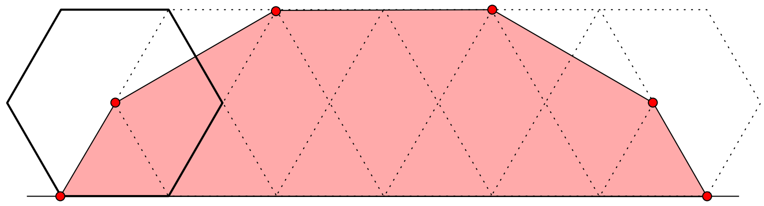
athematischer
orrespondenz-
zirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Trigonometrische Lösung zu Aufgabe 4 von Blatt 66

Aufgabe 4

Ein regelmäßiges Sechseck „rollt“ entlang einer Geraden, indem es fortlaufend über die rechte der beiden auf der Geraden liegenden Ecken gekippt wird. Zu Beginn ist die Position der linken unteren Ecke des Sechsecks markiert. Nach jeder Kippung wird wieder die Position dieser Ecke markiert. Nach fünf solcher Kippungen berührt die betrachtete Ecke zum ersten Mal wieder die Gerade.



Zeige, dass das Flächenstück, das durch die markierten Punkte und die Gerade begrenzt ist, genau dreimal so groß ist wie die Fläche des Sechsecks. Wie ist das Verhältnis der entsprechenden Flächen bei anderen regelmäßigen n-Ecken?

Alternativlösung:

Als Ergänzung zu der in den Beispiellösungen vorgeführten elementargeometrischen Lösung geben wir hier unter Verwendung der trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus einen Beweis dafür, dass im allgemeinen Fall gilt:

Für jedes regelmäßige n-Eck ist die sich ergebende Figur genau dreimal so groß wie das n-Eck.

Es stellt sich vielleicht die Frage, warum wir das machen, wo doch die andere Lösung um so vieles kürzer ist? Die einfachste – und neben anderen ebenso richtige – Antwort wäre, dass natürlich immer verschiedene Lösungswege interessant sind. Zugegeben sei auch: Diese Lösung hatten wir als erste Lösung gefunden und wollten die Tipparbeit nicht umsonst gemacht haben. Das war aber bei weitem nicht der einzige Grund: Die Lösung ist auch insofern von Interesse, als man hier einmal an einem nichttrivialen Beispiel sehen kann, wie die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen helfen können, komplizierte Terme zu vereinfachen – siehe dazu zum Beispiel die Berechnung von (5).

Umgekehrt kann man daran auch, wenn man will, den Wert der Elementargeometrie ermessen, die heute leider vielfach an den Rand gedrängt wird: Obwohl mit den Additionstheoremen schon sehr leistungsfähige Hilfsmittel genutzt werden, ist die elementargeometrische Lösung weitaus kürzer und – je nach Geschmack – eleganter.

Beweis: Wir benutzen ein paar der Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha, \tag{1}$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$

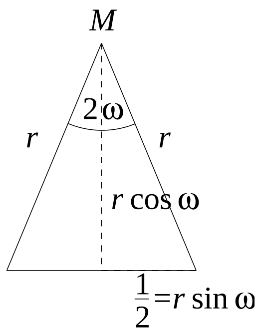
insb. $$-\sin(k\omega)\cos((k+2)\omega) + \sin((k+2)\omega)\cos(k\omega) = \sin(2\omega), \tag{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

insb. $$\cos(k\omega) + \cos((k+2)\omega) = 2\cos\omega\cos((k+1)\omega). \tag{3}$$

Im Folgenden sei $\omega := \frac{360^\circ}{2n}$. Wir nehmen an, dass das n-Eck die Seitenlänge 1 hat. Der Abstand r eines Eckpunkts vom Mittelpunkt M des n-Ecks ergibt sich dann aus (vgl. Skizze)

$$r\cdot\sin\omega = \frac{1}{2} \quad \text{zu} \quad r = \frac{1}{2\sin\omega}.$$



