athematischer Korrespondenz-zirkel (µK)

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

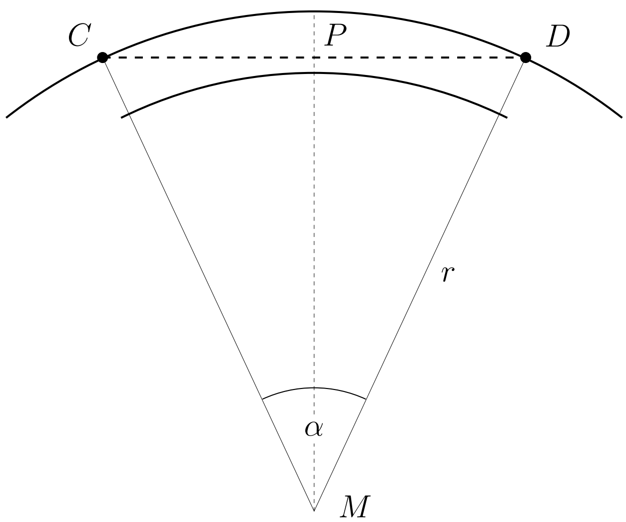
Beispiellösungen zu Blatt 69

Aufgabe 1

Es gibt Neues von unseren Piraten der *Schwarzen Perle*, nachdem sie eine Weile von der Bildfläche verschwunden waren: Sie waren untergetaucht! Käpt'n Sperling ist auf die Idee gekommen, dass man dank Erdkrümmung weniger Strecke mit einem Schiff zurücklegen muss, wenn man zwischendurch etwas taucht, und so wurde die *Schwarze Perle* zu einem U-Boot umgebaut, dass bis zu 500 m tief gehen kann. (Nebeneffekt: Man entkommt so leichter den Verfolgern!) Zum Vergleich: Der Erdradius beträgt etwa 6366 km.
Auf der Demonstrationsfahrt möchte Käpt'n Sperling den wirklich kürzesten Weg durch den Ärmelkanal zwischen den Häfen von Dover und Calais nehmen, das sind normalerweise 41 km „erdgekrümmte" Strecke. Wie tief wird er dabei eintauchen?
Schließlich geht es auf große Fahrt: Die Mannschaft nimmt sich die (*auf* dem Wasser gemessen) 6431 km lange Strecke durch den Atlantik von Porto (in Portugal) bis zu – wer hätte es gedacht! – der Insel Tortuga in der Karibik vor. Wie viele Kilometer Strecke kann Sperling durch seine Tauchfähigkeit sparen?

Lösung:

Für die erste Fahrt betrachten wir zunächst einen Durchschnitt der Erdkugel entlang der Fahrtstrecke Calais–



Dabei sei C Calais und D Dover. Der kürzeste für das U-Boot mögliche Weg ist dabei die gerade Strecke CD, sofern ihre tiefste Stelle nicht tiefer als 500 m unter dem Meeresspiegel liegt. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt P der Strecke CD. Die Mittelsenkrechte zu CD verläuft durch den Erdmittelpunkt M. Die Tauchtiefe im Punkt P ergibt sich dann als Differenz zwischen dem Erdradius $r = 6636\,\text{km}$ und $|MP|$.

Sei α der Winkel $\angle DMC$. Dann ergibt sich die trigonometrische Beziehung $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{|MP|}{r}$.

Andererseits gilt, dass sich α zu $360°$ verhält wie der Kreisbogen $\overset{\frown}{CD}$ zum Erdumfang $2\pi r$. Es gilt also $\alpha = \frac{|\overset{\frown}{CD}|\cdot 360°}{2\pi r}$.

