Beispiellösungen zu Blatt 68

Aufgabe 1

Für zwei positive reelle Zahlen a und b gelte $\frac{a^2+b^2}{ab} = 68$.
Welche Werte kann dann der Term $\frac{a+b}{a-b}$ annehmen?

Lösung:

Zunächst gilt

$$\frac{a^2+b^2}{ab} = 68 \Leftrightarrow a^2+b^2 = 68ab\,.$$

Addieren wir auf beiden Seiten der letzten Gleichung den Term $2ab$, so erhalten wir unter Benutzung der ersten Binomischen Formel:

$$(a+b)^2 = 70ab\,.$$

Analog erhalten wir durch Subtrahieren des Terms $2ab$ und unter Benutzung der zweiten Binomischen Formel:

$$(a-b)^2 = 66ab\,.$$

Zusammen folgt:

$$\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} = \frac{70ab}{66ab} \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 = \frac{70}{66} = \frac{35}{33}\,.$$

Hierbei ist sicherzustellen, dass $ab \neq 0$ und $a-b \neq 0$, d. h. $a \neq b$ gilt. Ersteres ist nach Voraussetzung erfüllt, da a und b positiv sind. Außerdem ist $a \neq b$, denn anderenfalls wäre

$$68 = \frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{a^2+a^2}{aa} = \frac{2a^2}{a^2} = 2\,.$$

Der Term $\frac{a+b}{a-b}$ kann also höchstens die Werte $\pm\sqrt{\frac{35}{33}}$ annehmen.
Dass die beiden Werte auch wirklich angenommen werden, sieht man zum Beispiel durch Wahl von $b = 1$ und $a = 34 \pm \sqrt{1155}$: Denn dann gilt

$$a^2+b^2 = 34^2 \pm 68 \cdot \sqrt{1155} + 1155 + 1 = 68 \cdot (34 \pm \sqrt{1155}) = 68 \cdot ab \quad \text{sowie}$$

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{a-b} &= \frac{35 \pm \sqrt{1155}}{33 \pm \sqrt{1155}} = \frac{(35 \pm \sqrt{1155})(33 \mp \sqrt{1155})}{(33 \pm \sqrt{1155})(33 \mp \sqrt{1155})} \\ &= \frac{1155 \mp 2 \cdot \sqrt{1155} - 1155}{33^2 - 1155} = \frac{\mp 2 \cdot \sqrt{1155}}{-66} = \frac{\pm\sqrt{33 \cdot 35}}{33} = \pm\sqrt{\frac{35}{33}}\,.\end{aligned}$$

Bemerkung: Man findet solche Zahlen a und b durch Auflösen der Gleichung $\frac{a^2+b^2}{ab} = 68$ nach einer der beiden Variablen, z. B. mithilfe der p-q-Formel:

$a = b\cdot(34 \pm \sqrt{34^2-1})$. Da der Radikand positiv ist, erhält man für beliebiges b genau zwei Werte für a so, dass die Gleichung $\frac{a^2+b^2}{ab} = 68$ erfüllt ist, und man erhält somit auch zwei Werte für den Term $\frac{a+b}{a-b}$. Oben wurde aber bereits gezeigt, dass dieser Term höchstens die Werte $\pm\sqrt{\frac{35}{33}}$ annehmen kann; also werden ebendiese tatsächlich angenommen.

Aufgabe 2

Was ist die kleinste positive ganze Zahl n, für die $2008\cdot n$ genau 2008 positive Teiler mehr hat als n selbst?

Lösung:

Die kleinste Zahl mit der geforderten Eigenschaft ist ziemlich groß, nämlich $n = 2^{244}\cdot 3\cdot 5\cdot 7 = 2^{244}\cdot 105$. Sie hat 76 Stellen.

Für eine natürliche Zahl m bezeichnen wir die Anzahl der Teiler von m mit $\tau(m)$. Diese Anzahl können wir ausrechnen, wenn wir die Primfaktorzerlegung

$$m = p_1^{e_1}\cdot p_2^{e_2}\cdot\ldots\cdot p_r^{e_r}$$

kennen: Eine Zahl t ist genau dann Teiler von m, wenn sie keine anderen Primfaktoren als m enthält und jeder der vorhandenen Primfaktoren in t nicht öfter als in m vorkommt. Wollen wir also einen Teiler hinschreiben, so haben wir für den ersten Primfaktor p_1 die e_1+1 Möglichkeiten, ihn gar nicht, einmal, zweimal, ... oder e_1-mal auszuwählen. Für jede dieser Wahlen haben wir dann für den zweiten Primfaktor p_2 genau e_2+1 Möglichkeiten usw. Die Zahl m hat folglich genau

$$\tau(m) = (e_1+1)(e_2+1)\cdot\ldots\cdot(e_r+1)$$

verschiedene Teiler.