Der Flächeninhalt eines solchen regelmäßigen n-Ecks ergibt sich dann anhand der gleichen Skizze zu

$$F = n\cdot\frac{2r\sin\omega\cdot r\cos\omega}{2} = nr^2\sin\omega\cos\omega = \frac{nr\cos\omega}{2}. \tag{4}$$

Es sei nun noch festgelegt:

$$m := \begin{cases} n, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ n-1, & \text{falls } n \text{ gerade ist.} \end{cases}$$

Bemerkung: m ist also stets ungerade.

Schließlich leiten wir für den Fall „n ungerade", das heißt insbesondere $m = n$ und damit $m\cdot\omega = 180^\circ$, eine Hilfsformel her: Sei

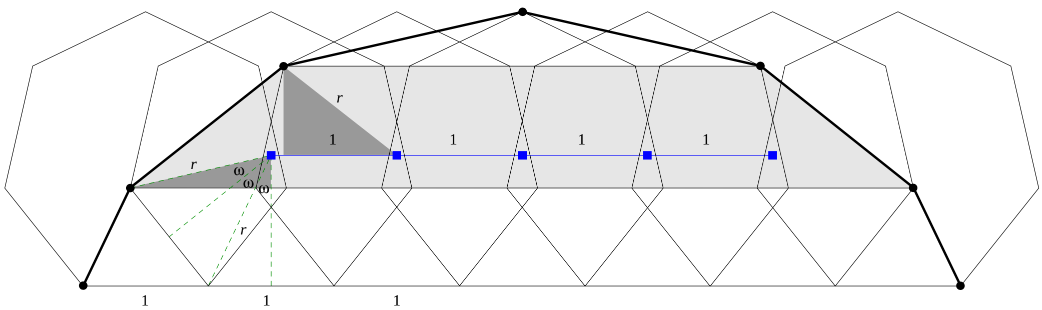
$$\begin{aligned} s &:= \cos\omega + 2\cos(3\omega) + 2\cos(5\omega) + \ldots + 2\cos((m-2)\omega) + \cos(m\omega) \\ &\overset{(3)}{=} 2\cos\omega\cdot\big(\cos(2\omega) + \cos(4\omega) + \ldots + \cos((m-1)\omega)\big) \\ &= -2\cos\omega\cdot\left(\frac{1}{2} + \frac{-1}{2} - \cos(2\omega) - \cos(4\omega) - \ldots - \cos((m-1)\omega)\right) \end{aligned}$$

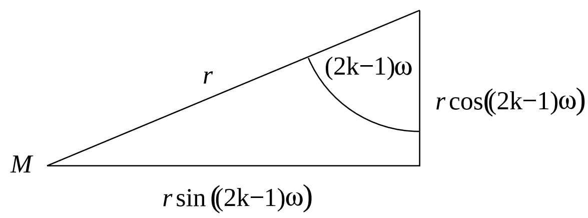
$$
\begin{aligned}
&= -2\cos\omega \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(m\omega)}{2} + \cos((m-2)\omega) + \cos((m-4)\omega) + \dots \right. \\
&\qquad \left. + \cos\omega \right) \qquad\qquad \text{wegen } \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha \\
&= -\cos\omega \cdot (1 + \cos(m\omega) + 2\cos((m-2)\omega) + 2\cos((m-4)\omega) + \dots \\
&\qquad + 2\cos\omega) \\
&= -\cos\omega \cdot (1 + s + \cos\omega).
\end{aligned}
$$

