Beispiellösungen zu Blatt 67

Aufgabe 1

Finde alle natürlichen Zahlen n, für die $\frac{n+9}{n-9}$ eine natürliche Zahl ergibt.
Sei allgemeiner k eine natürliche Zahl – bestimme analog die Menge aller natürlichen Zahlen n, für die $\frac{n+k}{n-k}$ eine natürliche Zahl ist.

Lösung:

Wir betrachten gleich den allgemeinen Fall mit einer natürlichen Zahl k. Die an die gesuchte natürliche Zahl n gestellte Bedingung, dass auch

$$\frac{n+k}{n-k} = \frac{n-k+2k}{n-k} = \frac{n-k}{n-k} + \frac{2k}{n-k} = 1 + \frac{2k}{n-k}$$

eine natürliche Zahl ist – zu denen Null ja (meistens)[1] hinzugezählt wird –, ist dann gleichbedeutend damit, dass $\frac{2k}{n-k}$ entweder -1 oder auch eine natürliche Zahl ist.
Aus dem ersten Fall folgt $-(n-k) = 2k$, also $-n = k$. In natürlichen Zahlen hat das genau eine Lösung: $n = k = 0$. Da dann jedoch der Nenner $n-k$ auch null wäre, ist dies keine Lösung der Aufgabe.
Also ist $\frac{2k}{n-k}$ eine natürliche Zahl. Weil der Zähler $2k$ nach Voraussetzung nichtnegativ ist, ist dies genau dann der Fall, wenn $m := n-k$ ein positiver[2] Teiler von $2k$ ist.
Also sind die Lösungen des Problems alle $n \in \mathbb{N}$, die sich in der Form $n = m + k$ schreiben lassen, wobei für m jeder positive Teiler von $2k$ gewählt werden kann.

Für $k = 0$ bedeutet das übrigens, dass jede natürliche Zahl n ungleich null eine Lösung ist, wie man auch sofort am Bruch $\frac{n+k}{n-k} = \frac{n}{n} = 1$ sieht.

Im Spezialfall $k = 9$ wiederum bedeutet dies, dass $n-9$ ein Teiler von 18 sein muss, also eine der Zahlen 1, 2, 3, 6, 9, 18. Somit ergeben sich die Lösungen:

n	10	11	12	15	18	27
$n-9$	1	2	3	6	9	18
$\frac{n+9}{n-9}$	19	10	7	4	3	2

[1] Über die Frage, ob Null eine natürliche Zahl ist, kann man sich hervorragend streiten, wenn man will ... Wir hoffen, richtig beobachtet zu haben, dass in der Schule in der Regel Null eine natürliche Zahl ist.

[2] Die Einschränkung auf positive Teiler ist für $2k = 0$ nötig, da 0 zwar ein Teiler von 0 ist, weil es – so die Definition – eine positive ganze Zahl j mit $0 = j \cdot 0$ gibt (das geht hier natürlich für alle positiven ganzen j), aber „$\frac{0}{0}$“ keine natürliche Zahl ist.

Aufgabe 2

Zeige, dass die „Jahreswechselzahl“

$$111\ldots11222\ldots225,$$

die mit 2007 Einsen und 2008 Zweien und einer Fünf geschrieben wird, eine Quadratzahl ist.

Lösung:

Wir formen die Jahreswechselzahl geschickt um und erhalten:

$$\begin{aligned}
111\ldots11222\ldots225 &= \underbrace{111\ldots11}_{2007\text{-mal}}\cdot 10^{2009} + 2\cdot\underbrace{111\ldots11}_{2007\text{-mal}}\cdot 10^{2} + 25\\
&= \frac{1}{9}\cdot\left(\underbrace{999\ldots99}_{2007\text{-mal}}\cdot 10^{2009} + 2\cdot\underbrace{999\ldots99}_{2007\text{-mal}}\cdot 10^{2} + 25\cdot 9\right)\\
&= \frac{1}{9}\cdot\big((10^{2007}-1)\cdot 10^{2009} + 2\cdot(10^{2007}-1)\cdot 10^{2} + 25\cdot 9\big)\\
&= \frac{1}{9}\cdot\big(10^{2007+2009} - 10^{2009} + 2\cdot 10^{2009} - 2\cdot 10^{2} + 25\cdot 9\big)\\
&= \frac{1}{9}\cdot\big(10^{4016} + 10^{2009} - 200 + 225\big)\\
&= \frac{1}{9}\cdot\big(10^{2008+2008} + 10\cdot 10^{2008} + 25\big)\\
&= \frac{1}{9}\cdot\big((10^{2008})^{2} + 2\cdot 5\cdot 10^{2008} + 5^{2}\big)\\
&= \frac{1}{9}\cdot\big(10^{2008}+5\big)^{2}\ \text{ nach der ersten Binomischen Formel}\\
&= \left(\frac{10^{2008}+5}{3}\right)^{2}.
\end{aligned}$$