Einsetzen in die obige Gleichung ergibt

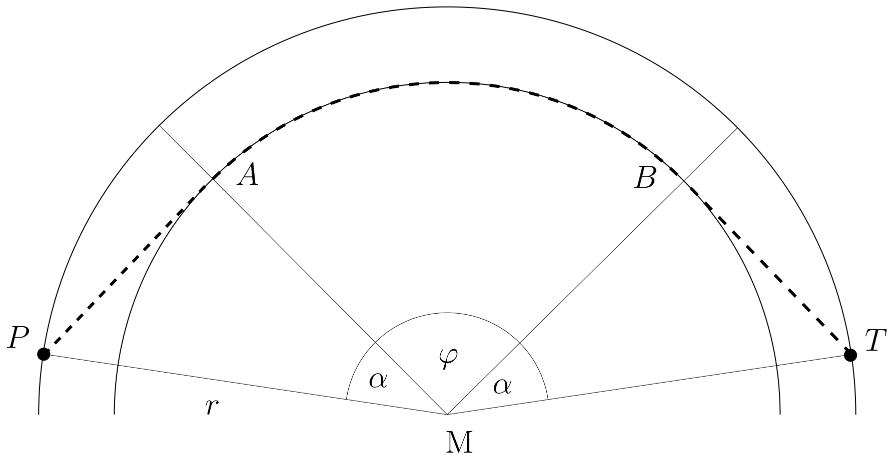
$$|MP| = \cos\left(\frac{|\widehat{CD}| \cdot 360^\circ}{4\pi r}\right)\cdot r = \cos\left(\frac{41\,\text{km}\cdot 360^\circ}{4\pi\cdot 6366\,\text{km}}\right)\cdot 6366\,\text{km} \approx 6365{,}967\,\text{km}.$$

Die maximale Tauchtiefe ist dann die Differenz zum Erdradius, also ungefähr 33 m.
Bemerkung: Die Wegersparnis im Vergleich zur Fahrt auf der Wasseroberfläche beträgt lediglich 7 cm.

Wir versuchen nun denselben Ansatz für die Strecke Porto–Tortuga. Einsetzen in die obige Formel mit einer Entfernung von 6431 km ergibt dann als maximale Tauchtiefe

$$6366\,\text{km} - \cos\left(\frac{6431\,\text{km}\cdot 360^\circ}{4\pi\cdot 6366\,\text{km}}\right)\cdot 6366\,\text{km} \approx 795\,\text{km},$$

also einen weitaus größeren Wert als für das U-Boot möglich.
Um den kürzesten möglichen Weg zu finden, betrachten wir – ähnlich wie oben – einen Durchschnitt der Erde entlang der Strecke von Porto (P) nach Tortuga (T). Dazu zeichnen wir noch einen inneren Kreis um den Erdmittelpunkt M mit Radius 6365,5 km, der die maximale Tauchtiefe angibt.



Gesucht ist nun der kürzeste Weg von P nach T innerhalb des äußeren Kreisringes. Anschaulich gesprochen ist dies der Weg, den ein Gummiseil beschreibt, wenn man es von P nach T spannt und wenn der Meeresboden überall exakt 500 Meter unter der Wasseroberfläche liegt. Mathematisch ausgedrückt heißt das, dass man am Anfang und am Ende des Weges jeweils auf einer Tangente durch P bzw. T an den inneren Kreis (mit Tangentialpunkten A bzw. B) fährt. Der optimale Weg zwischen den Tangentialpunkten ist der Kreisbogen $\widehat{AB}$.
Da in A und B jeweils ein rechter Winkel $\angle PAM$ bzw. $\angle MBT$ vorliegt, ergibt sich aus dem Satz des Pythagoras

$$\begin{aligned}|PA| = |TB| &= \sqrt{r^2 - (r-0{,}5)^2} = \sqrt{6366^2 - (6366-0{,}5)^2}\\ &= \sqrt{6366 - 0{,}25} = \sqrt{6365{,}75}.\end{aligned}$$

Die beiden Dreiecke PAM und TBM sind also kongruent und wir bezeichnen den Winkel $\angle AMP$ bzw. $\angle TMB$ als α.

Sei $\varphi = \angle BMA$. Dann gilt $\frac{2\alpha+\varphi}{360°} = \frac{|\widehat{TP}|}{2\pi r}$.

Es folgt mit $\sin\alpha = \frac{|PA|}{r} = \frac{\sqrt{6365{,}75}}{6366}$, also $\alpha = \arcsin\frac{\sqrt{6365{,}75}}{6366}$, dass

$$\varphi = \frac{6341\,\text{km}\cdot 360°}{2\pi\cdot 6366\,\text{km}} - 2\arcsin\frac{\sqrt{6365{,}75}}{6366}$$

ist.

