Mathematischer Korrespondenz-zirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Beispiellösungen zu Blatt 61

Aufgabe 1

In einer kreativen Schaffenspause vertreibt sich das sechs Mann bzw. Frau starke Korrespondenzzirkelteam, bestehend aus (im linken Bild von oben nach unten und links nach rechts) Kristin, Karsten, Ulrike, Alex, Robert und Marco, die Zeit mit dem Bau von Menschenpyramiden – unten drei, darüber zwei und ganz oben eine Person. Jemand in einer der oberen beiden Reihen wird dabei also immer von genau zwei Personen darunter gestützt. Alle sechs sind verschieden schwer.

Wie viele verschiedene Pyramiden können gebaut werden, wenn nie eine leichtere Person eine schwerere halten soll?
Die Abbildung oben zeigt zwei mögliche Pyramiden. Ordne das Korrespondenzzirkelteam der Masse nach, wenn bekannt ist, dass Robert einen Hauch schwerer als Alex ist.

Lösung:

Zunächst überlegen wir uns die Anzahl der möglichen Pyramiden:
Die schwerste und die zweitschwerste Person müssen in der unteren Reihe knien, da jede Person aus einer der beiden oberen Reihen von mindestens zwei schwereren Personen gehalten werden muss.

Befindet sich zusätzlich die drittschwerste Person in der unteren Reihe, so ergeben sich für diese Reihe drei Anordnungsmöglichkeiten, wenn wir zunächst nur die Positionen „Mitte“ und „Außen“ unterscheiden (die übrigen Möglichkeiten erhalten wir durch Spiegelung): jede der drei Personen kann sich in der Mitte befinden.
Da die leichteste Person immer an der Spitze der Pyramide stehen muss, teilen sich die viert- und fünftschwerste Person die mittlere Reihe. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten. (Diese gehen nicht durch Spiegelung ineinander über, da die jeweils darunter knienden Personen verschieden sind.)

Im Fall, dass sich die drittschwerste Person unten befindet, erhalten wir also $3 \cdot 2 = 6$ Möglichkeiten.

Wenn dies nicht der Fall ist, muss die viertschwerste Person einspringen, da es keine zwei Personen gibt, die leichter sind als die fünftschwerste Person. Die viertschwerste Person muss dann außen sein, da sie sonst die drittschwerste halten müsste. Es bleiben die beiden Möglichkeiten, dass die schwerste oder die zweitschwerste Person in der Mitte ist. Die mittlere Reihe ist damit eindeutig festgelegt, weil die drittschwerste auf den beiden schwersten Personen knien muss.

Wenn wir nun noch die gespiegelten Pyramiden mitberücksichtigen, erhalten wir insgesamt $(6 + 2) \cdot 2 = 16$ Möglichkeiten.

Nun ordnen wir das Zirkelteam nach Gewicht:
Da alle Personen außer Alex und Robert in einer der beiden oberen Reihen auftauchen, müssen diese beiden am schwersten sein. Mit dem Hinweis aus der Aufgabenstellung ist also Robert der Schwerste und Alex der Zweitschwerste. Außer diesen beiden können nur noch die dritt- und viertschwerste Person in der unteren Reihe vorkommen. Da Marco auf dem rechten Bild von Karsten gehalten wird, ist Karsten der Drittschwerste und Marco der Viertschwerste. Die leichteste Person ist Kristin an der Spitze; also ist Ulrike die Fünftschwerste in unserem Team.

Aufgabe 2

Die Firma „Ziegel-Klotz“ stellt quaderförmige Ziegelsteine mit den Abmessungen $1 \times 2 \times \sqrt{2}$ her. Aus 100 dieser Ziegel sollen Türme gebaut werden, indem diese direkt, das heißt immer einer auf den vorherigen, übereinandergestapelt werden – dabei müssen aber nicht immer Flächen gleicher Größe aufeinander liegen!
Wie viele verschiedene Turmhöhen sind möglich?

Lösung:

Zunächst stellen wir fest, dass die Turmhöhe nur davon abhängt, wie viele, nicht aber welche Ziegelsteine so verbaut sind, dass sie die Höhe 1, 2 bzw. $\sqrt{2}$ haben. O. B. d. A. können wir also annehmen, dass die untersten l Ziegelsteine die Höhe 1 haben, die darauf gestapelten m die Höhe 2 und die obersten n die Höhe $\sqrt{2}$.
Weiterhin liefern verschiedene Tupel (l, m, n), die zudem die Nebenbedingung $l + m + n = 100$ erfüllen, verschiedene Höhenwerte.
Begründung: Es ist $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl (das heißt: $k \cdot \sqrt{2}$ ist für natürliches k nie eine natürliche Zahl) und somit haben Türme mit verschiedenen Anzahlen von Ziegeln der Höhe $\sqrt{2}$ niemals die gleiche Gesamthöhe. Bei festem n und konstanter Summe $l + m + n$ liefern verschiedene Tripel ebenfalls verschiedene Gesamthöhen. Also ergibt sich die Anzahl der möglichen Turmhöhen als die Anzahl der Tripel (l, m, n) mit $l + m + n = 100$.

Für festes l kann m Werte zwischen 0 und $100 - l$ annehmen (d. h. es gibt $101 - l$ mögliche Werte für m) und es gilt $n = 100 - l - m$. Da auch l Werte zwischen 0 und 100 annehmen kann, gibt es insgesamt $\sum_{l=0}^{100} 101 - l = \sum_{l'=1}^{101} l' = \frac{101 \cdot 102}{2} = 5151$ verschiedene Turmhöhen.

