Mathematischer Korrespondenz-zirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

# Beispiellösungen zu Blatt 58

## Aufgabe 1

Der Weihnachtsmann hat so viele Nichten, Neffen und Enkelkinder, dass er aufgegeben hat, sich die Namen zu merken. Er teilt sie nur noch ein in *Engelchen*, das sind die Kinder, die stets die Wahrheit sagen, und in *Teufelchen*, das sind die Kinder, die stets lügen. Zum Nikolaustag sind alle bei ihm zu Gast und sitzen – ohne ihn – um seinen runden Esstisch.
Nun behauptet jedes der Kinder, dass sein rechter Tischnachbar ein Teufelchen sei. Wie sieht die Sitzverteilung aus?
Hätte jedes der Kinder hingegen behauptet, zwischen einem Engelchen und einem Teufelchen zu sitzen, wie sähe dann die Tischordnung aus?

**Lösung:**

Wenn jedes der Kinder behauptet, dass sein rechter Nachbar ein Teufelchen ist, so sitzt rechts neben einem Engelchen tatsächlich ein Teufelchen (weil die Engelchen stets die Wahrheit sagen), wohingegen rechts von jedem Teufelchen ein Engelchen sitzt (da die Teufelchen stets lügen). Also sitzen im ersten Fall Engelchen und Teufelchen abwechselnd am Tisch.

Betrachten wir nun den Fall, dass jedes Kind behauptet, zwischen einem Engelchen und einem Teufelchen zu sitzen. Wieder haben die Teufelchen gelogen, d. h. jedes Teufelchen sitzt entweder zwischen zwei Teufelchen oder zwischen zwei Engelchen. Angenommen, ein Teufelchen sitzt zwischen zwei weiteren Teufelchen: Diese können nun jeweils nicht mehr zwischen zwei Engelchen sitzen, haben also ebenfalls zwei Teufelchen als direkte Sitznachbarn. Führt man diese Argumentation fort, kommt man zu dem Schluss, dass nur Teufelchen am Tisch sitzen.
Ist dagegen mindestens ein Engelchen am Tisch, so gilt: Da es nicht lügt, sitzt es zwischen einem Engelchen und einem Teufelchen. Das Teufelchen wiederum muss dann als zweiten Tischnachbarn ein weiteres Engelchen haben. Dieses muss ein Engelchen als zweiten Nachbarn haben und so weiter. Als Sitzordnung ergibt sich also die Abfolge $E\,E\,T\,E\,E\,T\,\ldots\,E\,E\,T$, wobei mit $E$ ein Engelchen und mit $T$ ein Teufelchen bezeichnet sei.
Somit gibt es im zweiten Fall zwei mögliche Sitzordnungen: Entweder es sitzen nur Teufelchen am Tisch oder es sitzen abwechselnd zwei Engelchen und ein Teufelchen nebeneinander.

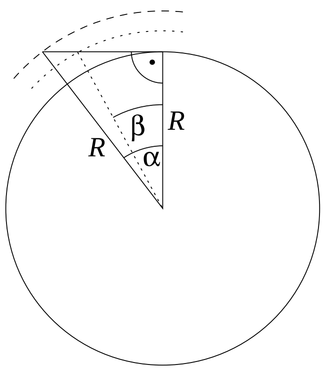
## Aufgabe 2

Weihnachtszeit – Knecht Ruprecht ist mit einem Helfer namens Franz unterwegs zum Geschenke-Verteilen. Sie fliegen mit Höchstgeschwindigkeit über die Ostsee auf Deutschland zu, Knecht Ruprecht in 2 km Höhe, Franz in nur 1 km Höhe, weil er seinen Rentierführerschein erst auf Probe hat. Natürlich

sind die beiden über Sprechfunk miteinander verbunden – jedoch ist das Entfernungsradar ausgefallen. Um 15 Uhr meldet sich Knecht Ruprecht: „Ich sehe die Küste!“ Genau eine Viertelstunde später sieht auch Franz das Ufer. Er stellt fest: „Dann haben wir ja noch viel Reserve. Lass uns doch noch eine Viertelstunde auf der Insel der Ostsee-Engel ausruhen und noch ein paar Minuten mit den Seeschwalben plaudern.“ Knecht Ruprecht erwidert: „Solange du um Punkt 16 Uhr auf Land angekommst, kannst du alles tun, was du willst. Ich werde aber lieber direkt dorthin fliegen und mir die hoffentlich verschneite Landschaft anschauen.“
Wie viel Reserve haben die beiden tatsächlich – kann Franz sich noch einen langen Abstecher leisten?