Die Primfaktorzerlegung von 2008 ist $2008 = 2^3\cdot 251$, damit hat 2008 genau $\tau(2008) = (3+1)(1+1) = 8$ verschiedene Teiler, nämlich

$$1,\ 2,\ 2^2=4,\ 2^3=8,\ 251,\ 2\cdot 251=502,\ 2^2\cdot 251=1004,\ 2^3\cdot 251=2008\,.$$

Sei n nun eine beliebige natürliche Zahl. Weil 2008 genau die beiden Primfaktoren 2 und 251 hat, teilen wir auch die Primfaktorzerlegung von n in zwei Teile auf:

$$n = \left(2^a\cdot 251^b\right)\cdot\left(p_1^{e_1}\cdot p_2^{e_2}\cdot\ldots\cdot p_r^{e_r}\right).$$

Dabei dürfen a bzw. b auch gleich null sein, was genau dann passiert, wenn 2 bzw. 251 gar keine Primfaktoren von n sind.
Mit der obigen Formel rechnen wir die Anzahl der Teiler von n und auch von $2008\cdot n = \left(2^{a+3}\cdot 251^{b+1}\right)\cdot(p_1^{e_1}\cdot p_2^{e_2}\cdot\ldots\cdot p_r^{e_r})$ aus. Es ist

$$\tau(n) = (a+1)(b+1)\cdot(e_1+1)(e_2+1)\cdot\ldots\cdot(e_r+1)\,,$$
$$\tau(2008\cdot n) = (a+3+1)(b+1+1)\cdot(e_1+1)(e_2+1)\cdot\ldots\cdot(e_r+1)\,.$$

Folglich hat $2008 \cdot n$ genau

$$\begin{aligned}
&\tau(2008 \cdot n) - \tau(n) \\
&\qquad = \Big((a+4)(b+2) - (a+1)(b+1)\Big) \cdot \Big((e_1+1) \cdot \ldots \cdot (e_r+1)\Big) \\
&\qquad = (a+3b+7) \cdot (e_1+1) \cdot \ldots \cdot (e_r+1)
\end{aligned}$$

Teiler mehr als n. Die Zahl n erfüllt demnach genau dann die Bedingung der Aufgabenstellung, wenn

$$(a+3b+7) \cdot (e_1+1) \cdot \ldots \cdot (e_r+1) = 2008 \tag{1}$$

gilt. Insbesondere muss $(a+3b+7)$ dann einer der acht oben angegebenen Teiler von 2008 sein, dabei ist offensichtlich $(a+3b+7) \geq 7$.

Sei nun n eine Zahl, die diese Bedingungen erfüllt.

Erster Fall: $a+3b+7=8$.
Dann ist $a=1, b=0$ und außerdem $(e_1+1)(e_2+1)\ldots(e_r+1) = 251$ eine Primzahl, also $r=1$ und $e_1 = 251-1$. Die Primzahl $p_1 \neq 2$ ist auf jeden Fall mindestens so groß wie 3, also ist $n = 2^1 \cdot 251^0 \cdot p_1^{250} \geq 2 \cdot 3^{250}$.

Zweiter Fall: $a+3b+7=251$.
Dann ist $a+3b=244$ und $2^a \cdot 251^b \geq 2^a \cdot (2^3)^b = 2^{a+3b} = 2^{244}$. Außerdem ist $(e_1+1) \cdot \ldots \cdot (e_r+1) = 8$. Hierfür gibt es wiederum drei Möglichkeiten, abhängig von der Anzahl r der Primfaktoren:

- $r=1$ und $e_1+1=8$: Dann ist $n = 2^a \cdot 251^b \cdot p_1^{e_1} \geq 2^{244} \cdot 3^7$.
- $r=2$ und $e_1+1=4, e_2+1=2$: Da p_1 und p_2 verschiedene Primzahlen und ungleich 2 sind, gilt $p_1^3 \cdot p_2^1 \geq 3^3 \cdot 5$. Insgesamt ergibt sich dann $n = 2^a \cdot 251^b \cdot p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \geq 2^{244} \cdot 3^3 \cdot 5$.
- $r=3$ und $e_1+1=e_2+1=e_3+1=2$: Auch hier sind dann p_1, p_2 und p_3 verschiedene Primzahlen und ungleich 2, so dass diesmal $n = 2^a \cdot 251^b \cdot p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot p_3^{e_3} \geq 2^{244} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ folgt.

