Beispiellösungen zu Blatt 64

Aufgabe 1

Käpt'n Jakob Sperling und seine Piraten der *Schwarzen Perle* haben in ihrer letzten Seeschlacht schwere Verluste erlitten. Daher landen sie auf Tortuga und suchen nach Ersatz für ihre verletzten Kameraden. Da jedoch alle Piraten sehr abergläubisch sind, muss die Anzahl der neuen Männer gewisse Piratenregeln erfüllen: Sie muss eine Primzahl und ein Palindrom sein und die Anzahl ihrer Ziffern muss gerade sein.
Wie viele neue Mannschaftsmitglieder kann Käpt'n Jakob höchstens anheuern?

Hinweis: Ein Palindrom ist eine Zahl, die sich nicht ändert, wenn man ihre Ziffernreihenfolge umkehrt.

Lösung:

Um all diese Vorgaben zu erfüllen, muss Käpt'n Jakob genau 11 neue Männer anheuern.

Sei x ein Palindrom mit einer geraden Anzahl von Stellen, d. h. x habe $2m$ Stellen (m ist eine natürliche Zahl) und die Form

$$x = a_1 a_2 \dots a_m a_m \dots a_2 a_1$$

mit den Ziffern $a_1, \dots, a_m \in \{0, 1, \dots, 9\}$.
Dann steht a_1 an der 1. und $2m$-ten, a_2 an der 2. und $(2m-1)$-ten, ... sowie a_m an der m-ten und $(m+1)$-ten Stelle von x. Also kommt jedes a_i $(i = 1, \dots, m)$ einmal an einer ungeraden und einmal an einer geraden Stelle vor. Bilden wir nun die alternierende Quersumme $AQ(x)$ von x, wird daher jedes a_i einmal addiert und einmal subtrahiert. Wir erhalten also:

$$\begin{aligned} AQ(x) &= a_1 - a_2 + a_3 - \dots \pm a_m \mp a_m \pm \dots - a_3 + a_2 - a_1 \\ &= (a_1 - a_1) - (a_2 - a_2) + (a_3 - a_3) - \dots \pm (a_m - a_m) = 0. \end{aligned}$$

Eine Teilungsregel besagt, dass eine Zahl genau dann durch 11 teilbar ist, wenn ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist. Da 0 durch 11 teilbar ist, ist also auch x durch 11 teilbar.

Fordert man schließlich wie in der Aufgabenstellung, dass x eine Primzahl sein soll, folgt somit $x = 11$ als einzige Lösung des Problems.

Beweis der Teilbarkeitsregel für 11:
Eine Zahl $11\dots1$, die aus einer geraden Anzahl Einsen besteht, ist durch 11 teilbar:

$$\underbrace{11\dots11}_{2k \text{ Einsen}} = 11 \cdot \underbrace{01\dots01}_{2k\text{-mal ,01‘}} . \tag{1}$$

Für reine Zehnerpotenzen mit einem geraden Exponenten $2k$ gilt

$$\begin{aligned}10^{2k} &= 1\underbrace{0\ldots0}_{2k \text{ Nullen}} = \underbrace{11\ldots11}_{2k \text{ Einsen}}0 - \underbrace{11\ldots11}_{2k \text{ Einsen}}+1 \\ &= 11\cdot 10t - 11\cdot t + 1 = 11\cdot(10-1)t + 1 = 11\cdot q + 1\end{aligned}$$

mit den natürlichen Zahlen t wie in (1) und $q = 9t \in \mathbb{N}$. Für die Zehnerpotenzen mit ungeradem Exponenten $2k+1$ hingegen gilt

$$\begin{aligned}10^{2k+1} &= 1\underbrace{0\ldots0}_{2k+1} = \underbrace{11\ldots11}_{2k+2} - \underbrace{11\ldots11}_{2k}0 - 1 \\ &= 11\cdot t - 11\cdot 10s - 1 = 11\cdot(t-10s) - 1 = 11\cdot q - 1\end{aligned}$$

mit den natürlichen Zahlen t, s wie in (1) und $q = t - 10s \in \mathbb{N}$.