Die Jahreswechselzahl ist also genau dann eine Quadratzahl, wenn $\frac{10^{2008}+5}{3}$ eine natürliche Zahl, d. h. falls $10^{2008}+5$ durch 3 teilbar ist.
Da die Quersumme $Q(10^{2008}+5) = 1+5 = 6$ durch 3 teilbar ist, ist auch die Zahl $10^{2008}+5$ selbst durch 3 teilbar. Man sieht die Teilbarkeit aber auch der Zahl direkt an, denn es gilt

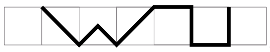
$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\big(10^{2008}+5\big) &= \frac{1}{3}\cdot\Big(\underbrace{999\ldots99}_{2008\text{-mal}}+1+5\Big) = \frac{1}{3}\cdot\Big(\underbrace{999\ldots99}_{2008\text{ mal}}+6\Big)\\
&= \underbrace{333\ldots33}_{2008\text{-mal}}+2 = \underbrace{333\ldots33}_{2007\text{-mal}}5\,.
\end{aligned}$$

Die Jahreswechselzahl ist damit die Quadratzahl

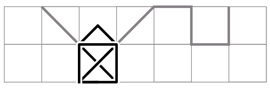
$$111\ldots11222\ldots225 = \Big(\underbrace{333\ldots33}_{2007\text{-mal}}5\Big)^{2}.$$

Aufgabe 3

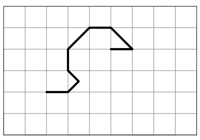
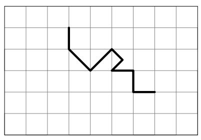
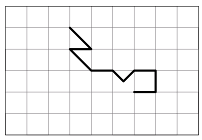
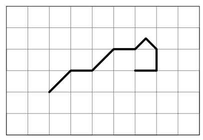
Die Crew um Käpt'n Sperling kreuzt im Nordmeer herum. Einige Schiffe werden gesichtet, doch der Chef bläst nie zum Angriff, was die Crew wundert. Darauf angesprochen, erklärt Sperling: „Seht ihr das hell erleuchtete Haus da hinten auf der Insel? Das ist das Haus vom Nikolaus. Und die meisten Schiffe hier liefern ihm Nachschub für die Weihnachtsgeschenke, bei denen er dem Weihnachtsmann hilft. Ehrensache, dass wir die nicht plündern! Die Schiffe erkennt man übrigens an einem speziellen Flaggentyp: Auf ihr ist ein Streckenzug, dessen einzelne Strecken in der gegebenen Reihenfolge Längen haben, wie sie auch auftreten können, wenn man das bekannte ‚Haus vom Nikolaus' zeichnet."
Ein Beispiel für einen Streckenzug, der auf einer echten Flagge abgebildet sein könnte, ist der folgende:

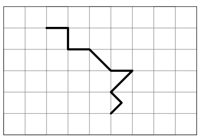
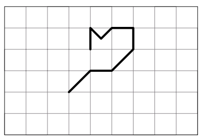
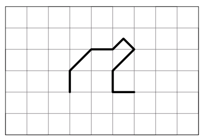
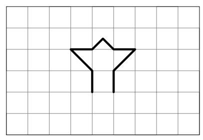
,

denn durch Umformen des Streckenzuges erhält man:



Welche der folgenden Flaggen sind echt, welche sind Fälschungen?

