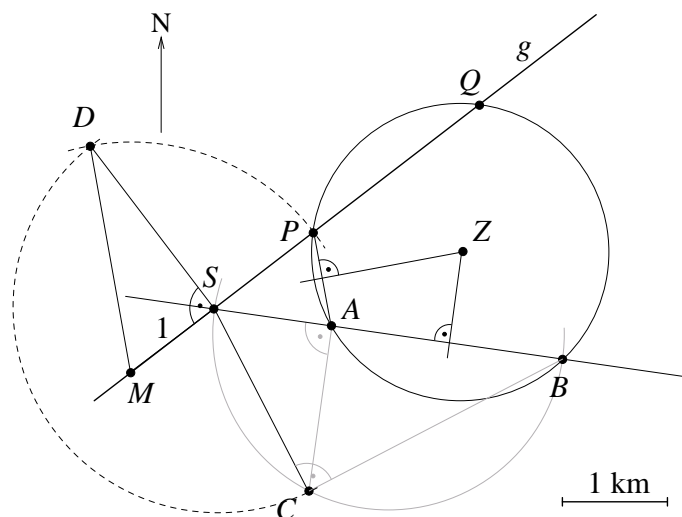
$$|SC|^2 = |SP| \cdot (|SP| + 2)$$

folgt, kann man  $|SP|$  mithilfe des Höhensatzes gewinnen. Dazu folgende Überlegung: Der Höhensatz besagt, dass in einem rechtwinkligen Dreieck gilt:  $h^2 = pq$  (vergleiche Skizze).



Hier soll nun  $q = p + 2$  gelten, das bedeutet andersherum, dass der Mittelpunkt  $M'$  der Strecke  $T'P'$  um eine Einheit vom Höhenfußpunkt entfernt liegt. Da  $M'$  gleichzeitig der Mittelpunkt des Thaleskreises des rechtwinkligen Dreiecks ist, kann man zu gegebener Höhe  $h$  die Strecken  $p$  und  $q$  wie folgt konstruieren: Man zeichnet eine Gerade (auf der die Hypotenuse des Dreiecks liegen soll), konstruiert eine dazu senkrechte Strecke  $S'D'$  der Länge  $h$ , trägt auf der Geraden eine Strecke  $S'M'$  der Länge 1 ab (Anmerkung: diese Länge ist ja in unserer Zeichnung als Maßstab angegeben) und schlägt den Kreis um  $M'$  mit Radius  $|M'D'|$ , die Schnittpunkte  $P'$  und  $T'$  mit der Geraden liefern dann die Streckenlängen  $p = |S'P'|$  und  $p + 2 = |S'T'|$ .

Diese Konstruktion übertragen wir nun auf unsere Landkarte: Wir konstruieren zunächst die Senkrechte durch  $S$  auf  $g$ , tragen auf ihr die Strecke  $SD$  der Länge  $|SC|$  ab, auf  $g$  dann eine Strecke  $SM$  der Länge 1 entgegen der Richtung, in der wir den Punkt  $P$  finden wollen. Jetzt zeichnen wir den Kreis um  $M$  mit Radius  $|MD|$  und finden so  $P$  als Schnittpunkt mit  $g$  auf der gewünschten Seite. ( $Q$  ist für den Rest gar nicht mehr wichtig.) Den Mittelpunkt  $Z$  der früheren Oase bekommt man dann als Umkreismittelpunkt des Dreiecks  $ABP$  über die übliche Konstruktion der Mittelsenkrechten.



*Anmerkungen:* Dort, wo wir den Kathetensatz verwendet haben, hätten wir auch den Höhensatz benutzen können und umgekehrt.

Auf die Konstruktion von  $M$  als Hilfspunkt kann man auch auf rechnerischem Wege kommen: Aus (3) und (4) folgt:

$$\begin{aligned} |SC|^2 &= |SP| \cdot (|SP| + 2) \\ &= |SP|^2 + 2|SP| + 1 - 1 \\ &= (|SP| + 1)^2 - 1. \end{aligned}$$

Daher ist  $|SP| + 1$  die Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck mit Katheten  $|SC|$  und 1.