Sei nun $y = b_n b_{n-1}\ldots b_2 b_1$ eine beliebige n-stellige Zahl mit den Ziffern $b_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Die Ziffernschreibweise (im Dezimalsystem) bedeutet, dass

$$y = b_n \cdot 10^{n-1} + b_{n-1}\cdot 10^{n-2} + \ldots + b_2 \cdot 10^1 + b_1 \cdot 10^0$$

ist. Versehen wir die Zahlen q in den obigen Zerlegungen noch mit einem Index, etwa $10^{2k} = 11\cdot q_{2k} + 1$ und $10^{2k+1} = 11\cdot q_{2k+1} - 1$, so ergibt sich, wenn wir von rechts anfangen zu summieren:

$$\begin{aligned}y &= b_1 + (11q_1b_2 - b_2) + (11q_2b_3 + b_3) + \ldots + (11q_{n-1}b_n \pm b_n) \\ &= (b_1 - b_2 + b_3 - \ldots \pm b_n) + 11\cdot(q_1b_2 + q_2b_3 + \ldots + q_{n-1}b_n)\,.\end{aligned}$$

Da der letzte große Summand ein Vielfaches von 11 ist, ist die Zahl y genau dann durch 11 teilbar, wenn der erste Summand durch 11 teilbar ist.
Dieser erste Summand ist aber genau die alternierende Quersumme $AQ(y) = b_1 - b_2 + b_3 - \ldots \pm b_n$ von y, womit die Teilbarkeitsregel bewiesen ist.

Aufgabe 2

Eine Lösung der Gleichung $x^2 - 6x + 7 = 0$ hat an ihrer 2007. Nachkommastelle die Ziffer 8. Welche Ziffer hat die andere Lösung in ihrer 2007. Nachkommastelle?

Lösung:

Es sind $3+\sqrt{2}$ und $3-\sqrt{2}$ die beiden Lösungen der Gleichung $x^2-6x+7 = 0$. Sei a diejenige Lösung mit der Ziffer 8 in ihrer 2007. Nachkommastelle und b die andere.
Offensichtlich gilt $a + b = 6$.
Außerdem sind a und b beide nicht negativ und haben als irrationale Zahlen unendlich viele von Null verschiedene Nachkommastellen. Wir schreiben:

$$\begin{aligned}a &= a_0{,}a_1a_2\ldots \\ b &= b_0{,}b_1b_2\ldots\end{aligned}$$

mit den Ziffern $a_i, b_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$.

Angenommen, es wäre $a_0 + b_0 \geq 6$, dann wäre $a + b > 6$, da a und b von Null verschiedene Nachkommastellen besitzen. Außerdem wäre $a + b < 6$ im Falle von $a_0 + b_0 < 5$, da nicht alle Nachkommastellen Neunen sind – zumindest ist $a_{2007} = 8$.
Es folgt $a_0 + b_0 = 5$ und somit $0{,}a_1a_2a_3 \ldots + 0{,}b_1b_2b_3 \ldots = 1$.

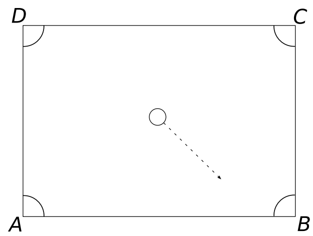
Nun betrachten wir die erste Nachkommastelle. Wir nehmen an, es wäre $a_1 + b_1 \geq 10$. Dann wäre $0{,}a_1a_2a_3 \ldots + 0{,}b_1b_2b_3 \ldots > 1$, da es weitere von Null verschiedene Nachkommastellen gibt. Andererseits wäre $0{,}a_1a_2a_3 \ldots + 0{,}b_1b_2b_3 \ldots < 1$, falls $a_1 + b_1 < 9$ wäre. Es folgt, dass $a_1 + b_1 = 9$ ist, und somit muss $0{,}0a_2a_3 \ldots + 0{,}0b_2b_3 \ldots = 0{,}1$ gelten.

Induktiv kann man nun schließen, dass $a_i + b_i = 9$ für alle $i \geq 1$ gilt.

Mit $a_{2007} = 8$ folgt also: $b_{2007} = 9 - a_{2007} = 1$.