Dann folgt also:

$$
s = \frac{1+\cos\omega}{1+\cos\omega}(-\cos\omega) = -\cos\omega. \tag{5}
$$

Nun kommen wir endlich zur eigentlichen Flächenberechnung der Figur. Dazu zerlegen wir sie in symmetrische Trapeze – und erinnern uns daran, dass der Flächeninhalt eines Trapezes die Hälfte des Produktes der Höhe mit der Summe der beiden parallelen Seitenlängen ist.
Bei der Figur werden durch die gegebene Konstruktion insgesamt n Punkte eingezeichnet; sie seien der Reihe nach durchnummeriert. Wir nehmen an, dass wir das Trapez betrachten, das vom k-ten, $(k+1)$-ten, $(n-k)$-ten und $(n-k+1)$-ten Punkt gebildet wird, $1 \leq k < \lceil \frac{n}{2} \rceil = \frac{m+1}{2}$. Dass dabei $k+1 = n-k$ sein kann (für n ungerade), ist nicht schlimm, alle Formeln gelten auch für diesen entarteten Fall.
Der k-te Punkt liegt auf der k-ten Kopie des n-Ecks; die Mittelpunkte des k-ten und des $(n-k+1)$-ten n-Ecks haben einen (horizontalen) Abstand $n-2k+1$. Die Grundseite des betrachteten Trapezes hat daher eine Länge von $2r\sin((2k-1)\omega)+n-2k+1$. Entsprechendes gilt für die Oberseite, und die Höhe ergibt sich über den Kosinus:





Die Fläche des betrachteten Trapezes ist also

$$\begin{aligned}T_k &:= \frac{1}{2}((2r\sin((2k-1)\omega)+n-2k+1)+(2r\sin((2k+1)\omega)+n-2k-1))\\ &\quad\cdot r(\cos((2k-1)\omega)-\cos((2k+1)\omega))\end{aligned}$$

Schließlich ist die Fläche G der gesamten Figur:

$$\begin{aligned}G = {} & \frac{1}{2}((2r\sin\omega+n-1)+(2r\sin(3\omega)+n-3))\cdot r(\cos\omega-\cos(3\omega))\\ & +\frac{1}{2}((2r\sin(3\omega)+n-3)+(2r\sin(5\omega)+n-5))\cdot r(\cos(3\omega)-\cos(5\omega))\\ & \dots\\ & +\frac{1}{2}((2r\sin((m-4)\omega)+n-m+4)+(2r\sin((m-2)\omega)+n-m+2))\\ & \qquad\cdot r(\cos((m-4)\omega)-\cos((m-2)\omega))\\ & +\frac{1}{2}((2r\sin((m-2)\omega)+n-m+2)+(2r\sin(m\omega)+n-m))\\ & \qquad\cdot r(\cos((m-2)\omega)-\cos(m\omega))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}= {} & \left.\begin{aligned} & -r^2\sin\omega\cos(3\omega)+r^2\sin(3\omega)\cos\omega\\ & \qquad+r^2\sin\omega\cos\omega-r^2\sin(3\omega)\cos(3\omega)\\ & -r^2\sin(3\omega)\cos(5\omega)+r^2\sin(5\omega)\cos(3\omega)\\ & \qquad+r^2\sin(3\omega)\cos(3\omega)-r^2\sin(5\omega)\cos(5\omega)\\ & \dots\\ & -r^2\sin((m-2)\omega)\cos(m\omega)+r^2\sin(m\omega)\cos((m-2)\omega)\\ & \qquad+r^2\sin((m-2)\omega)\cos((m-2)\omega)-r^2\sin(m\omega)\cos(m\omega)\end{aligned}\right\} =: L\\ & \left.\begin{aligned} & +r\cdot\big((n-2)\cos\omega-(n-2)\cos(3\omega)\\ & \qquad+(n-4)\cos(3\omega)-(n-4)\cos(5\omega)\\ & \qquad\dots\\ & \qquad+(n-m+1)\cos((m-2)\omega)-(n-m+1)\cos(m\omega)\big)\end{aligned}\right\} =: R\end{aligned}$$