Letzter Fall: $a+3b+7 \geq 2 \cdot 251$.
Dann ist $n = 2^a \cdot 251^b \cdot p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{e_r} \geq 2^a (2^3)^b \cdot 1 = 2^{a+3b} \geq 2^{2 \cdot 251 - 7} = 2^{495}$.

Nun vergleichen wir noch die unteren Abschätzungen aus den verschiedenen Fällen miteinander. Es gilt

$$\begin{aligned}
2 \cdot 3^{250} &> 2 \cdot (2^{243} \cdot 3 \cdot 3^2 \cdot 3^2) \cdot 3^2 > 2^{244} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1 \\
2^{244} \cdot 3^7 &= (2^{244} \cdot 3 \cdot 3^2 \cdot 3^2) \cdot 3^2 > 2^{244} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1 \\
2^{244} \cdot 3^3 \cdot 5 &= 2^{244} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3^2 > 2^{244} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \\
2^{495} &= 2^{244} \cdot 2^{251} > 2^{244} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7\,.
\end{aligned}$$

Alle erlaubten Zahlen sind demnach größer oder gleich $n = 2^{244} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Für diese Zahl $n = 2^{244} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ ist $r=3$ und es gilt $(a+3b+7) \cdot (e_1+1) \cdot \ldots \cdot (e_r+1) = (244+3 \cdot 0+7) \cdot (1+1)(1+1)(1+1) = 251 \cdot 8 = 2008$. Nach den obigen Überlegungen (bei Formel (1)) erfüllt diese Zahl also tatsächlich die Bedingungen der Aufgabenstellung und ist somit das gesuchte Minimum dieser Zahlen.

Aufgabe 3

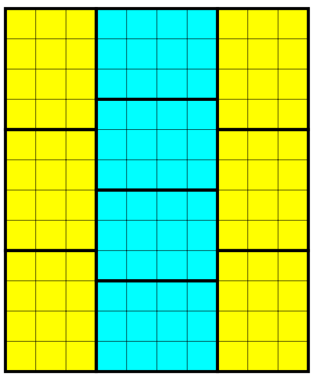
Fliesenleger Ingo benutzt am liebsten Schmuckfliesen, bei denen 3×4 Fliesen schon zusammengesetzt sind. Häufig schafft er es, die zumeist rechteckigen Grundrisse von Bädern und Küchen damit auszulegen, manchmal muss er jedoch Fliesen in ihre Einzelfliesen zerteilen. Natürlich fragt er sich dann, ob er sich nur dumm angestellt hat oder ob es wirklich nicht anders ging – also: Welche Rechtecke aus $m \times n$ quadratischen Feldern lassen sich mit Rechtecken der Größe 3×4 lückenlos und überschneidungsfrei belegen?

Lösung:

Zunächst stellen wir eine notwendige Bedingung an ein Rechteck, das man überdecken kann: Da jede Schmuckfliese aus 12 Einzelfliesen besteht, muss die Zahl der quadratischen Felder im Rechteck durch 12 teilbar sein, also: $12 | m \cdot n$. Da 3 eine Primzahl ist, muss eine der Seitenlängen durch 3 teilbar sein. Wir können, um weniger Fälle betrachten zu müssen, das Rechteck so drehen, dass m durch 3 teilbar ist. Bezüglich des Faktors 4 kann man aber zunächst nur feststellen, dass entweder eine Seitenlänge durch 4 teilbar ist oder beide Seitenlängen durch 2, aber nicht durch 4 – und diese Fälle untersuchen wir nun getrennt. Um Missverständnissen vorzubeugen: Wir gehen davon aus, dass ein $m \times n$-Rechteck m Zeilen und n Spalten hat.

4 teilt *n*. Dieser Fall ist einfach: Man kann die Fläche sogar so mit Schmuckfliesen ausfüllen, dass alle gleichartig angeordnet sind: Man hat $\frac{m}{3}$ Reihen zu je $\frac{n}{4}$ Rechtecken der Größe 3×4, die Schmuckfliesen liegen alle quer.

4 teilt *m*, also: 12 teilt *m*. Wir fangen damit an, den unteren Rand des Rechtecks zu betrachten. Natürlich ist eine notwendige Bedingung für die Lösung, dass man den unteren Rand pflastern kann. Das ist in diesem Fall aber auch schon ausreichend: Überall, wo eine Fliese am unteren Rand quer liegt, werden $\frac{m}{3} - 1$ weitere Fliesen quer darübergelegt, und wo eine Fliese unten hochkant liegt, werden entsprechend $\frac{m}{4} - 1$ Fliesen hochkant darübergelegt.