Aufgabe 3

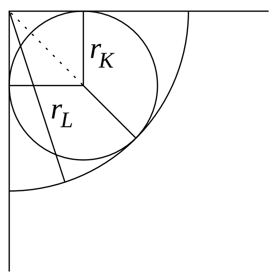
Ein Billardtisch ist 128 cm lang und 88 cm breit. An den vier Ecken hat er je ein viertelkreisförmiges Loch, durch das eine Billardkugel mit 5 cm Radius genau hindurchpasst.
Wie groß ist der Radius der Viertelkreise der Löcher?



Zu Beginn liegt eine Kugel genau in der Mitte des Tisches; ansonsten ist der Tisch leer. Die Kugel wird langsam im 45°-Winkel zu den Seiten gestoßen.
In welches Loch wird die Kugel fallen, wenn die Reibung vernachlässigbar ist?

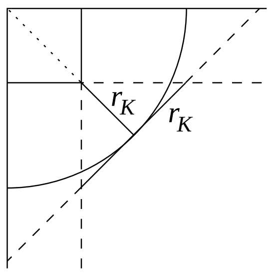
Lösung:

Wie gefordert berechnen wir zuerst die Größe der Löcher. Dazu hilft die folgende Skizze:

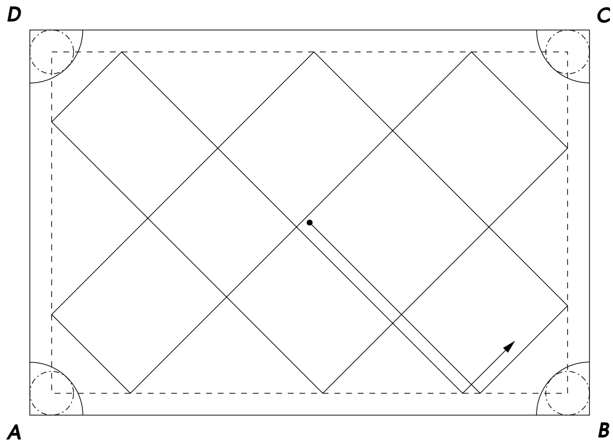


Aus Symmetriegründen berührt die Kugel, wenn sie im Loch steckt, den Viertelkreisbogen des Loches genau auf der Winkelhalbierenden. Daher ist der Radius r_L des Loches die Summe des Radius der Kugel $r_K = 5\,\text{cm}$ und des Abstandes des Kugelmittelpunktes von der Ecke. Dieser Abstand ist $\sqrt{2}\cdot 5\,\text{cm}$, also ist $r_L = 5(1+\sqrt{2})\,\text{cm} \approx 12{,}071\,\text{cm}$.

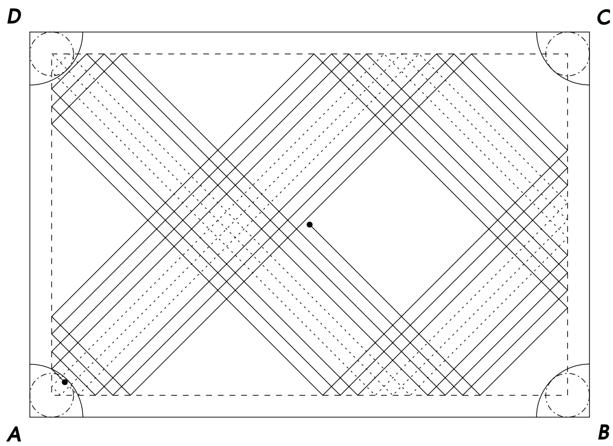
Beim zweiten Teil der Aufgabe konnte man sich an zwei Stellen vertun – vielleicht war unsere Formulierung, was die zweite Stelle angeht, nicht perfekt, dafür möchten wir dann um Entschuldigung bitten.
Die Kugel läuft auf ihrer Bahn natürlich genau so lange, bis sie die Bande berührt. Da sie einen Radius von 5 cm hat, ist ihr Mittelpunkt von der Bande dann noch 5 cm entfernt. Man kann sich die Bahn der Kugel also so vorstellen, dass der Mittelpunkt immer an den Rändern eines Rechtecks zurückgeworfen wird, dessen Kantenlängen in beiden Richtungen um $2 \cdot 5\,\text{cm}$ kürzer sind als die Längen des Billardtisches. (Das war der eine Fehler, der häufig vorkam. „Ausnahmsweise“ haben wir, obwohl Mathematiker das ja sonst gerne tun, nicht der Einfachheit halber mit einem nur punktförmigen Objekt rechnen wollen.) Dieses Rechteck sei *effektives Rechteck* genannt.
Die nächste Frage ist nun: Wann fällt die Kugel ins Loch? Nicht etwa nur dann, wenn sie sich dem Loch auf der Winkelhalbierenden der Ecke nähert. (Das war der zweite Fehler.) Sondern ganz allgemein dann, wenn ihr Auflagepunkt über den Lochviertelkreis kommt. Dazu betrachten wir die Tangente an diesen Viertelkreis im 45°-Winkel. Sie trifft auf das effektive Rechteck in einer Entfernung von $\sqrt{r_K^2 + r_K^2} = \sqrt{2} \cdot r_K \approx 7{,}071\,\text{cm}$ von dessen Ecke. Die Kugel kann den Rand offenbar nur auf Punkten erreichen, deren Koordinaten beide ganzzahlig sind, also fällt die Kugel genau dann in ein Loch, wenn ihr Mittelpunkt maximal 7 cm entfernt von der Ecke an den Rand des effektiven Rechtecks stößt.



