Beispiellösungen zu Blatt 70

Aufgabe 1

Auf jedem Feld eines Schachbrettes liegen Reiskörner, dabei können auf verschiedenen Feldern durchaus verschieden viele Körner liegen. In der ersten Zeile des Brettes liegen mehr Körner als in der ersten Spalte, in der zweiten Zeile des Brettes liegen mehr Körner als in der zweiten Spalte und so weiter bis zur siebenten Zeile, in der mehr Körner liegen als in der siebenten Spalte. Wo liegen mehr Körner: In der achten Zeile oder in der achten Spalte?

Lösung:

Seien $z_1, z_2, \ldots, z_8$ die Anzahlen der Reiskörner, die in der $1., 2., \ldots, 8.$ Zeile des Schachbretts liegen, und $s_1, s_2, \ldots, s_8$ die Anzahlen für die entsprechenden Spalten.
Nach Voraussetzung gilt dann $z_1 > s_1, z_2 > s_2, \ldots, z_7 > s_7$, also auch

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_7 > s_1 + s_2 + \ldots + s_7.$$

Andererseits lässt sich die Gesamtzahl N aller Reiskörner auf dem Schachbrett sowohl als Summe aller Anzahlen in den Spalten als auch als Summe aller Anzahlen in den Zeilen schreiben: $N = s_1+s_2+\ldots+s_8 = z_1+z_2+\ldots+z_8$.

Daraus folgt schließlich:

$$s_8 = N - (s_1 + s_2 + \ldots + s_7) > N - (z_1 + z_2 + \ldots + z_7) = z_8.$$

Also liegen in der achten Spalte mehr Reiskörner als in der achten Zeile.

Aufgabe 2

Welche der beiden Zahlen $A = \sqrt{n} + \sqrt[3]{n} + \sqrt[4]{n} + \ldots + \sqrt[199]{n}$ bzw. $B = n$ ist die größere für

a) $n = 208$;

b) $n = 2008$?

Lösung:

Wir betrachten zuerst den Fall $n = 208$:
Es ist $\sqrt{208} \geq 14$. Außerdem ist die k-te Wurzel aus 208 größer als 1 für alle $k \in \{3, \ldots, 199\}$, da 208 größer als 1 ist.

Deswegen können wir abschätzen:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{208} + \sqrt[3]{208} + \sqrt[4]{208} + \ldots + \sqrt[199]{208} \\ &\geq 14 + \underbrace{1 + \ldots + 1}_{\text{197-mal}} \\ &= 14 + 197 \cdot 1 \\ &= 211 \geq 208 \end{aligned}$$

Ähnlich können wir auch im Fall $n = 2008$ vorgehen:
Es gilt $\sqrt{2008} \leq 45$, $\sqrt[3]{2008} \leq 13$ und $\sqrt[4]{2008} \leq 7$ (denn es ist $45^2 = 2025$, $13^3 = 2197$ und $7^4 = 2401$).
Dann ist aber auch $\sqrt[k]{2008} \leq 7$ für alle $k \in \{5, \ldots, 199\}$.
Wir erhalten als Abschätzung:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{2008} + \sqrt[3]{2008} + \sqrt[4]{2008} + \ldots + \sqrt[199]{2008} \\ &\leq 45 + 13 + \underbrace{7 + \ldots + 7}_{\text{196-mal}} \\ &= 45 + 13 + 196 \cdot 7 \\ &= 1430 \leq 2008 \end{aligned}$$

Im ersten Fall ist also A größer, im zweiten Fall B.

Aufgabe 3

Die Pfadfindergruppe „Fähnlein Möbiusband“ marschiert gemächlich mit konstanter Geschwindigkeit von 3 km/h in quadratischer Formation mit Seitenlänge 16 m durch das Göttinger Umland. Fähnleinführer Felix will die Formation kontrollieren und startet an der linken vorderen Ecke des Quadrates und läuft mit einer (größeren) konstanten Geschwindigkeit einmal entlang des Randes des Quadrates um die gesamte Gruppe herum. Als er wieder an seiner Ausgangsposition ankommt, ist der Trupp genau 54 m vorwärts gekommen.
Wie schnell (in km/h) ist Felix bei seinem Kontrollgang gelaufen?

Lösung:

Wir können zunächst die Zeit bestimmen, die Felix für die „Umrundung“ der Gruppe benötigt. Die Gruppe hat sich bei einer Geschwindigkeit von $3\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{3}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{5}{6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ lediglich 54 m weiterbewegt, also hat Felix' Runde $\frac{54\,\text{m}}{\frac{5}{6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 64{,}8\,\text{s}$ gedauert.