Die Aufgabe reduziert sich also in diesem Fall auf die Frage, welche positiven ganzen Zahlen n sich als Summe von einer jeweils nichtnegativen Anzahl von 3en und 4en darstellen lassen.
Für alle Zahlen, die durch 3 teilbar sind, trifft dies offenbar zu. Für alle Zahlen größer gleich 4, die beim Teilen durch 3 den Rest 1 lassen, auch, denn sie sind in der Form $4 + k \cdot 3$ darstellbar. Ebenso gilt dies für alle Zahlen größer gleich 8, die bei Division durch 3 den Rest 2 haben, da sie sich in der Form $2 \cdot 4 + k \cdot 3$

schreiben lassen. Es bleiben die Zahlen 1, 2 und 5 übrig, bei denen man sofort sieht, dass sie sich nicht als Summe von 3en und/oder 4en darstellen lassen. Ein Beispiel für eine Befliesung in einem Fall, in dem 12 ein Teiler von m ist, sieht man in der Abbildung.

4 teilt weder *m* noch *n*. Wir betrachten die erste Kästchenzeile. Weil n nicht durch 4 teilbar ist, können nicht alle Fliesen, die in dieser Zeile liegen, quer liegen, und die Anzahl der hochkant liegenden Fliesen ist nicht null.
Sei a_1 diese Anzahl der in der 1. Zeile hochkant liegenden Fliesen. Dann muss $3a_1$ bei Division durch 4 denselben Rest wie n lassen – für alle, die diese Schreibweise noch nicht kennen: Wir notieren das in der Form $3a_1 \equiv n \mod 4$, gesprochen als: „3 (mal) a_1 ist kongruent zu n modulo 4“.
Diese Feststellung gilt für jedes a_i, wenn analog a_i die Zahl der in der i-ten Zeile hochkant liegenden Fliesen darstellt.
Daher muss die Zahl der in der zweiten Zeile „beginnenden“ hochkant liegenden Fliesen, das sei b_2, durch 4 teilbar sein, denn es ist $b_2 = a_2 - a_1$; allgemein ist $b_i = a_i - a_{i-1} + b_{i-4}$; ebenso auch $b_3 = a_3 - a_2$ und $b_4 = a_4 - a_3$. Mit der 4. Zeile können erstmals hochkant liegende Fliesen „enden“, und zwar enden genau a_1 solche Fliesen. Damit wieder $3a_5 \equiv n \mod 4$ gelten kann und weil $b_2 + b_3 + b_4 \equiv 0 \mod 4$ gilt, muss in der fünften Zeile wieder eine Anzahl b_5 an hochkant liegenden Fliesen beginnen, die insbesondere nicht null ist (sonst wäre $a_5 = b_2 + b_3 + b_4 + b_5$ durch 4 teilbar), sondern wiederum mit $3b_5 \equiv n \mod 4$. Nun geht es immer so weiter: b_6, b_7 und b_8 müssen durch 4 teilbar sein, b_9 darf wiederum nicht durch 4 teilbar sein und so weiter.
Anders betrachtet ergibt sich Folgendes: Weil in der 1. Zeile hochkant liegende Fliesen anfangen, kann das Rechteck nicht eine, zwei oder drei Zeilen haben. Es könnte 4 Zeilen haben. Wenn es mehr als 4 Zeilen hat, kann es weder 5 noch 6 noch 7 Zeilen haben, weil in der 5. Zeile wiederum hochkant liegende Fliesen anfangen. Es könnte aber wieder 8 Zeilen haben. Die Argumentation wiederholt sich immer wieder, und das Ergebnis ist, dass, wenn man das Rechteck vollständig fliesen kann, die Anzahl der Zeilen durch 4 teilbar sein müsste. Das steht aber im Widerspruch zur Voraussetzung!

Das Ergebnis ist also zusammengefasst: Es lassen sich genau alle Rechtecke der Größe $m \times n$ fliesen, für die gilt:

- $4|m$ und $3|n$ oder
- $3|m$ und $4|n$ oder
- $12|m$ und n ist nicht 1, 2 oder 5 oder
- $12|n$ und m ist nicht 1, 2 oder 5.