Andererseits ist $\frac{\varphi}{360°} = \frac{|\widehat{AB}|}{2\pi\cdot(r-0{,}5)} \Leftrightarrow |\widehat{AB}| = \frac{\varphi\cdot 2\pi\cdot 6365{,}5\,\text{km}}{360°}$.
Einsetzen von φ ergibt

$$\begin{aligned}|\widehat{AB}| &= \left(\frac{6431\,\text{km}\cdot 360°}{2\pi\cdot 6366\,\text{km}} - 2\arcsin\frac{\sqrt{6365{,}75}}{6366}\right)\cdot\frac{2\pi\cdot 6365{,}5\,\text{km}}{360°}\\ &= 6270{,}9319\,\text{km}.\end{aligned}$$

Der Gesamtweg hat dann die Länge $|PA| + |\widehat{AB}| + |BT| = 6270{,}9319\,\text{km} + 2\cdot\sqrt{6365{,}75}\,\text{km} = 6430{,}5033\,\text{km}$. Die Wegersparnis beträgt somit ca. 497 m.

Bemerkung: Bei den Berechnungen in dieser Lösung kommt man in die Nähe der Rechengenauigkeit eines Taschenrechners: Im ersten Aufgabenteil zum Beispiel wird vom Erdradius eine ähnlich große Zahl ($|MP|$) abgezogen. Damit werden am Anfang viele „gültige“ (d. h. nicht gerundete) Stellen ausgelöscht, und im Ergebnis sind nur wenige Stellen wirklich genau gerechnet. Auch die Berechnungen im zweiten Aufgabenteil sind aus ähnlichem Grund teilweise empfindlich gegen Rundungen. Am besten rechnet man in solchen Fällen mit einer „kompletten Formel“, um Rundungen zwischendurch zu vermeiden. Wenn Dover und Calais nur wenige Meter auseinander liegen würden, reicht auch das (auf normalen Taschenrechnern) nicht aus; man muss dann nach anderen Tricks suchen. (Für Eingeweihte: Mithilfe von Additionstheoremen kann man die Formel hier in eine besser berechenbare umstellen.)

Aufgabe 2

Welche fünfstelligen Zahlen, bei denen keine Ziffer Null ist, haben die Eigenschaft, dass ihre letzte Ziffer die aus den letzten beiden Ziffern gebildete Zahl teilt, dass die aus den letzten beiden Ziffern gebildete Zahl die aus den letzten drei Ziffern gebildete Zahl teilt, dass die aus den letzten drei Ziffern gebildete Zahl die aus den letzten vier Ziffern gebildete Zahl teilt und schließlich dass die aus den letzten vier Ziffern gebildete Zahl die gesamte Zahl selbst teilt?

Lösung:

Es gibt genau drei Lösungen: 53125, 91125 und 95625.

Beweis: Sei die fünfstellige Zahl *abcde* eine Lösung der Aufgabe. Dann teilt insbesondere *bcde* die Zahl *abcde* und damit auch die Zahl $abcde - bcde =$