Jetzt können wir uns die genaue Bahn der Kugel ansehen, wobei wir nur im effektiven Rechteck rechnen, was ja nun eine Größe von 118 mal 78 Zentimetern hat. Den Nullpunkt legen wir nach links unten: Die Kugel startet dann beim Punkt (59, 39) und rollt zuerst nach rechts unten. Daher trifft sie beim Punkt (98, 0) auf die untere Bande, dann bei (118, 20) auf die rechte, bei (60, 78) auf die obere, bei (0, 18) auf die linke, bei (18, 0) wieder auf die untere Bande und weiter über die Bandenpunkte (96, 78), (118, 56), (62, 0), (0, 62), (16, 78) zum Punkt (94, 0) auf der unteren Bande. Bislang war kein Punkt nahe genug an einer Ecke dran. Der letzte Punkt ist genau 4 cm von dem ersten Berührpunkt entfernt und die Kugel rollt in dieselbe Richtung. Daher verschieben sich die anderen Berührpunkte auch um jeweils 4 cm.



Beim Weiterzeichnen weiß man also schon, dass sich immer nur eine Koordinate gegenüber einer bereits bekannten um 4 verändert. Außerdem könnte man sich weiter überlegen, wo sich die Kugel im Laufe der weiteren Bahn einem Loch annähert und wo nicht und so zum Ergebnis kommen. Der Einfachheit halber listen wir hier weiter die Berührpunkte auf, bis ein Loch erreicht wird:
(94, 0), (118, 24), (64, 78), (0, 14), (14, 0), (92, 78), (118, 52), (66, 0), (0, 66), (12, 78), (90, 0) (wieder ist ein Rundgang vollendet), (118, 28), (68, 78), (0, 10), (10, 0), (88, 78), (118, 48), (70, 0), (0, 70), (8, 78), (86, 0) (noch ein Rundgang ohne Loch …), (118, 32), (72, 78), (0, 6). Dieser Berührpunkt ist dicht genug am Loch dran, so dass die Kugel in Loch A fällt. (Man kann leicht nachrechnen, dass die Kugel wirklich auch noch die Bande berührt, denn der Viertelkreis schneidet die Seiten des effektiven Rechtecks des Kugelmittelpunktes in einem Abstand von etwa 5,986 cm.)



In der Zeichnung ist gestrichelt auch noch der weitere Weg eingezeichnet, den die Kugel nehmen *würde*, wenn sie nur dann ins Loch fallen würde, wenn sie auf der Winkelhalbierenden ankommt. In diesem Fall würde sie ins Loch D fallen.

