athematischer
orrespondenz-
zirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Beispiellösungen zu Blatt 74

Aufgabe 1

Gustav schreibt am 1. Januar 2009 die Zahl 1 auf ein Blatt, am 2. Januar schreibt er die Zahlen 2 und 3 auf, am 3. Januar dann die Zahlen 4, 5 und 6 usw. Er setzt also an jedem Tag die Zahlenreihe des Vortages um genaue eine Zahl mehr als am vorherigen Tag fort. Was ist die Summe der Zahlen, die er am 31. Dezember 2009 aufschreibt?

Lösung:

Um die Summe zu berechnen, überlegen wir zunächst, welche Zahlen Gustav am 31. Dezember aufschreibt. Am 1. Januar schreibt er eine Zahl, am 2. Januar zwei Zahlen, ... und schließlich am 30. Dezember 364 Zahlen. Also hat Gustav bis zum 30. Dezember $1 + 2 + \ldots + 364$ Zahlen aufgeschrieben. Um diese Zahl auszurechnen, verwenden wir die sogenannte „Gaußsche Summenformel“: $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (siehe Bemerkung). In diesem Fall erhalten wir $1 + 2 + \ldots + 364 = \frac{364 \cdot 365}{2} = 66\,430$.

Also sind $66\,430 + 1$, $66\,430 + 2$, ..., $66\,430 + 365$ Gustavs Zahlen für den 31. Dezember. Die gesuchte Zahl ist die Summe aus diesen und berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
&(66\,430 + 1) + (66\,430 + 2) + \ldots + (66\,430 + 365) \\
&= 365 \cdot 66\,430 + (1 + 2 + \ldots + 365) \\
&= 365 \cdot 66\,430 + \frac{365 \cdot 366}{2} \\
&= 24\,246\,950 + 66\,795 = 24\,313\,745\,,
\end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt wiederum die „Gaußsche Summenformel“ verwendet haben.

Bemerkung: Wir wollen nun noch die oben verwendete „Gaußsche Summenformel“ beweisen. Neben der Methode der vollständigen Induktion kann man dazu den folgenden Trick verwendet, den schon Carl Friedrich Gauß benutzte, als er als Schüler die Zahlen von 1 bis 100 addieren sollte: Man betrachtet das Doppelte der Summe $1 + 2 + 3 + \ldots + n$.

$$\begin{aligned}
2 \cdot (1 + 2 + \ldots + n) &= (1 + 2 + \ldots + n) + (n + (n-1) + \ldots + 1) \\
&= \begin{array}{cccccc} 1+ & 2 & + & 3 & + \ldots + & n \\ +n+ & (n-1) & + & (n-2) & + \ldots + & 1 \end{array}
\end{aligned}$$

Da nun die Spaltensummen immer $n+1$ sind, folgt $2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + n) = n \cdot (n+1)$.

Das ergibt genau die gewünschte Formel $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Aufgabe 2

Es ist Semesterbeginn, und zwanzig neue Mathematik-Studenten spielen ein Kennenlernspiel. Sie sitzen in einem Stuhlkreis, und genau einer der Stühle ist rot. Wer auf dem roten Stuhl sitzt, hat zwei Möglichkeiten, für eine neue Sitzordnung zu sorgen: Entweder dreht sich die Runde so weit im Kreis, dass ein von dem Spieler bestimmter anderer Mitspieler auf den roten Stuhl kommt. Oder der Spieler auf dem roten Stuhl kann mit dem Spieler vier Plätze weiter rechts oder vier Plätze weiter links den Platz tauschen.

a) Klara sitzt auf dem roten Stuhl und genau gegenüber von Sebastian – und würde gerne neben ihm sitzen … Wenn alle mithelfen: Wie viele Runden dauert es, bis sie nebeneinander sitzen?

b) Wie lautet die Antwort auf die erste Frage, wenn sich rechts von Klara noch ein einundzwanzigster Mitspieler dazugesellt?