$a0000 = a \cdot 2^4 \cdot 5^4$. Da a eine Ziffer (ungleich Null) sein soll, bedeutet das, dass $bcde$ ein Produkt von einem Faktor kleiner gleich 9 (ein Teiler von a), einer Zweierpotenz 2^i mit $i \leq 4$ und einer Fünferpotenz 5^j mit $j \leq 4$ sein muss. Außerdem ist nach Voraussetzung $e \neq 0$, daher ist $bcde$ nicht durch 10 teilbar oder anders gesagt: enthält nicht gleichzeitig Primfaktoren 2 *und* 5.
Wäre $bcde$ nicht durch 5 teilbar, so wäre damit $bcde \leq a \cdot 2^4 \leq 9 \cdot 16 = 144 < 1000$ im Widerspruch zur Forderung, dass auch $b \neq 0$ gelten soll. Also ist $bcde = \tilde{a} \cdot 5^j$ mit $j \leq 4$ und einem Teiler $\tilde{a}$ von a, und weil $9 \cdot 5^2 = 225 < 1000$ ist, ist $j \geq 3$. Wegen $8 \cdot 5^3 = 1000$ kommt für den Fall $j = 3$ nur die Wahl $\tilde{a} = 9$ und damit auch $a = 9$ infrage. Es ist $9 \cdot 125 = 1125$ eine Zahl ohne Nullen, also ist 91125 ein Lösungskandidat. Wegen $1125 \cdot 81 = 91125$, $125 \cdot 9 = 1125$, $25 \cdot 5 = 125$ und $5 \cdot 5 = 25$ ist tatsächlich 91125 eine Lösung.
Weitere Lösungen kann es nur für den Fall $j = 4$ geben, es ist dann also $bcde = \tilde{a} \cdot 625$, wobei $\tilde{a}$ wiederum ein Teiler von a und ungerade sein muss. $1 \cdot 625 = 0625$ liefert eine Null; $3 \cdot 625 = 1875$ führt genauso wie $7 \cdot 625 = 4375$ zu keiner Lösung, weil offenbar 875 kein Teiler von 1875 (bzw. 1000) ist (auch nicht 75 ein Teiler von 875) und etwas weniger klar 375 kein Teiler von 4375 ist (denn 3 teilt 375, aber nicht 4000). Wählt man $\tilde{a} = 5$, so ist $bcde = 5^5$, damit muss, weil $a0000 = 16 \cdot 5^4 \cdot a$ ist, a auch durch 5 teilbar sein. Da a eine Ziffer ungleich Null sein soll, bleibt als einzige Möglichkeit $a = 5$. Wegen $53125 = (16 + 1) \cdot 3125$ (wie konstruiert) und $3125 = 25 \cdot 125$ ist 53125 eine weitere Lösung.
Wählt man schließlich $\tilde{a} = 9$, so ist also $bcde = 5^4 \cdot 9$, und damit muss ebenso $a = 9$ gewählt werden. Es ist $9 \cdot 625 = 5625$, und wegen $95625 = (16+1) \cdot 5625$ und bekanntermaßen $625 = 25 \cdot 25$ ist 95625 eine dritte und die letzte Lösung der Aufgabe.

Ein paar weiterführende Bemerkungen (ohne Beweise): Wie man vielleicht schon am Beweis erkannt hat, ist die Forderung, dass keine der Ziffern eine Null sein soll, eine wesentliche Forderung. Lässt man Nullen zu, so erhält man etliche weitere Lösungen.
Wenn man schon Nullen zulässt, kann man auch gleich die Aufgabe für beliebige Stellenzahlen untersuchen. Man erhält dann automatisch unendlich viele Lösungen, denn man kann aus einer Lösung weitere erzeugen, indem man zwischen der ersten und der zweiten Ziffer beliebig viele Nullen einfügt. Auch am Ende kann man beliebig viele Nullen anhängen.
Interessant sind nach dem oben Gesagten nur noch Lösungen, bei denen die erste Ziffer keine Null ist (das ist in jedem Fall vernünftig), die letzte Ziffer ebenso keine Null ist und bei denen die zweite Ziffer nur dann eine Null ist, wenn sich keine Lösung ergibt, wenn man die Null weglässt. Wir wollen eine solche Lösung als *wesentliche Lösung* bezeichnen. Man kann schließlich zeigen: Es gibt genau 148 wesentliche Lösungen. Darunter sind 9 einstellige, 41 zweistellige, 30 drei-, 25 vier-, 17 fünf-, 20 sechs-, 5 siebenstellige Lösungen und als längste eine achtstellige Lösung. Sie lautet 90703125 und zeigt, dass die etwas umständlich anmutende Formulierung oben zur zweiten Ziffer einer wesentlichen Lösung nötig ist, denn 703125 ist $9 \cdot 5^7$, sodass die nächste Ziffer