Man kann die Aufgabe auch etwas anders zeichnerisch lösen, dies sei hier nur kurz skizziert: Das effektive Rechteck kann man immer wieder an seinen

Seiten spiegeln, so dass der Weg der Kugel zu einer Geraden wird. Am besten macht man das so, dass auf Karopapier eine Kästchenbreite in Wirklichkeit 4 Zentimetern entspricht, dann kann man die Gerade sehr leicht einzeichnen. Nun muss man noch entsprechend auf die Lochbereiche in der Nähe der Geraden aufpassen – dabei muss man darauf achten, dass es keine Vollkreise um einen Punkt sind, sondern dass die Bereiche von vier Kreisbögen begrenzt werden, welche als Schnitt mit dem effektiven Rechteck entstehen. Man muss aber diese Bereiche nicht einzeichnen, es reicht, die Mittelpunkte der Lochbereiche zu markieren und – wie oben berechnet – zu schauen, ob die Gerade der Bahn der Kugel waagerecht oder senkrecht den Abstand von 7 oder weniger Zentimetern erreicht. Zum Schluss muss man noch, wenn man das nicht schon vorher getan hat, zurückrechnen, welchem Loch der gestreifte Punkt denn entspricht.

Etwas zahlentheoretisch kann man diese Betrachtungsweise auch umformulieren zu der Aufgabe: „Finde die kleinste positive ganze Zahl n mit der Eigenschaft, dass $59 + n$ ein Vielfaches von 118 ist und dass $39 + n$ zu einem Vielfachen von 78 eine Differenz von höchstens 7 hat.“ Dieses n führt dann zur Lösung.

Aufgabe 4

Auf einem kreisrunden Erdbeerkuchen sind neben vielen Erdbeeren auch zwei (für unsere Rechnungen: punktförmige) Heidelbeeren zufällig verstreut.

a) Der Kuchen wird in n gleiche Stücke geteilt, indem mit dem Messer von der Mitte des Kuchens n gerade Schnitte nach außen gemacht werden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind dann die beiden Heidelbeeren auf demselben Stück?

b) Nun wird der Kuchen durch die gleiche Art von Schnitten in n Stücke zufälliger Größe geteilt. Man stelle sich zum Beispiel vor, dass der Kuchen auf einem Drehtablett liegt und vor jedem Schnitt der Kuchen zufällig irgendwie verdreht wird.

   Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind die beiden Heidelbeeren nun in demselben Stück?

Lösung:

Um uns die Vorstellung zu erleichtern, gehen wir davon aus, dass die Heidelbeeren erst nach dem Backen und nach dem Schneiden zufällig auf dem Kuchen verteilt werden, und zwar eine nach der anderen.
Dies dürfen wir tun, da das Schneiden der Stücke und das Verteilen der Beeren unabhängig voneinander geschehen.

Bei n Kuchenstücken gibt es für jede der beiden Beeren n verschiedene Möglichkeiten, auf welchem Stück sie landen können. Bei zwei Beeren macht das insgesamt n^2 Möglichkeiten, die im Fall von identischen Stückgrößen auch alle gleichwahrscheinlich sind.

Da in genau n der n^2 Fälle die beiden Beeren auf demselben Stück liegen, beträgt die Wahrscheinlichkeit p für dieses Ereignis gerade $p = n^2/n = 1/n$.

Im zweiten Fall – hier ist die Größe der Kuchenstücke zufällig – gehen wir ein wenig anders an das Problem heran:
Wir ersetzen in Gedanken die Heidelbeeren durch (rote) Linien, die vom Kuchenmittelpunkt aus durch die jeweilige Heidelbeere bis zum Rand des Kuchens verlaufen. Zusammen mit den n eigentlichen (schwarzen) Schnitten haben wir nun $n+2$ „Trennlinien“, die im Folgenden (gleichzeitig) zufällig auf dem Kuchen verteilt werden.
Nach dem Verteilen der Trennlinien nummerieren wir deren Positionen im Uhrzeigersinn, beginnend an der „12-Uhr-Position“.

Für dieses spezielle Winkelmuster gibt es nun $\frac{(n+2)(n+1)}{2} = \binom{n+2}{2}$ Möglichkeiten, wie sich die zwei roten Trennlinien auf die $n+2$ Positionen verteilen könnnen. Dabei sind alle dieser Möglichkeiten gleichwahrscheinlich.
Bei genau $n+2$ dieser Möglichkeiten liegen die beiden roten Trennlinien nebeneinander, was äquivalent dazu ist, dass die beiden Heidelbeeren auf demselben Stück liegen.
Dies gilt für jedes mögliche Winkelmuster.