Lösung:

In der ersten Situation sitzen sich Klara und Sebastian genau gegenüber, in beide Richtungen gesehen sitzen sie also im Abstand von 10 Stühlen.
Dreht sich die Runde der Spielenden, ändert das nichts am Abstand zwischen Klara und Sebastian. Ebenso natürlich, wenn die beiden an einem Platztausch nicht beteiligt sind. Wenn einer(r) nun an einem Platztausch beteiligt ist, ändern sich die Abstände in einer Richtung um $+4$, in der anderen um -4. Dabei muss gegebenfalls – nämlich genau dann, wenn der eine quasi über die andere springt – noch 20 subtrahiert bzw. addiert werden. Weil 20 durch 4 teilbar ist, ändert sich damit bei keinem Zug, dass der Abstand der beiden in beiden Richtungen gemessen beim Teilen durch 4 den Rest 2 lässt. Damit kann offensichtlich Sebastian nie direkt neben Klara sitzen. (Umgekehrt können sie ebensowenig einmal ihre Plätze tauschen.)
Wenn sich ein weiterer Spieler dazugesellt, ist die Situation erwartungsgemäß anders. Von Klara nach rechts gemessen beträgt der Abstand nun 11; wird so getauscht, dass sich dieser Abstand dreimal verringert, beträgt er -1 bzw. 20, es sitzt dann also Sebastian links von Klara.
Bleibt die Frage, wie viele Runden man mindestens braucht: Offenbar reichen wegen der Abstände 10 bzw. 11 zwei Tausche nicht aus. Die drei Tausche kann man ebenso offensichtlich nicht ohne eine Drehung der Spielenden ausführen. Jedoch reicht eine Drehung tatsächlich aus, wie gleich gezeigt wird, daher lautet die Antwort auf die Frage: Es dauert vier Runden, wenn alle mithelfen. Und es muss nicht einmal Sebastian selbst mithelfen.
Hier eine der beiden Möglichkeiten: Im ersten Zug tauscht Klara mit dem Mitspieler, der 4 Plätze rechts von ihr sitzt. Dann wird die Runde so gedreht, dass Klara 4 Plätze links vom roten Stuhl zu sitzen kommt. (Sebastian ist dann 3 Plätze rechts vom roten Stuhl.) Im dritten Zug tauscht der auf dem

roten Stuhl Sitzende mit Klara, die dann im vierten Zug mit dem Mitspieler 4 Plätze rechts von ihr, also demjenigen rechts von Sebastian tauscht.
Bei der anderen Möglichkeit wird nach Klaras erstem Zug so gedreht, dass Sebastian vier Plätze rechts vom roten Stuhl zu sitzen kommt, Klara ist dann 3 Plätze links vom roten Stuhl. Dann wird Sebastian auf den roten Stuhl gebeten … und er darf dann selbst entscheiden, ob er überhaupt neben Klara sitzen möchte!

Bemerkungen: Etwas abstrakt betrachtet, gehört unsere Aufgabe zu einem riesigen Gebiet möglicher Fragestellungen: Man hat eine große Menge *denkbarer* Veränderungen (hier die Permutationen der Mitspieler auf den Stühlen), erlaubt aber nur gewisse Grund„züge", und fragt dann, was noch möglich ist. In der Sprache der Algebra – das sei hier für Leser erwähnt, die schon einmal etwas von *Gruppen* im mathematischen Sinne gehört haben – heißt das dann: Wie sieht die *Untergruppe* einer gegebenen aus, die von bestimmten *Erzeugern* gebildet wird? Und: Wie viele Erzeuger brauche ich minimal, um ein bestimmtes Element der Gruppe zu bilden?
Ein ganz einfaches Beispiel für eine solche Fragestellung ist diese: Gegeben zwei natürliche Zahlen n und m, kann man durch beliebig häufige Addition und Subtraktion dieser Zahlen den Wert 1 erhalten? (Das ist fast schon unsere Aufgabenstellung.) Deutlich kniffliger, aber wesentlich „greifbarer" geht es am „Zauberwürfel" zu: Schafft man es, die Steine wieder zu ordnen, indem man nur die erlaubten Flächen bewegt (und den Würfel nicht in seine Einzelteile zerlegt)? Oder hat man beim letzten Zusammenbau etwa einen Fehler gemacht, der nur durch erneutes Auseinanderbauen behoben werden kann?