ungleich Null, die ja eine Neun sein muss, weil keine Zehnerpotenz durch drei teilbar ist, erst auf der 10^7-er-Stelle stehen kann.
Wesentliche Lösungen ohne Nullen gibt es immerhin 90, und die größten unter ihnen sind genau die drei fünfstelligen. Alle 14 vierstelligen Lösungen sind – das kann man genau wie in der Lösung oben zeigen – bis auf eine Ausnahme (9225) durch 125 teilbar. Auf die Ziffern 7 oder 9 enden unter den wesentlichen Lösungen ohne Null nur die trivialen Lösungen 7, 9, 77 und 99. Die meisten Nullen in einer wesentlichen Lösung haben die Lösungen $a000064$ mit $a = 1, 3, 5, 7$ oder 9.
Interessant wäre sicherlich noch die Untersuchung des Problems in anderen Stellenwertsystemen – aber das würde den Rahmen hier sprechen, also überlassen wir es dem geneigten Leser, dies selbst zu tun.

Aufgabe 3

Beim Abheften des folgenden Gleichungssystems ist es leider an den falschen Stellen gelocht worden ...

$$\begin{aligned} x + 4y &= \boxed{} \\ 2x\boxed{}y &= \boxed{} \end{aligned}$$

Die fehlenden Zahlen werden noch gefunden: $\boxed{-8}$, $\boxed{-4}$, $\boxed{+8}$, aber man weiß nicht mehr, welche Zahl in welcher Lücke war. Sjaan erinnert sich aber daran, dass es eine eindeutige Lösung gab und dass x positiv war. Kann man daraus das Gleichungssystem rekonstruieren?

Lösung:

Anstelle der Löcher setzen wir Variablen ein. Das Gleichungssystem

$$x + \ 4y = a_1 \tag{1}$$
$$2x + a_2y = a_3 \tag{2}$$

soll nach Voraussetzung eindeutig lösbar sein. Würde man $a_2 = 8$ wählen, wäre die linke Seite der zweiten Gleichung das Doppelte der linken Seite der ersten Gleichung. Das heißt, dass das Gleichungssystem entweder gar nicht lösbar ist (und zwar, wenn $a_3 \neq 2a_1$ ist) oder dass die beiden Gleichungen äquivalent sind. Dann hat man in Wahrheit aber nur eine Gleichung, nämlich umgestellt: $x = a_1 - 4y$, und man sieht sofort, dass sie für jede Wahl von y lösbar ist und zudem verschiedene x-Werte liefert. Das wäre ein Widerspruch zur Voraussetzung. Daher muss $a_2 \neq 8$ gelten.
Wir berechnen nun allgemein die Lösungen des Gleichungssystems; die Umformungen sind in jedem Fall Folgerungen aus (wenn nicht sogar Äquivalenzen zu) den vorigen Gleichungen.
Zunächst bilden wir $2 \cdot (1) - (2)$:

$$\begin{aligned} (8 - a_2)y &= 2a_1 - a_3 \\ y &= \frac{2a_1 - a_3}{8 - a_2}\,. \end{aligned}$$

Das Teilen durch $8 - a_2$ ist allgemein möglich, weil wir ja gerade $a_2 \neq 8$ festgestellt hatten.
Dies in (1) eingesetzt, ergibt zusammen mit der Voraussetzung, dass bei einer Lösung der Aufgabe x positiv ist,

$$\begin{aligned} 0 < x &= a_1 - 4y \\ &= a_1 - \frac{8a_1 - 4a_3}{8 - a_2}\,. \end{aligned}$$

Für $a_2 = -4$ und auch für $a_2 = -8$ gilt $8 - a_2 > 0$. Damit folgt aus der Ungleichung weiter

$$\begin{aligned} 8a_1 - a_1a_2 - 8a_1 + 4a_3 &> 0 \\ -a_1a_2 + 4a_3 &> 0 \\ a_1a_2 - 4a_3 &< 0\,. \end{aligned}$$

Angenommen, $a_2 = -4$ führt zu einer Lösung. Dann ist

$$\begin{aligned} -4a_1 - 4a_3 &< 0 \\ a_1 + a_3 &> 0\,. \end{aligned}$$

Dies führt aber zu einem Widerspruch, da $a_1 + a_3$ die Summe von -8 und 8, also null ist. Also muss gelten: $a_2 = -8$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} -8a_1 - 4a_3 &< 0 \\ 2a_1 + a_3 &> 0 \\ 2a_1 &> -a_3\,. \end{aligned}$$