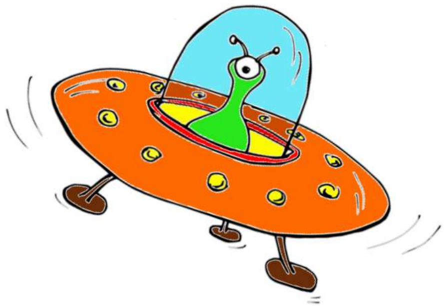
Oder noch kürzer, aber weniger übersichtlich:

- Jeweils mindestens eine der beiden Zahlen m und n wird durch 3 beziehungsweise 4 geteilt, und keine der Zahlen ist dabei 1, 2 oder 5.

Aufgabe 4

Die Kapitäne Kark, Kerk, Kork und Kurk steuern ihre stolzen (baugleichen) Raumschiffe durch die unendlichen Weiten der Galaxis.

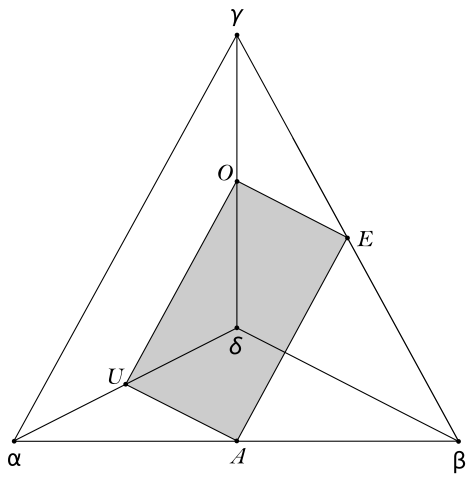
Zur Verteidigung des Friedens der Galaxis sind sie als Außenposten stationiert, und zwar befindet sich Kark genau in der Mitte zwischen den Planeten Alpha und Beta, Kerk mittig zwischen Beta und Gamma, Kork ist genau zwischen Gamma und Delta stationiert und Kurk schließlich hält mit seinem Schiff in der Mitte zwischen Delta und Alpha Wache.



Am Freitagnachmittag starten die vier gleichzeitig zu einem intergalaktischen Treffen: Auf geradem Weg steuern Kark und Kork mit Maximalgeschwindigkeit aufeinander zu, ebenso tun dies Kerk und Kurk. Sobald je zwei aufeinandertreffen, bleiben sie am Treffpunkt stehen. Zeige, dass sich bei dieser Taktik sogar alle vier an einem Ort treffen.

Lösung:

Gegeben haben wir ein Tetraeder $\alpha\beta\gamma\delta$, das aus den vier Planeten namens Alpha, Beta, Gamma und Delta gebildet wird, die im Weltall schweben. Die Kapitäne Kark, Kerk, Kork und Kurk starten jeweils in den Mittelpunkten A, E, O und U der Kanten $\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\delta$ und $\delta\alpha$.



Daher gilt $\frac{|\delta U|}{|\delta\alpha|} = \frac{|\delta O|}{|\delta\gamma|} = \frac{1}{2}$ und nach der Umkehrung des Strahlensatzes sind die Seiten UO und $\alpha\gamma$ parallel zueinander.
Jetzt wenden wir den Strahlensatz in seiner Originalform an: $\frac{1}{2} = \frac{|\delta U|}{|\delta\alpha|} = \frac{|UO|}{|\alpha\gamma|}$, d. h. UO ist gerade halb so lang wie $\alpha\gamma$.

Analog verfahren wir bei den Startpositionen der Kapitäne Kark und Kerk. Es gilt $\frac{|\beta A|}{|\beta\alpha|} = \frac{|\beta E|}{|\beta\gamma|} = \frac{1}{2}$, da Kark und Kerk mittig zwischen Alpha und Beta bzw. zwischen Beta und Gamma stationiert sind. Wieder nach dem umgekehrten Strahlensatz sind die Seiten AE und $\alpha\gamma$ parallel zueinander, also auch die Seiten AE und UO. Außerdem gilt nach dem (originalen) Strahlensatz $\frac{1}{2} = \frac{|\beta A|}{|\beta\alpha|} = \frac{|AE|}{|\alpha\gamma|}$, d. h. auch AE ist halb so lang wie $\alpha\gamma$.

Damit sind die Seiten UO und AE parallel zueinander und gleich lang. Das Viereck $AEOU$ ist also ein Parallelogramm.
Die in jeweils gegenüberliegenden Eckpunkten dieses Parallelogramms startenden Kapitäne Kark und Kork bzw. Kerk und Kurk fliegen mit derselben Geschwindigkeit aufeinander zu und treffen sich daher in den Mittelpunkten der Diagonalen. Bekanntlich halbieren sich aber in einem Parallelogramm die Diagonalen gegenseitig; daher treffen alle Kapitäne in einem Punkt aufeinander, ohne dass einer von ihnen einen Umweg fliegen müsste.