Aufgabe 3

Vier Wüstenspringmäuse stehen an den Eckpunkten eines Quadrates mit der Seitenlänge 5 m. Jede von ihnen hat eine saftige Beere, aber wie das so ist, schielt jede Maus auf die Beere ihrer rechten Nachbarin, ob diese nicht größer ist. Da man dies aus dieser Entfernung nicht genau feststellen kann, springen alle Mäuse – gleichzeitig – zu ihrer jeweils rechten Nachbarin los und landen nach der Hälfte der Strecke. Dort merkt jede Maus, dass ihre rechte Nachbarin ebenfalls ihren Standort gewechselt hat und springt erneut die Hälfte des Weges auf ihre Nachbarin zu. Dies setzen die Mäuse immer weiter fort, bis zwei sich treffen.

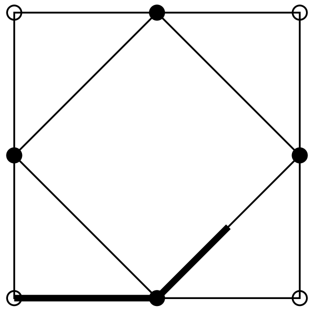
a) Wie groß ist die Strecke, die jede Maus zurücklegt?

b) Wie verändert sich die Streckenlänge, wenn jede Maus nicht die Hälfte, sondern einen n-ten Teil des Weges springt? Was passiert dann für sehr große n?

Lösung:

Wir nehmen an, dass die Mäuse punktförmig sind, damit sie sich beim Springen nicht die Köpfe aneinander stoßen.

a) Zu Beginn stehen die Mäuse an den Eckpunkten eines Quadrats. Nachdem alle Mäuse eine halbe Kantenlänge in Richtung ihrer rechten Nachbarin gesprungen sind, bilden die vier neuen Standorte wiederum die Ecken eines Quadrats, welches allerdings kleiner ist als das ursprüngliche.



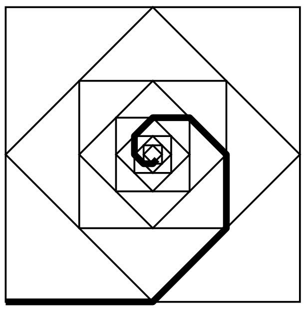
Die Kanten des neuen Quadrats sind gerade die Hypotenusen der rechtwinkligen Dreiecke, die sich aus den neuen Standorten von zwei benachbarten Mäusen sowie dem alten Standort der jeweils vorderen Maus ergeben. Mit dem Satz von Pythagoras erhalten wir nun die Kantenlänge a_{i+1} des neuen Vierecks:

$$a_{i+1} = \sqrt{\left(\frac{a_i}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_i}{2}\right)^2} = \frac{a_i}{2}\sqrt{2} = \frac{a_i}{\sqrt{2}},$$

wobei a_i die Kantenlänge des vorherigen Vierecks ist. Setzen wir diese rekursive Formel nacheinander ein, erhalten wir die Kantenlängen in Abhänigkeit von $a_0 = 5\,\mathrm{m}$:

$$a_i = \frac{a_0}{\left(\sqrt{2}\right)^i}.$$

Da diese Kantenlänge stets größer als 0 ist, treffen sich die Mäuse niemals, sondern springen bis in alle Ewigkeit weiter.[1] Trotzdem legt dabei jede Maus nur einen endlichen Weg zurück, wie wir gleich sehen werden.



Für die Weglänge S einer Maus gilt:

$$S = \frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2} + \ldots = \frac{a_0}{2} + \frac{a_0}{2\sqrt{2}} + \frac{a_0}{2\sqrt{2}^2} + \ldots = \frac{a_0}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}^2} + \ldots\right).$$

[1] Genauer gesagt: Sie müssen unendlich oft springen. Ob das auch in endlicher Zeit zu schaffen ist, darüber wollen wir hier nicht diskutieren.

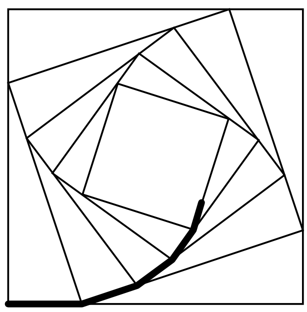
Dies ist eine sogenannte geometrische Reihe. Um die Summe auszurechnen, kann man nacheinander die Teilsummen S_m (mathematisch: Partialsummen) der ersten $1 + m$ Summanden ausrechnen[2]:

$$S_m = \frac{a_0}{2} \cdot \frac{1 - (1/\sqrt{2})^{m+1}}{1 - 1/\sqrt{2}} \,.$$

Um den Gesamtweg zu erhalten, lassen wir m gegen unendlich streben. Für sehr große m wird dann $(1/\sqrt{2})^{m+1} = 1/(\sqrt{2})^{m+1}$ gegen null streben, da der Nenner immer größer wird, während der Zähler gleich bleibt. Damit erhalten wir für die zurückgelegte Strecke der Maus

$$S = \frac{a_0}{2} \cdot \frac{1-0}{1 - 1/\sqrt{2}} = \frac{5\,\mathrm{m}}{2 - \sqrt{2}} \approx 8{,}54\,\mathrm{m}\,.$$

b) Nun springt die Maus nicht genau die Hälfte des Quadrats, sondern nur einen n-ten Teil.



Wir berechnen wieder mit dem Satz von Pythagoras die Kantenlänge des neuen Quadrats, dabei sind jetzt die Katheten des rechtwinkligen Dreiecks $\frac{1}{n}a_i$ und $(1 - \frac{1}{n})a_i$.

$$a_{i+1} = a_i \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2} = a_i \sqrt{\frac{2}{n^2} - \frac{2}{n} + 1},$$

wobei a_i gerade die Kantenlänge des vorherigen Vierecks ist. Es ist $\frac{1}{n} \in]0,1[$, daher ist $\frac{2}{n^2} - \frac{2}{n} + 1 < 1$. Wir wenden diese rekursive Formel wieder öfter an. Da die Maus nun immer den n-ten Teil einer Kantenlänge zurücklegt, ergibt sich ein Gesamtweg von

$$S = \frac{a_0}{n} \left(1 + \left(\sqrt{\frac{2}{n^2} - \frac{2}{n} + 1} \right)^1 + \left(\sqrt{\frac{2}{n^2} - \frac{2}{n} + 1} \right)^2 + \ldots \right).$$

[2] Diese Formel kann man mit einem Trick sehr leicht herleiten – hier für die, die ihn noch nicht kennen: Man schreibe die Summe einmal in normaler Form auf und ziehe dann das $1/\sqrt{2}$-fache ab, indem man jeden Summanden mit $-1/\sqrt{2}$ multipliziert. Man sieht, dass sich fast alle Summanden gegeneinander wegheben und nur noch 1 und $-(1/\sqrt{2})^{m+1}$ übrig bleiben. Nun muss nur noch durch $1 - 1/\sqrt{2}$ geteilt werden.

Wieder unter Benutzung der Summenformel der geometrischen Reihe erhalten wir in Abhängigkeit von dem gewählten n-ten Teil die Summe

$$\begin{aligned} S &= \frac{a_0}{n} \cdot \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{2}{n^2} - \frac{2}{n} + 1}} \\ &= \frac{a_0}{n} \cdot \frac{\left(1 + \sqrt{\frac{2}{n^2} - \frac{2}{n} + 1}\right)}{1 - \frac{2}{n^2} + \frac{2}{n} - 1} = \frac{a_0 \left(1 + \sqrt{\frac{2}{n^2} - \frac{2}{n} + 1}\right)}{2(1 - \frac{1}{n})} \end{aligned}$$

als Weglänge einer jeden Maus.

Betrachten wir nun diese Strecke für immer größer werdende n oder mit anderen Worten: Lassen wir das n gegen unendlich streben, so strebt der Nenner gegen 2 und der Zähler gegen $2a_0$. Die Gesamtstrecke der Maus nähert sich mit wachsendem n also immer mehr einer Länge von $\frac{2a_0}{2} = a_0 = 5\,\mathrm{m}$ an. Außerdem nähert sich die Form des Weges immer mehr einer „runden“ Spirale, der sogenannten „logarithmischen Spirale“ an, die in vielfältiger Weise in der Natur vorkommt, z. B. bei der Anordnung der Sterne in einer Galaxie.

Zusatz. Zur Lösung im allerletzten Fall kann man auch mit einer anderen Überlegung kommen: Wenn sich die Sprungweite immer weiter verkleinert, gleicht sich die Situation immer mehr derjenigen an, in der die Mäuse kontinuierlich aufeinander zugehen. Dabei ist es wie oben auch so, dass die Mäuse in einem Quadrat starten und auch immer weiter ein Quadrat bilden. Wir betrachten Maus A, die auf Maus B zugeht. Wegen der Quadratgestalt bewegt sich B also immer rechtwinklig zur Bewegung von A. Deswegen ändert sich am Abstand von A zu B nichts durch die Bewegung von B, sondern nur durch die von A, und A geht immer direkt auf B zu. Folglich muss A genau den Weg zurücklegen, den sie am Anfang von B entfernt war – nämlich a_0.