Diese Ungleichung ist nur erfüllt für $a_1 = 8$ und $a_3 = -4$ (und nicht umgekehrt).
Eine Probe bestätigt die Lösung.
Das korrekte Gleichungssystem sieht also so aus:

$$x + 4y = +8 \tag{3}$$
$$2x - 8y = -4 \tag{4}$$

und hat die Lösungen $x = 3$, $y = \frac{5}{4}$.

Aufgabe 4

Das siebenköpfige Korrespondenzzirkelteam sitzt im Kreis und vertreibt sich die Zeit mit folgendem Spiel:
Zu Beginn hat jeder eine zufällige Anzahl von Äpfeln vor sich liegen, jedoch nicht mehr als 20. In der Mitte der Runde befindet sich außerdem ein sehr großer Apfelvorrat. Ein Spielzug besteht nun darin, dass zunächst alle Spieler mit einer ungeraden Anzahl von Äpfeln einen Apfel vom Vorrat nehmen. Danach geben alle Spieler gleichzeitig die Hälfte ihrer Äpfel an ihren jeweils rechten Sitznachbarn weiter.

Das Spiel ist beendet, sobald der Vorratsberg aufgebraucht ist.
Zeige, dass das Spiel niemals endet, wenn man den Vorrat nur groß genug (aber endlich) wählt.
Finde – abhängig von der Anfangssituation – einen möglichst kleinen Vorrat, der dafür ausreicht, dass das Spiel nicht endet.

Lösung:

Erster Teil: Das Spiel endet niemals.

Zu Beginn des Spiels hat laut Aufgabenstellung kein Spieler mehr als 20 Äpfel vor sich liegen. Das gilt aber auch nach der ersten Hälfte des Spielzuges („*füge einen Apfel hinzu, falls deine Anzahl ungerade ist*") noch, denn 20 ist eine gerade Zahl.
Sei nun a die Anzahl an Äpfeln eines Spielers X und sei b die Anzahl der Äpfel seines linken Nachbarn (jeweils nach der ersten Hälfte des Zuges). Aufgrund der letzten Überlegung gilt $a, b \leq 20$. In der zweiten Hälfte des Zuges gibt der Spieler X die Hälfte seiner Äpfel fort, behält also insbesondere die (andere) Hälfte seiner eigenen Äpfel, und erhält gleichzeitig die Hälfte der Äpfel seines linken Nachbarn, sodass er nach dem Spielzug genau $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{a+b}{2}$ Äpfel besitzt. Mit der obigen Abschätzung für a, b folgt für diese Anzahl $\frac{a+b}{2} \leq \frac{20+20}{2} = 20$.
Folglich hat auch nach dem kompletten Spielzug jeder der Spieler höchstens 20 Äpfel vor sich liegen. Dies gilt auch nach jedem weiteren Spielzug.
Zusammen brauchen die sieben Spieler also höchstens $7 \cdot 20 = 140$ Äpfel; und spätestens, wenn jeder 20 Äpfel vor sich liegen hat, werden keine weiteren Äpfel aus dem Vorrat benötigt und das Spiel kann endlos weitergehen.

Zweiter Teil: Wie groß muss der Vorrat sein?

Diese Anzahl ist sehr von der gegebenen Anfangssituation abhängig und auch uns noch nicht vollständig bekannt.

Eine erste Begrenzung der Anzahl haben wir im ersten Teil schon gesehen: Insgesamt werden nie mehr als 140 Äpfel benötigt, und zwar in der Anzahl der zu Beginn vor den Spielern liegenden Äpfel und im Vorrat zusammen.