Aus der Perspektive eines Beobachters, der sich nicht mit der Gruppe bewegt, sondern auf der Stelle steht, läuft Felix mit konstanter Geschwindigkeit v (genaugenommen ist der Betrag der Geschwindigkeit konstant) und sein Weg kann die folgende Gestalt haben:

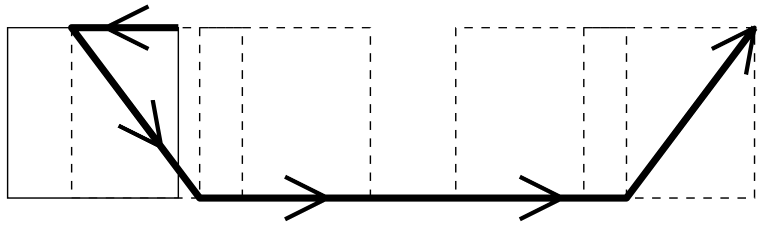


Abbildung 1: Positionen der quadratischen Formation zu den Zeitpunkten, zu denen Felix sich an den Ecken der Formation befindet, und Felix' Weg

Zwischenbemerkung: Felix' Weg ist durch die Aufgabenstellung nicht eindeutig festgelegt; er könnte die Gruppe auch im *Uhrzeigersinn umrunden. Dies würde aber an der Länge des Weges nichts ändern, denn in jedem Fall läuft er einmal in gleicher Richtung wie die Gruppe, einmal entgegengesetzt und zweimal schräg zur Marschrichtung.*

Wenn wir nun die sich bewegende Pfadfindergruppe als Bezugsystem wählen, so ist Felix' Geschwindigkeit zwar nicht mehr konstant, dafür ist dann der Weg, den er abläuft, ein Quadrat mit Seitenlänge 16 m.
Die Relativgeschwindigkeiten zur Gruppe ergeben sich, wenn man von der Geschwindigkeit v, die der ruhende Beobachter sieht, die Geschwindigkeit der Gruppe „abzieht“. Hierbei muss man auch die Laufrichtung berücksichtigen, da Felix nur auf einem der vier Streckenabschnitte in dieselbe Richtung wie die Gruppe läuft:
Für den ersten und dritten Abschnitt gilt, da Felix in die entgegengesetzte bzw. in dieselbe Richtung läuft:

$$v^{(1)}_{\text{relativ}} = v + 3\,\tfrac{\text{km}}{\text{h}} \qquad \text{und} \qquad v^{(3)}_{\text{relativ}} = v - 3\,\tfrac{\text{km}}{\text{h}}$$

Für die beiden verbleibenden Abschnitte kann man die Relativgeschwindigkeit mit dem Satz des Pythagoras ausrechnen; denn die Strecke, die Felix geht, während er an einer Querseite des Quadrats entlanggeht, ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten die Seitenlänge des Quadrats und die von der Gruppe zurückgelegte Strecke sind. Da die Geschwindigkeiten proportional zu den Strecken sind, überträgt sich diese Beziehung zwischen den Strecken auch auf die Geschwindigkeiten:

$$v^{(2)}_{\text{relativ}} = v^{(4)}_{\text{relativ}} = \sqrt{v^2 - \left(3\,\tfrac{\text{km}}{\text{h}}\right)^2}$$

Jetzt können wir die für die einzelnen Abschnitte benötigte, von v abhängige Zeit ausrechnen und deren Summe mit den oben berechneten 64,8 Sekunden (64,8/3600 Stunden) gleichsetzen:

$$\begin{aligned}\frac{64{,}8}{3600}\,\text{h} &= \frac{0{,}016\,\text{km}}{v^{(1)}_{\text{relativ}}} + \frac{0{,}016\,\text{km}}{v^{(2)}_{\text{relativ}}} + \frac{0{,}016\,\text{km}}{v^{(3)}_{\text{relativ}}} + \frac{0{,}016\,\text{km}}{v^{(4)}_{\text{relativ}}} \\ &= \frac{0{,}016\,\text{km}}{v + 3\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} + \frac{0{,}016\,\text{km}}{\sqrt{v^2 - (3\,\frac{\text{km}}{\text{h}})^2}} + \frac{0{,}016\,\text{km}}{v - 3\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} + \frac{0{,}016\,\text{km}}{\sqrt{v^2 - (3\,\frac{\text{km}}{\text{h}})^2}} \qquad (1)\end{aligned}$$