Um noch halbwegs übersichtlich zu bleiben, bearbeiten wir die beiden Teilsummen separat. Außerdem unterscheiden wir noch etwas später, ob n gerade oder ungerade ist. Als Erstes betrachten wir den ersten Teil der Summe.

$$\begin{aligned}L = {} & -r^2\sin\omega\cos(3\omega)+r^2\sin(3\omega)\cos\omega\\ & \qquad+r^2\sin\omega\cos\omega-r^2\sin(3\omega)\cos(3\omega)\\ & -r^2\sin(3\omega)\cos(5\omega)+r^2\sin(5\omega)\cos(3\omega)\\ & \qquad+r^2\sin(3\omega)\cos(3\omega)-r^2\sin(5\omega)\cos(5\omega)\\ & \dots\\ & -r^2\sin((m-2)\omega)\cos(m\omega)+r^2\sin(m\omega)\cos((m-2)\omega)\\ & \qquad+r^2\sin((m-2)\omega)\cos((m-2)\omega)-r^2\sin(m\omega)\cos(m\omega)\end{aligned}$$

$$\stackrel{(2)}{=} r^2 \left(\frac{m-1}{2} \sin(2\omega) + \sin\omega\cos\omega - \sin(m\omega)\cos(m\omega) \right)$$
$$\stackrel{(1)}{=} r^2 \left((m-1)\sin\omega\cos\omega + \sin\omega\cos\omega - \sin(m\omega)\cos(m\omega)\right)$$

Wenn n ungerade ist, ist $m = n$ und damit $m\omega = 180°$. Es folgt also

$$L = r^2(m \cdot \sin\omega\cos\omega - 0) = nr^2 \sin\omega\cos\omega = F.$$

Falls n gerade ist, ist $m = n-1$ und damit $m\omega = 180° - \omega$. Damit ergibt sich

$$L = r^2((n-2)\sin\omega\cos\omega + \sin\omega\cos\omega - \sin\omega(-\cos\omega)) = nr^2 \sin\omega\cos\omega = F.$$

Nun zum zweiten Teil der Summe:

$$\begin{aligned} R &= r \cdot \big((n-2)\cos\omega - (n-2)\cos(3\omega) + (n-4)\cos(3\omega) - (n-4)\cos(5\omega) \\ &\qquad \ldots + (n-m+1)\cos((m-2)\omega) - (n-m+1)\cos(m\omega)\big) \\ &= r \cdot ((n-2)\cos\omega - 2\cos(3\omega) - 2\cos(5\omega) - \ldots - 2\cos((m-2)\omega) \\ &\qquad - (n-m+1)\cos(m\omega)) \end{aligned}$$

Wenn n ungerade ist, kommt hier die Hilfsformel (5) zur Anwendung:

$$\begin{aligned} R &= r \cdot ((n-1)\cos\omega - s - (n-m)\cos(m\omega)) \\ &= r \cdot ((n-1)\cos\omega + \cos\omega - (n-n)\cos(m\omega)) \\ &= nr\cos\omega \\ &= 2F \end{aligned}$$

nach (4).

Wenn hingegen n gerade ist, ist wegen $m = n-1$ dann $\cos(k\omega) = -\cos((m-(k-1))\omega)$. Also fallen die meisten Summanden paarweise weg; auch ein eventuell (wenn $4 \nmid n$) vorhandener mittlerer Summand mit $k = \frac{n}{2}$ fällt wegen $\cos 90° = 0$ weg. Übrig bleibt:

$$\begin{aligned} R &= r \cdot ((n-2)\cos\omega + (n-m+1)\cos\omega) \\ &= r \cdot ((n-2)\cos\omega + 2\cos\omega) \\ &= nr\cos\omega \\ &= 2F \end{aligned}$$

wiederum nach (4).

In allen Fällen ergibt sich also:

$$G = L + R = F + 2F = 3F$$

und damit der Beweis der Richtigkeit der Vermutung.