Diese Abschätzung können wir aber noch verbessern, indem wir die Schranken aus dem ersten Teil exakter wählen: Seien $x_1, x_2, \ldots, x_7$ die Anzahlen der zu Beginn vor den einzelnen Spielern liegenden Äpfel. Sei M das Maximum dieser Anzahlen. Falls M gerade ist, so setzen wir $m := M$, und anderenfalls – also wenn M ungerade ist – setzen wir $m := M + 1$. In beiden Fällen ist dann m eine gerade Zahl und keiner der Spieler hat zu Beginn mehr als m Äpfel.
Da m wiederum gerade ist, ergibt sich wie oben, dass nach der ersten Hälfte des Zuges kein Spieler mehr als m Äpfel hat. Und auch nach der zweiten Hälfte des Zuges gilt (mit den entsprechenden Bezeichnungen wie oben) für die Apfelanzahl eines jeden Spielers: $\frac{a+b}{2} \leq \frac{m+m}{2} = m$.

Es werden also insgesamt höchstens $7 \cdot m$ Äpfel benötigt. Und da bereits $x_1 + x_2 + \ldots + x_7$ Äpfel von Anfang an vor den Spielern liegen, braucht der Vorrat höchstens $7 \cdot m - (x_1 + x_2 + \ldots + x_7)$ Äpfel zu enthalten.
Es gibt viele nichttriviale Beispiele, in denen diese Abschätzung scharf ist: Zum Beispiel führt die Startsituation $(5, 19, 19, 13, 0, 0, 0)$ nach 22 Zügen dazu, dass alle Spieler 20 Äpfel haben.

Jedoch gibt es auch Beispiele, in denen auch die zweite Abschätzung nicht die beste ist:
Gibt es etwa nur zwei Spieler, die zu Beginn 4 bzw. 8 Äpfel haben, so benötigen sie gar keinen zusätzlichen Vorrat, denn: Beide Anzahlen sind gerade, und nach dem ersten Zug haben sie $\frac{4+8}{2} = 6$ bzw. $\frac{8+4}{2} = 6$ Äpfel, sodass auch nach allen folgenden Zügen jeder der beiden Spieler genau 6 Äpfel besitzt und kein zusätzlicher Apfel benötigt wird.

Zusatz: Am „Ende“ haben alle gleich viele Äpfel.

Wir haben bislang nur gezeigt, dass immer nur ein endlicher Vorrat nötig ist. Damit ist nach Aufgabenstellung das Spiel bei genügend großem Vorrat niemals zu Ende. Aber, wie eine Einsenderin richtig schrieb: „Die Spieler werden irgendwann sowieso aufhören, wenn sie wieder an die Arbeit müssen oder keine Lust mehr haben.“
Es drängt sich da noch die Frage auf, ab wann das Spiel langweilig wird. Sicherlich dann, wenn alle die gleiche gerade Anzahl Äpfel haben, denn dann kann sich nichts mehr ändern. Dies wird tatsächlich immer eintreten. Den Beweis dazu wollen wir nur andeuten: Man kann zeigen, dass Folgendes gilt: Sei die Situation gegeben, dass nicht alle die gleiche Anzahl an Äpfeln haben. Wir betrachten speziell die kleinste vorkommende Zahl an Äpfeln auf einem Haufen. Dann ist nach dem nächsten Schritt entweder diese Minimalzahl größer geworden oder aber die Zahl der Spieler, die einen Haufen mit der Minimalzahl haben, ist kleiner geworden. Damit verändert sich die Spielsituation mit jedem Zug wesentlich, bis der Zustand erreicht wird, dass alle Spieler die gleiche gerade Anzahl an Äpfeln vor sich haben.

Weitere Bemerkungen.

Das Spiel mit maximal 20 Äpfeln endet nach spätestens 22 Runden. Und das Beispiel oben mit der Startsituation $(5, 19, 19, 13, 0, 0, 0)$ gibt den maximal benötigten Vorrat an: 84 Äpfel.
Wenn man zu Beginn mehr Äpfel zulässt, kann man den maximal benötigten Vorrat noch deutlich erhöhen: Die Startsituation $(0, 97, 99, 93, 99, 99, 60)$ beispielsweise führt nach 30 Runden zum Endstand, dass alle Spieler 100 Äpfel haben, man braucht also einen Vorrat von 153 Äpfeln. Ob dies das Maximum ist, wissen wir nicht, unser Computer rechnet noch ...