Multiplizieren mit $(v + 3\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}) \cdot (v - 3\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}) = v^2 - (3\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}})^2$ liefert:

$$\begin{aligned} &0{,}018\,\mathrm{km} \cdot \Big(v^2 - \big(3\,\tfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\big)^2\Big) \\ &\qquad = 0{,}016\,\mathrm{km} \cdot \left(v - 3\,\tfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} + v + 3\,\tfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} + 2\sqrt{v^2 - \big(3\,\tfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\big)^2}\right) \\ \Longleftrightarrow\ &\frac{9}{8}\Big(v^2 - \big(3\,\tfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\big)^2\Big) - 2v = 2\sqrt{v^2 - \big(3\,\tfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\big)^2} \end{aligned}$$

Quadrieren der letzten Gleichung würde nun eine Gleichung vierten Grades in v liefern, die nicht mit elementaren Methoden auflösbar ist.
Unter Verwendung der Tatsache, dass $v > 3\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ gelten muss, und in der Hoffnung, dass es eine ganzzahlige Lösung geben könnte, sieht man bzw. merkt man nach kurzem Ausprobieren, dass $v = 5\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ die Gleichung löst.
Diese Lösung ist auch eindeutig; denn wir haben die letzte Gleichung äquivalent aus Gleichung (1) hergeleitet, und dort sieht man, dass mit wachsendem v auf der rechten Seite jeder Bruch kleiner wird, weswegen es höchstens eine Lösung geben kann.
Felix ist also mit 5 km/h gelaufen.

Aufgabe 4

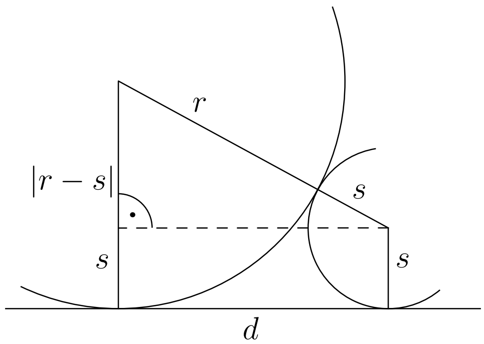
Platznot bei unseren Piraten. Daher wollen sie ihre Kanonenkugeln möglichst platzsparend unterbringen. Sie stellen fest: Wenn drei große Kugeln mit Durchmesser 45 cm so auf dem Boden liegen, dass sie sich gegenseitig berühren, passt darunter genau noch eine der mittelgroßen Kanonenkugeln, das heißt, sie berührt dann alle drei großen Kugeln. Und noch besser: In den Zwischenraum unter zwei großen und einer mittleren Kugel passt in gleicher Weise noch eine kleine Kugel.
Welche Durchmesser haben eine mittelgroße und eine kleine Kanonenkugel?

Lösung:

Die Radien der Kugeln seien mit $g(= \frac{45}{2}\,\mathrm{cm})$, m bzw. k bezeichnet; die Angabe „cm“ bei den Längen wird der Übersichtlichkeit halber meist weggelassen.

Zunächst eine allgemeine Überlegung: Wenn zwei Kugeln mit Radien r und s auf einer Ebene liegen, sich berühren und ihre Berührpunkte mit der Ebene den Abstand d zueinander haben, dann gilt die Beziehung

$$d^2 = (r+s)^2 - (r-s)^2 = 4rs.$$



Sie folgt sofort aus dem Satz des Pythagoras und aus den binomischen Formeln.

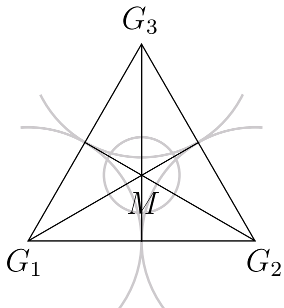
Nun betrachten wir drei große Kugeln und eine mittelgroße Kugel, die sich alle gegenseitig berühren. Es reicht dabei, die Berührpunkte mit der Ebene anzuschauen: Die Berührpunkte G_1, G_2 und G_3 der großen Kugeln haben voneinander jeweils einen Abstand von 45 cm. Aus Symmetriegründen liegt der Berührpunkt M der mittelgroßen Kugel in der Mitte des gleichseitigen Dreiecks $G_1G_2G_3$. Da sich die Höhen in einem gleichseitigen Dreieck im Verhältnis $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$ teilen und die Höhe selbst die $\frac{\sqrt{3}}{2}$-fache Länge der Grundseite hat, hat M zu jedem G_i den Abstand $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 45$. Nach der Überlegung zu Beginn gilt damit:

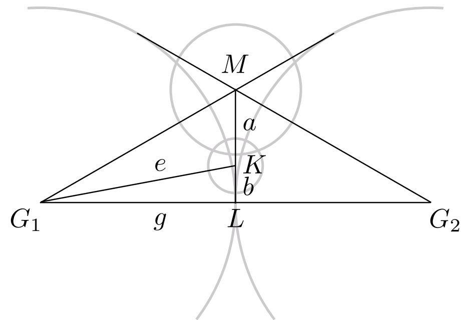
$$\frac{1}{3} \cdot 45^2 = 4 \cdot \frac{45}{2} \cdot m,$$

also

$$m = \frac{15}{2}.$$

Der Durchmesser der mittelgroßen Kugel ist daher 15 cm.





Zur Bestimmung des Durchmessers der kleinen Kanonenkugel gehen wir ganz ähnlich vor; nur bilden die drei Berührpunkte G_1, G_2 und M der größeren Kugeln mit der Ebene nur noch ein gleichschenkliges Dreieck. K sei der Berührpunkt der kleinen Kugel mit der Ebene. Aus Symmetriegründen muss er auf dem Lot ML von M über der Basis G_1G_2 liegen. Mit den Bezeichnungen der Skizze gilt dann:

$$\begin{aligned} a + b &= |ML| = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot 45, \text{ vgl. Überlegungen zur Dreieckshöhe oben,} \\ e^2 &= |G_1K|^2 = 4gk = 90k \text{ und} \\ a^2 &= 4mk = 30k \text{ nach der Vorüberlegung.} \end{aligned}$$

Pythagoras liefert nun

$$e^2 = g^2 + b^2,$$

und setzt man alles zusammen, erhält man:

$$\begin{aligned}
90k &= \frac{45^2}{4} + \left(\frac{45}{2\sqrt{3}} - \sqrt{30k}\right)^2 \\
&= \frac{45^2}{4} + \frac{45^2}{12} - 45\sqrt{10k} + 30k \\
\Leftrightarrow \quad 45\sqrt{10k} &= -60k + \frac{45^2}{3} \\
\Leftrightarrow \quad 3\sqrt{10k} &= -4k + 45
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 16k^2 - 450k + 45^2 = 0$$

mit den beiden Lösungen

$$\begin{aligned}
k &= \frac{225 \pm \sqrt{225^2 - 16 \cdot 45^2}}{16} = \frac{225 \pm 45\sqrt{25-16}}{16} = 45 \cdot \frac{5 \pm 3}{16} \\
k_1 &= \frac{45}{8}, \qquad k_2 = \frac{45}{2}.
\end{aligned}$$

Nun muss offensichtlich $k < m < g$ sein, daher ist die Lösung: Die kleine Kugel hat einen Durchmesser von $2 \cdot \frac{45}{8} = \frac{45}{4}$.

Bemerkung: Dass die zweite Lösung der quadratischen Gleichung genau den Radius der großen Kugeln ergibt, ist kein Zufall, denn die dritte große Kugel erfüllt genau wie die kleine Kugel die Bedinungen, dass sie die beiden anderen großen Kugeln, die mittlere und die Ebene berührt. Das führt bis auf ein Vorzeichen auf dieselben Gleichungen, und dieses Vorzeichen verschwindet beim Quadrieren.

Und noch eine Bemerkung:
Nachdem wir nun das Ergebnis haben, rechnen wir noch einmal konkret den Wert von b aus:

$$b = \frac{45}{2\sqrt{3}} - \sqrt{30k} = \frac{45}{2\sqrt{3}} - \sqrt{30\frac{45}{8}} = \frac{15\sqrt{3}}{2} - \frac{15\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Das bedeutet, dass der K genau in der Mitte zwischen G_1 und G_2 liegt! Damit berührt die kleine Kugel auch eine auf der anderen Seite eingefügte mittelgroße Kugel, man kann also wirklich sagen, dass der Raum dadurch recht gut ausgenutzt wird. (Und es bedeutet, dass wir mit der Skizze etwas geschummelt haben – aber anders wäre es natürlich nicht gut herzuleiten gewesen.)