1: 
2: 
3: 
4: 

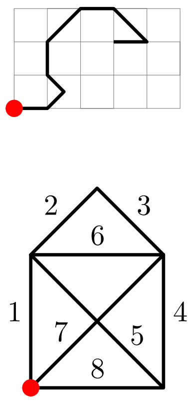
5: 
6: 
7: 
8: 

Lösung:

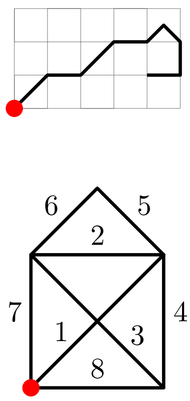
Die Flaggen 1, 4, 6 und 8 sind Originale, die Flaggen 2, 3, 5 und 7 hingegen Fälschungen.

Zunächst geben wir für die vier Originale je eine Möglichkeit an, aus dem gegebenen Streckenzug das Haus vom Nikolaus zu zeichnen:

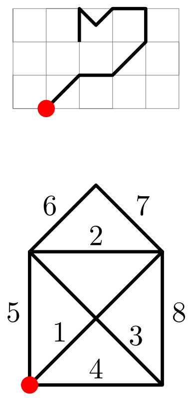
Flagge 1:



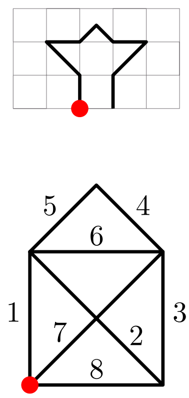
Flagge 4:



Flagge 6:



Flagge 8:



Betrachten wir nun die mutmaßlichen Fälschungen:
Flagge 2: Diese Flagge muss eine Fälschung sein, da man die beiden langen Diagonalen beim Haus vom Nikolaus nicht direkt nacheinander zeichnen kann.

Flagge 3: Da das Haus vom Nikolaus bekanntlich aus genau acht Geradenstücken besteht, dieser Streckenzug aber neun Teile hat, ist auch Flagge 3 eine Fälschung.

Flagge 5: Grundsätzlich gilt: Zeichnet man einen Graphen wie das Haus vom Nikolaus in einem zusammenhängenden Streckenzug und ist einer der Punkte des Graphen weder Anfangs- noch Endpunkt, dann geht von ihm eine gerade Anzahl an Strecken aus. Denn bei jedem „Durchlauf“ des Streckenzuges wird eine Strecke zum Ankommen und eine zum Wegbewegen gebraucht; insgesamt gibt es dann also immer zueinandergehörende Paare von Strecken.[3]
Im Haus vom Nikolaus laufen nun in den beiden unteren Punkten eine ungerade Anzahl von Kanten zusammen. Daher müssen diese beiden Punkte Anfangs- und Endpunkt des Streckenzuges sein. Insbesondere darf also das Dach (bestehend aus den beiden kurzen Diagonalen) nicht am Ende des Streckenzuges sein. Damit ist auch diese Fälschung enttarnt.

Flagge 7: In einem Originalstreckenzug, bei dem eine lange Diagonale direkt am Dach (bestehend aus den beiden kurzen Diagonalen) anschließt, darf zwischen Dach und der zweiten langen Diagonalen nur eine gerade Anzahl von Stücken der Länge 1 liegen. Ansonsten würde die zweite Diagonale in einer Ecke starten, auf welche auch schon die erste Diagonale trifft.
Daher kann schließlich Flagge 7 ebenso kein Original sein.

[3] Die Umkehrung dieser Aussage ist im Allgemeinen nicht richtig: Zum Beispiel ist bei einem Quadrat jeder Anfangspunkt eines durchgehenden Streckenzuges natürlich an einem Punkt mit gerader Anzahl an Kanten.

Aufgabe 4

Die Funktion f habe die Eigenschaft $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$ für alle reellen Zahlen x, y. Zeige, dass f eine konstante Funktion ist.

Lösung:

Wir benutzen die sogenannte *Dreiecksungleichung*: Für alle reellen Zahlen a und b gilt

$$|a + b| \leq |a| + |b| \,.$$

Für alle, die diese in sehr vielen Fällen nützliche Ungleichung nicht kennen, folgt unten ein Beweis.