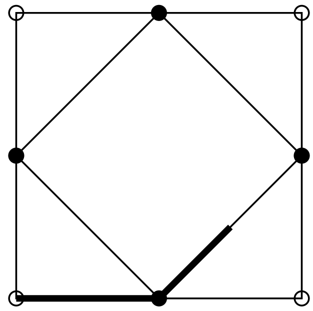
Aufgabe 4

Welche Polynomfunktionen haben einen Graphen mit einer Symmetrieachse, die nicht parallel zur y-Achse ist?

Lösung:

Wir nehmen an, dass die Mäuse punktförmig sind, damit sie sich beim Springen nicht die Köpfe aneinander stoßen.

a) Zu Beginn stehen die Mäuse an den Eckpunkten eines Quadrats. Nachdem alle Mäuse eine halbe Kantenlänge in Richtung ihrer rechten Nachbarin gesprungen sind, bilden die vier neuen Standorte wiederum die Ecken eines Quadrats, welches allerdings kleiner ist als das ursprüngliche.



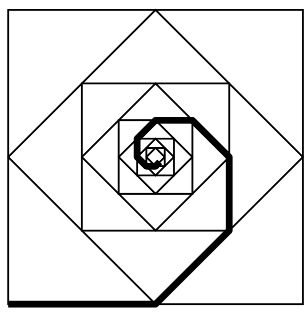
Die Kanten des neuen Quadrats sind gerade die Hypotenusen der rechtwinkligen Dreiecke, die sich aus den neuen Standorten von zwei benachbarten Mäusen sowie dem alten Standort der jeweils vorderen Maus ergeben. Mit dem Satz von Pythagoras erhalten wir nun die Kantenlänge a_{i+1} des neuen Vierecks:

$$a_{i+1} = \sqrt{\left(\frac{a_i}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_i}{2}\right)^2} = \frac{a_i}{2}\sqrt{2} = \frac{a_i}{\sqrt{2}},$$

wobei a_i die Kantenlänge des vorherigen Vierecks ist. Setzen wir diese rekursive Formel nacheinander ein, erhalten wir die Kantenlängen in Abhänigkeit von $a_0 = 5\,\mathrm{m}$:

$$a_i = \frac{a_0}{\left(\sqrt{2}\right)^i}.$$

Da diese Kantenlänge stets größer als 0 ist, treffen sich die Mäuse niemals, sondern springen bis in alle Ewigkeit weiter.[3] Trotzdem legt dabei jede Maus nur einen endlichen Weg zurück, wie wir gleich sehen werden.



Für die Weglänge S einer Maus gilt:

$$S = \frac{a_0}{2}+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2}+\ldots = \frac{a_0}{2}+\frac{a_0}{2\sqrt{2}}+\frac{a_0}{2\sqrt{2}^2}+\ldots = \frac{a_0}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}^2}+\ldots\right).$$

Dies ist eine sogenannte geometrische Reihe. Um die Summe auszurechnen, kann man nacheinander die Teilsummen S_m (mathematisch: Partialsummen)

[3] Genauer gesagt: Sie müssen unendlich oft springen. Ob das auch in endlicher Zeit zu schaffen ist, darüber wollen wir hier nicht diskutieren.

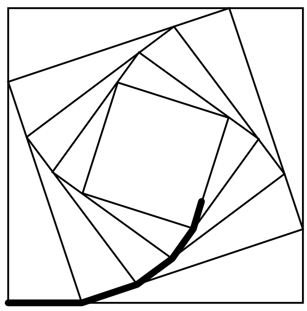
der ersten $1 + m$ Summanden ausrechnen[4]:

$$S_m = \frac{a_0}{2} \cdot \frac{1 - (1/\sqrt{2})^{m+1}}{1 - 1/\sqrt{2}}\,.$$

Um den Gesamtweg zu erhalten, lassen wir m gegen unendlich streben. Für sehr große m wird dann $(1/\sqrt{2})^{m+1} = 1/(\sqrt{2})^{m+1}$ gegen null streben, da der Nenner immer größer wird, während der Zähler gleich bleibt. Damit erhalten wir für die zurückgelegte Strecke der Maus

$$S = \frac{a_0}{2} \cdot \frac{1 - 0}{1 - 1/\sqrt{2}} = \frac{5\,\mathrm{m}}{2 - \sqrt{2}} \approx 8{,}54\,\mathrm{m}\,.$$

b) Nun springt die Maus nicht genau die Hälfte des Quadrats, sondern nur einen n-ten Teil.