**Lösung:**

Ein Punkt auf der Erdoberfläche erscheint genau dann am Horizont, wenn die Strecke von dem Punkt zum Beobachter eine Tangente an die Erdoberfläche ist; vgl. dazu die Skizze. Der (Erd-)Radius beträgt $R \approx 6371\,\text{km}$.




Man kann davon ausgehen, dass die beiden Geschenkebringer übereinander fliegen (sie sollten ja zusammen fliegen), das heißt, dass sie sich mit derselben Winkelgeschwindigkeit bewegen.[1]
Zum Zeitpunkt $t_1$, an dem Knecht Ruprecht die Küste erblickt, ist er noch um den Winkel $\alpha$ von der Küste entfernt, und es gilt die Gleichung

$$\cos\alpha = \frac{R}{R + 2\,\text{km}}\,.$$

Daraus ergibt sich: $\alpha \approx 1{,}4356°$.
Franz sieht die Küste zum ersten Mal zum Zeitpunkt $t_2$ bei einem Winkel $\beta$, für den $\cos\beta = \frac{R}{R+1\,\text{km}}$ und damit $\beta \approx 1{,}0152°$ gilt. Seit $t_1$ haben die beiden also 0,4204 Grad zurückgelegt; die Winkelgeschwindigkeit beträgt somit $\frac{0{,}4204}{15} \approx 0{,}0280$ Grad pro Minute. Für die restlichen 1,0152 Grad brauchen sie daher noch $\frac{1{,}0151}{0{,}0280} \approx 36{,}2$ Minuten. Es verbleiben knapp 9 Minuten Reserve – zu wenig, als dass sich Franz noch einen Abstecher zu den Ostsee-Engeln erlauben könnte, allenfalls wäre eine Plauderei mit den Seeschwalben drin, wenn ihm gerade welche über den Weg fliegen sollten.

## Aufgabe 3

Die vierte Klasse veranstaltet auf ihrer diesjährigen Weihnachstfeier ein Spiel um Schokoladentaler. Dazu legt die Lehrerin zunächst einen Taler in einen Topf und noch einen, als das erste Kind kommt. Bei jedem weiteren eintreffenden Kind verdoppelt sie die Anzahl der bereits im Topf liegenden Taler.

[1] Man kann den Aufgabentext auch anders deuten, z. B., dass die absolute Geschwindigkeit gleich ist. Da der Abstand der beiden zur Erde im Vergleich zum Erdradius aber sehr klein ist, ändert das an den Rechnungen kaum etwas, am Ergebnis im Prinzip gar nichts.

Insgesamt kommen 27 Kinder. Das Spiel läuft dann folgendermaßen ab: Das Kind, das als Erstes gekommen ist, darf als Erstes den Topf auskippen und alle Taler behalten, die auf „Zahl“ gefallen sind. Falls nun noch Taler übrig sind, wird der Topf an das zweite Kind weitergereicht. Dieses mischt die restlichen Taler, wirft sie wieder in den Topf, kippt ihn erneut um und behält ebenfalls alle auf „Zahl“ gefallenen Taler. So geht es weiter, bis alle Taler verteilt sind oder jedes Kind genau einmal dran war. Ist die Wahrscheinlichkeit, dass das letzte Kind nicht mehr an die Reihe kommt, größer oder kleiner als 10 Prozent? Kann die Wahrscheinlichkeit größer als 15 Prozent werden, wenn mehr Kinder kommen?

**Lösung:**

Zunächst bestimmen wir die Anzahl der Taler im Topf vor Spielbeginn: Es kommen 27 Kinder und die Anzahl wird mit jedem Kind verdoppelt; also sind nach dem 27. Kind $2^{27}$ Taler im Topf. Nun betrachten wir einen einzelnen Taler und berechnen die Wahrscheinlichkeit, dass dieser nach 26-maligem Ausschütten des Topfes nicht mehr im Spiel ist. Um nach 26 Runden noch im Topf zu sein, müsste der Taler immer auf „Kopf“ fallen. Hierfür ist die Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{2}\right)^{26}$. Da es für den Taler nur die zwei Möglichkeiten gibt, entweder noch im Spiel zu sein oder nicht mehr im Spiel zu sein, addieren sich die beiden genannten Wahrscheinlichkeiten zu 1. Also beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass ein einzelner Taler nach 26 Runden nicht mehr im Topf ist, $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{26}$.
Damit das letzte Kind nicht mehr an die Reihe kommt, müssen alle $2^{27}$ Taler nach 26 Runden nicht mehr im Topf sein. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist somit

$$\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{26}\right)^{2^{27}} \approx 0{,}1353 = 13{,}53\% > 10\%.$$