Seien nun x, y reelle Zahlen. (Für die Vorstellung reicht es, an $x \leq y$ zu denken – für die Rechnung ist es unerheblich.) Sei weiterhin n eine positive ganze Zahl. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= \left| f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}(y-x)\right) + f\left(x + \frac{1}{n}(y-x)\right) - f(y) \right| \\
&\leq \left| f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}(y-x)\right) \right| + \left| f\left(x + \frac{1}{n}(y-x)\right) - f(y) \right| \\
&\qquad\qquad \text{nach der Dreiecksungleichung} \\
&= \left| f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}(y-x)\right) \right| \\
&\quad + \left| f\left(x + \frac{1}{n}(y-x)\right) - f\left(x + \frac{2}{n}(y-x)\right) + f\left(x + \frac{2}{n}(y-x)\right) - f(y) \right| \\
&\leq \left| f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}(y-x)\right) \right| + \left| f\left(x + \frac{1}{n}(y-x)\right) - f\left(x + \frac{2}{n}(y-x)\right) \right| \\
&\quad + \left| f\left(x + \frac{2}{n}(y-x)\right) - f(y) \right| \qquad \text{nach der Dreiecksungleichung} \\
&\leq \ldots \\
&\leq \left| f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}(y-x)\right) \right| + \left| f\left(x + \frac{1}{n}(y-x)\right) - f\left(x + \frac{2}{n}(y-x)\right) \right| \\
&\quad + \ldots + \left| f\left(x + \frac{n-1}{n}(y-x)\right) - f(y) \right|
\end{aligned}$$

Wir haben nun n Summanden der Form

$$\left| f\left(x + \frac{k}{n}(y-x)\right) - f\left(x + \frac{k+1}{n}(y-x)\right) \right|$$

mit $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Nach der Voraussetzung aus der Aufgabenstellung gilt für jeden dieser Summanden

$$\begin{aligned}
&\left| f\left(x + \frac{k}{n}(y-x)\right) - f\left(x + \frac{k+1}{n}(y-x)\right) \right| \\
&\qquad\qquad \le \left| \left(x + \frac{k}{n}(y-x)\right) - \left(x + \frac{k+1}{n}(y-x)\right) \right|^2 \\
&\qquad\qquad = \left| -\frac{1}{n}(y-x) \right|^2 = \frac{1}{n^2}(y-x)^2 .
\end{aligned}$$

Also erhält man

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &\le \frac{1}{n^2}(y-x)^2 + \ldots + \frac{1}{n^2}(y-x)^2 \\
&= n \cdot \frac{1}{n^2}(y-x)^2 = \frac{1}{n}(y-x)^2 .
\end{aligned}$$

Für feste x und y sowie wachsendes n wird der Term auf der rechten Seite der Ungleichung immer kleiner, nämlich kleiner als jede Zahl größer null. Somit muss $|f(x) - f(y)| = 0$ sein. Da x und y beliebige reelle Zahlen waren, gilt somit $f(x) = f(y)$ für alle reellen x, y, d. h. f ist konstant.

Beweis der Dreiecksungleichung:
Wir unterscheiden, ob die Summe $a + b$ positiv oder nichtnegativ ist, und benutzen jeweils, dass $x \le |x|$ gilt – unabhängig davon, ob die reelle Zahl x negativ, null oder positiv ist.
Fall I: Sei $a + b > 0$.
Dann ist $|a + b| = a + b \le |a| + |b|$.
Fall II: Sei $a + b \le 0$.
Dann ist $|a + b| = -(a + b) = (-a) + (-b) \le |a| + |b|$.

Alternative Lösung: Für Leser, die mit der Differentialrechnung vertraut sind, folgt nun noch eine weitere kurze Beweisvariante: Für $x \ne y$ kann man die gegebene Ungleichung durch $|x - y|$ dividieren und sieht, dass gilt:

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \le |x - y| .$$

Links steht hier der Betrag des Differenzenquotienten der Funktion f, und mit der Ungleichung folgt

$$\lim_{y \to x} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \le \lim_{y \to x} |x - y| = 0 .$$

Somit gilt auch

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = 0 .$$

Die Funktion f ist also differenzierbar und ihre Ableitung ist null; f ist also eine konstante Funktion.