Wir berechnen wieder mit dem Satz von Pythagoras die Kantenlänge des neuen Quadrats, dabei sind jetzt die Katheten des rechtwinkligen Dreiecks $\frac{1}{n}a_i$ und $(1 - \frac{1}{n})a_i$.

$$a_{i+1} = a_i\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2} = a_i\sqrt{\frac{2}{n^2} - \frac{2}{n} + 1},$$

wobei a_i gerade die Kantenlänge des vorherigen Vierecks ist. Es ist $\frac{1}{n} \in]0,1[$, daher ist $\frac{2}{n^2} - \frac{2}{n} + 1 < 1$. Wir wenden diese rekursive Formel wieder öfter an. Da die Maus nun immer den n-ten Teil einer Kantenlänge zurücklegt, ergibt sich ein Gesamtweg von

$$S = \frac{a_0}{n}\left(1 + \left(\sqrt{\frac{2}{n^2} - \frac{2}{n} + 1}\right)^1 + \left(\sqrt{\frac{2}{n^2} - \frac{2}{n} + 1}\right)^2 + \ldots\right).$$

[4]Diese Formel kann man mit einem Trick sehr leicht herleiten – hier für die, die ihn noch nicht kennen: Man schreibe die Summe einmal in normaler Form auf und ziehe dann das $1/\sqrt{2}$-fache ab, indem man jeden Summanden mit $-1/\sqrt{2}$ multipliziert. Man sieht, dass sich fast alle Summanden gegeneinander wegheben und nur noch 1 und $-(1/\sqrt{2})^{m+1}$ übrig bleiben. Nun muss nur noch durch $1 - 1/\sqrt{2}$ geteilt werden.

Wieder unter Benutzung der Summenformel der geometrischen Reihe erhalten wir in Abhängigkeit von dem gewählten n-ten Teil die Summe

$$S = \frac{a_0}{n} \cdot \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{2}{n^2} - \frac{2}{n} + 1}}$$
$$= \frac{a_0}{n} \cdot \frac{\left(1 + \sqrt{\frac{2}{n^2} - \frac{2}{n} + 1}\right)}{1 - \frac{2}{n^2} + \frac{2}{n} - 1} = \frac{a_0 \left(1 + \sqrt{\frac{2}{n^2} - \frac{2}{n} + 1}\right)}{2(1 - \frac{1}{n})}$$

als Weglänge einer jeden Maus.

Betrachten wir nun diese Strecke für immer größer werdende n oder mit anderen Worten: Lassen wir das n gegen unendlich streben, so strebt der Nenner gegen 2 und der Zähler gegen $2a_0$. Die Gesamtstrecke der Maus nähert sich mit wachsendem n also immer mehr einer Länge von $\frac{2a_0}{2} = a_0 = 5\,\text{m}$ an. Außerdem nähert sich die Form des Weges immer mehr einer „runden" Spirale, der sogenannten „logarithmischen Spirale" an, die in vielfältiger Weise in der Natur vorkommt, z. B. bei der Anordnung der Sterne in einer Galaxie.

Zusatz. Zur Lösung im allerletzten Fall kann man auch mit einer anderen Überlegung kommen: Wenn sich die Sprungweite immer weiter verkleinert, gleicht sich die Situation immer mehr derjenigen an, in der die Mäuse kontinuierlich aufeinander zugehen. Dabei ist es wie oben auch so, dass die Mäuse in einem Quadrat starten und auch immer weiter ein Quadrat bilden. Wir betrachten Maus A, die auf Maus B zugeht. Wegen der Quadratgestalt bewegt sich B also immer rechtwinklig zur Bewegung von A. Deswegen ändert sich am Abstand von A zu B nichts durch die Bewegung von B, sondern nur durch die von A, und A geht immer direkt auf B zu. Folglich muss A genau den Weg zurücklegen, den sie am Anfang von B entfernt war – nämlich a_0.