Alternative Lösung mit Binomialkoeffizienten:
Wir denken uns zwei weitere Ziegelsteine mit winzig kleiner Höhe (z. B. in Form eines Blatt Papiers). Diese stellen wir uns als trennende Elemente zwischen den Steinen der Höhe 1 und denen der Höhe 2 bzw. zwischen den Steinen der Höhe 2 und denen der Höhe $\sqrt{2}$ vor. Durch das Platzieren dieser trennenden Bausteine auf zweien der nun insgesamt 102 zur Verfügung stehenden Positionen wird eindeutig ein Tripel (l, m, n) mit $l + m + n = 100$ bestimmt. Dafür gibt es bekanntlich $\binom{102}{2} = \frac{102!}{2! \cdot 100!} = \frac{102 \cdot 101}{2} = 5151$ Möglichkeiten.

Aufgabe 3

Gustav zeichnet ein gleichseitiges Dreieck, ein Quadrat und einen Kreis auf ein Blatt Papier und stellt verblüfft fest, dass der Umfang des Dreiecks gleich der Fläche des Quadrates, der Umfang des Quadrates aber gleich der Fläche des Kreises und der Umfang des Kreises schließlich gleich der Fläche des Dreiecks ist. Mit *Umfang* und *Fläche* ist hierbei jeweils die Maßzahl der entsprechenden Größe in cm bzw. cm^2 gemeint.
Wie groß sind die Seitenlängen von Dreieck und Quadrat und der Radius des Kreises?

Lösung:

Es seien $a_\triangle$ und $a_\square$ die Seitenlängen von Dreieck und Quadrat und r der Radius des Kreises.
Nach Aufgabenstellung gilt:

$$3 \cdot a_\triangle = a_\square^2\,, \tag{1}$$
$$4 \cdot a_\square = \pi r^2 \quad \text{und} \tag{2}$$
$$2\pi \cdot r = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a_\triangle^2\,. \tag{3}$$

Setzt man (1) in (3) ein, erhält man:

$$2\pi \cdot r = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a_\square^4}{9}\,;$$

setzt man darin noch (2) ein, führt dies zur Gleichung

$$2\pi \cdot r = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\pi^4 r^8}{256 \cdot 9}$$

oder äquivalent (wir können von $r \neq 0$ ausgehen) zu

$$r^7 = \frac{2^{11} \cdot 9}{\pi^3 \cdot \sqrt{3}}\,.$$

Damit ist

$$r = \sqrt[7]{\frac{2^{11} \cdot 9}{\pi^3 \cdot \sqrt{3}}} \approx 2{,}303\,\text{cm}\,,$$
$$a_\square = \frac{\pi}{4} r^2 = \frac{\pi}{4} \cdot \sqrt[7]{\frac{2^{22} \cdot 81}{\pi^6 \cdot 3}} = \sqrt[7]{2^8 \cdot 27 \cdot \pi} \approx 4{,}164\,\text{cm}\,,$$
$$a_\triangle = \frac{1}{3} a_\square^2 = \frac{1}{3} \cdot \sqrt[7]{2^{16} \cdot 3^6 \cdot \pi^2} = \sqrt[7]{\frac{2^{16} \cdot \pi^2}{3}} \approx 5{,}780\,\text{cm}\,.$$

Zur Probe rechnen wir noch eine Stufe weiter: Es soll

$$r = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a_\triangle^2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt[7]{\frac{2^{32} \cdot \pi^4}{9}} = \sqrt[7]{\frac{2^{11} \cdot 3\sqrt{3}}{\pi^3}}$$

sein, und dies ist richtig.

Aufgabe 4

Für zwei Zahlen x und y mit $x + y \neq 2003$ sei

$$x \odot y = \frac{x \cdot y + 8028}{x + y - 2003} .$$

So gilt zum Beispiel $1 \odot 2 = \frac{1 \cdot 2 + 8028}{1+2-2003} = -\frac{803}{200}$.
Man berechne den Wert von

$$1 \odot (2 \odot (3 \odot (\ldots (999\,998 \odot (999\,999 \odot 1\,000\,000))))) .$$

Lösung:

Für $y \neq -4$ setzen wir $x = 2007$ in die Definition von $\odot$ ein und erhalten:

$$2007 \odot y = \frac{2007 \cdot y + 8028}{2007 + y - 2003} = \frac{2007 \cdot (y + 4)}{y + 4} = 2007 . \tag{4}$$

Für $x \geq 2003$ und $y > 0$ gilt $x + y - 2003 \neq 0$ und $x \odot y > 0$. Daher tritt in den Berechnungen zu

$$2008 \odot (\ldots (999\,998 \odot (999\,999 \odot 1\,000\,000))) \tag{5}$$

niemals der Nenner 0 auf und das Ergebnis ist positiv. Unabhängig davon, welchen Wert (5) annimmt, ergibt sich mit der Formel (4) somit

$$2007 \odot (2008 \odot (\ldots (999\,998 \odot (999\,999 \odot 1\,000\,000)))) = 2007 .$$

Da genau wie in (4) für $x \neq -4$ auch $x \odot 2007 = 2007$ gilt, folgt weiter:

$$\begin{aligned}
1 \odot & (2 \odot (3 \odot (\ldots (999\,998 \odot (999\,999 \odot 1\,000\,000))))) \\
&= 1 \odot (2 \odot (3 \odot (\ldots (2005 \odot (2006 \odot (2007)))))) \\
&= 1 \odot (2 \odot (3 \odot (\ldots (2005 \odot (2007))))) \\
&= \ldots = 1 \odot 2007 \\
&= 2007 .
\end{aligned}$$