Sollten nun $n$ statt 27 Kinder kommen, so ergibt sich ganz genau wie eben, dass das letzte Kind mit der Wahrscheinlichkeit

$$W(n) = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)^{2^n} = \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)^{2^n}$$

nicht mehr an die Reihe kommt.
Wir behaupten, dass diese Wahrscheinlichkeit, selbst bei noch so großem $n$, nie größer als 15% ist. Um das zu beweisen, kann man entweder „schwere Geschütze“ aus der Analysis bemühen, die einem (gewissermaßen definitionsgemäß) sagen, dass die Folge $W(n)$ von unten gegen den Grenzwert $1/e^2 \approx 0{,}13533\ldots$ konvergiert (hierbei ist $e$ die Eulersche Konstante $e \approx 2{,}71828\ldots$), oder aber man argumentiert wie folgt:
Wir betrachten die Vergleichsfolge

$$U(n) = \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}+1}\right)^{2^n}.$$

Dann ist zunächst sicher $W(n) < U(n)$ für alle $n$. Außerdem ist aber auch $U(n+1) < U(n)$ für jedes $n \geq 1$, denn diese Ungleichung ist der Reihe nach äquivalent zu:

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{1}{2^n+1}\right)^{2^{n+1}} &< \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}+1}\right)^{2^n} \\
\left(\left(1 - \frac{1}{2^n+1}\right)^2\right)^{2^n} &< \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}+1}\right)^{2^n} \\
1 - 2 \cdot \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{(2^n+1)^2} &< 1 - \frac{1}{2^{n-1}+1}\,,
\end{aligned}$$

und dies wiederum wird nach Subtraktion von 1 und anschließender Multiplikation mit $-(2^n+1)^2(2^{n-1}+1)$ und Ausmultiplizieren zu den äquivalenten Ungleichungen

$$\begin{aligned}
2 \cdot (2^n+1)(2^{n-1}+1) - (2^{n-1}+1) &> (2^n+1)^2 \\
2^{2n} + 3 \cdot 2^n + 2 - 2^{n-1} - 1 &> 2^{2n} + 2 \cdot 2^n + 1 \\
2^{n-1} &> 0.
\end{aligned}$$

Da Letzteres eine wahre Aussage darstellt und wir nur Äquivalenzumformungen gemacht haben, ist also in der Tat $U(n+1) < U(n)$ für alle $n$. Das heißt aber auch, dass für alle $n \geq 5$

$$W(n) < U(n) \leq U(5) = \left(\frac{16}{17}\right)^{32} \approx 0{,}1437\ldots < 0{,}15$$

gilt. Für $n = 1, 2, 3, 4$ kann man $W(n) < 0{,}15$ von Hand nachrechnen. Damit haben wir alles gezeigt.

*Bemerkung 1:* Die Folge der $U(n)$ konvergiert von oben gegen $1/e^2$. Außerdem zeigt eine analoge Rechnung wie oben für die $U(n)$, dass die $W(n)$ eine monoton steigende Folge bilden.

*Bemerkung 2:* Die letzte Abschätzung kann man der Vollständigkeit halber auch exakt machen (sollte man auch, weil man ansonsten eigentlich die mögliche Rechenungenauigkeit des Taschenrechners bestimmen müsste):

$$\left(\frac{16}{17}\right)^{32} < 0{,}15 = \frac{3}{20}$$

ist äquivalent zu

$$2^{130} \cdot 5 < 17^{32} \cdot 3.$$

Nach Ausmultiplizieren ist die linke Zahl gleich

$$6805647338418769269267492148635364229120$$

und die rechte gleich

$$7103734784281401737532318891962853742083,$$

womit die Ungleichung also wahr ist.
Zugegeben, auch diese Zahlen wird man kaum ohne Rechnerhilfe ermitteln können oder wollen, obwohl es dann immerhin ganzzahlige Rechnungen sind, die geeignete Programme ohne Probleme exakt ausführen können.
Wenn man bereit ist, mit bis zu fünfstelligen Zahlen ohne Taschenrechner zu rechnen, kann man die Ungleichung sogar – zumindest theoretisch – von Hand auflösen: Dazu erweitert man die Ungleichung Schritt für Schritt, um dann geeignet (nichtäquivalent) abschätzen zu können und so die Zahlen immer weiter zu verkleinern:

$$\begin{aligned}
& & 2^{130} \cdot 5 &< 3 \cdot 17^{32} \\
&\Leftrightarrow & 2^{130} \cdot 307^{10} \cdot 5 &< 3 \cdot 17^{32} \cdot 307^{10} \\
&\Leftarrow & 2^{90} \cdot 5 &< 3 \cdot 17^{2} \cdot 307^{10} \\
& & & \quad \text{wegen } 2^4 \cdot 307 = 4912 < 4913 = 17^3, \\
&\Leftrightarrow & 2^{90} \cdot 23^5 \cdot 5 &< 3 \cdot 17^{2} \cdot 23^5 \cdot 307^{10} \\
&\Leftarrow & 2^{30} \cdot 5 &< 3 \cdot 17^{2} \cdot 23^5 \\
& & & \quad \text{wegen } 2^{12} \cdot 23 = 94208 < 94249 = 307^2, \\
&\Leftrightarrow & 2^{30} \cdot 3^2 \cdot 11^2 \cdot 5 &< 3^3 \cdot 11^2 \cdot 17^{2} \cdot 23^5 \\
&\Leftarrow & 2^{22} \cdot 5 &< 3^3 \cdot 11^2 \cdot 17^{2} \cdot 23 \\
& & & \quad \text{wegen } 2^4 \cdot 3 \cdot 11 = 528 < 529 = 23^2, \\
&\Leftrightarrow & 2^{22} \cdot 3^2 \cdot 5 &< 3^5 \cdot 11^2 \cdot 17^{2} \cdot 23 \\
&\Leftarrow & 2^{17} \cdot 5 &< 3^5 \cdot 11^2 \cdot 23 \\
& & & \quad \text{wegen } 2^5 \cdot 3^2 = 288 < 289 = 17^2, \\
&\Leftarrow & 2^{13} &< 3 \cdot 11^2 \cdot 23 \\
& & & \quad \text{wegen } 2^4 \cdot 5 = 80 < 81 = 3^4, \\
&\Leftrightarrow & 2^{13} \cdot 3 \cdot 5 &< 3^2 \cdot 5 \cdot 11^2 \cdot 23 \\
&\Leftarrow & 2^{10} &< 3^2 \cdot 5 \cdot 23 \\
& & & \quad \text{wegen } 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120 < 121 = 11^2, \\
&\Leftrightarrow & 2^{10} = 1024 &< 1035 = 23 \cdot 3^2 \cdot 5\,.
\end{aligned}$$

Die letzte Aussage ist offensichtlich wahr, daher gilt auch die Ungleichung zu Beginn.

**Aufgabe 4**

Bekanntlich benutzt der Weihnachtsmann für seine Korrespondenz eine „SchreibFix 3000“, eine der neuesten Schreibmaschinen auf dem Markt, bei der die 26 Buchstaben kreisförmig auf einer drehbaren Scheibe angeordnet sind. Tim hat nun folgende Botschaft vom Weihnachtsmann erhalten:

> But jxgayy, bus Cgrjk quss oin nkx;
> oin sayy kain ygmkt, ky ckontginzkz yknx ...

Er ahnt sofort, dass sich da die Weihnachtselfen einen Spaß erlaubt haben müssen und wahrscheinlich die Schreibmaschinenscheibe verdreht haben, ohne dass dies der Weihnachtsmann bemerkt hätte. Ohne viel Mühe kann er daraufhin die eigentliche Nachricht entziffern und freut sich, denn der Autor dieser Zeilen ist in derselben Stadt geboren, in der er selbst wohnt und in deren Schlosspark in jedem Frühjahr ganz bestimmte Blumen zu bewundern sind. Welche Blumen sind das?

**Lösung:**

Die Weihnachtselfen haben die Schreibmaschinenscheibe wohl um sechs Stellen verdreht, und zwar so, dass aus jedem a ein g wurde, aus jedem b ein h usw.
Der entschlüsselte Text lautet dann:

> Von drauss, vom Walde komm ich her;
> ich muss euch sagen, es weihnachtet sehr ...

Dies sind die Anfangszeilen des Gedichts „Knecht Ruprecht“ von Theodor Storm, der 1817 in Husum geboren wurde. Der Husumer Schlosspark ist bekannt für seine Krokusblüte im Frühjahr.