Das heißt: Die Wahrscheinlichkeit für das gesuchte Ereignis beträgt

$$\mathbb{P}(B) = \frac{n+2}{\frac{(n+2)(n+1)}{2}} = \frac{2}{n+1}.$$

Variante:
Man kann die Aufgabe auch mithilfe der Integralrechnung lösen. Dazu gehen wir wieder noch etwas anders an die Aufgabe heran:
Wir gehen wie in der Aufgabenstellung davon aus, dass der Kuchen erst geschnitten wird, nachdem die Heidelbeeren schon verteilt sind. Bevor wir jedoch den ersten Schnitt machen, malen wir in Gedanken zwei Strecken auf den Kuchen, die beide vom Mittelpunkt durch je eine Heidelbeere bis zum Rand des Kuchens verlaufen. Diese trennen den Kuchen also in zwei Kreissektoren mit den Winkeln α_1 und $\alpha_2 = 360° - \alpha_1$ auf.
Damit das Ereignis $B :=$ {„beide Beeren liegen auf demselben Stück“} eintritt, müssen alle n Schnitte, deren Position ja zufällig ist, entweder in dem einen oder in dem anderen der beiden gedachten Sektoren liegen.

Da ein einzelner Schnitt mit Wahrscheinlichkeit $\alpha_1/360°$ in den ersten und mit Wahrscheinlichkeit $\alpha_2/360°$ in den zweiten Sektor fällt, beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B für einen festen Winkel $\alpha_1 =: \alpha$

$$\mathbb{P}(B_\alpha) = \left(\frac{\alpha}{360}\right)^n + \left(1 - \frac{\alpha}{360}\right)^n.$$

Approximativ können wir $\mathbb{P}(B)$ nun berechnen, indem wir uns vorstellen, α würde nur ganzzahlige Winkel von 1° bis 360° annehmen, und zwar jeden davon mit derselben Wahrscheinlichkeit $p_\alpha = \frac{1}{360}$. Dann würden wir alle B_α, jeweils gewichtet mit der Wahrscheinlichkeit $p_\alpha = \frac{1}{360}$, aufsummieren und erhielten so die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{\alpha=1}^{360} \frac{1}{360}\mathbb{P}(B_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^{360} \frac{1}{360}\left(\left(\frac{\alpha}{360}\right)^n + \left(1 - \frac{\alpha}{360}\right)^n\right).$$

Da aber α nicht nur diese endlich vielen Werte annehmen muss, sondern jeden Wert aus dem Intervall $[0^\circ, 360^\circ]$ annehmen kann, müssen wir – um das exakte Ergebnis zu erhalten – über den Ausdruck, über den wir eben summiert haben, integrieren:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \int_0^{360} \frac{1}{360}\mathbb{P}(B_\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \int_0^{360} \frac{1}{360}\left(\left(\frac{\alpha}{360}\right)^n + \left(1 - \frac{\alpha}{360}\right)^n\right)\,\mathrm{d}\alpha \\ &= \frac{1}{360}\left[\frac{360}{n+1}\left(\frac{\alpha}{360}\right)^{n+1}\right]_0^{360} + \frac{1}{360}\left[-\frac{360}{n+1}\left(1 - \frac{\alpha}{360}\right)^{n+1}\right]_0^{360} \\ &= \frac{1}{n+1} - \left(-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{2}{n+1}.\end{aligned}$$

Verallgemeinerung:
Der erste Lösungsansatz lässt sich bequem auf m zu verteilende Heidelbeeren verallgemeinern:
Es gibt $\binom{n+m}{m}$ Möglichkeiten, die m Heidelbeeren auf die $n+m$ Positionen zu verteilen; bei $n+m$ davon liegen alle Heidelbeeren auf demselben Stück. Also beträgt die Wahrscheinlichkeit für ebendieses Ereignis

$$B' := \{\text{„alle } m \text{ Beeren liegen auf demselben Stück“}\}$$

genau

$$\mathbb{P}(B') = \frac{m!}{(n+m-1)(n+m-2)\cdot\ldots\cdot(n+1)}.$$