athematischer
orrespondenz-
zirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

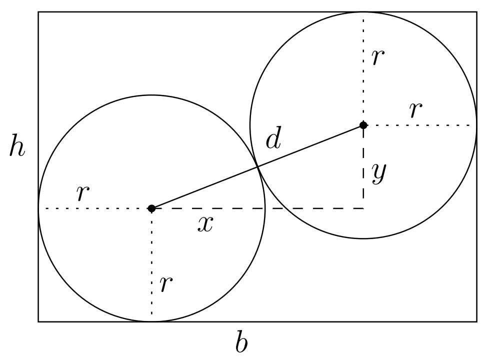
Beispiellösungen zu Blatt 75

Aufgabe 1

Ein Systemadministrator möchte seinen Hauptrechner mit einer Lüftung versehen. Die Luft geht dabei durch ein kreisrundes Rohr in den Rechnerraum hinein und durch ein ebenso großes Rohr wieder hinaus. In der Wand ist bereits eine rechteckige Öffnung von 37 mal 59 Zentimetern, die für die Rohre genutzt werden kann. Wie groß kann man den Durchmesser der Rohre maximal wählen, wenn man das Loch nicht erweitern möchte?

Lösung:

Offensichtlicherweise liegen bei einer optimalen Lösung die beiden Rohre in gegenüberliegenden Ecken und sie berühren sich. (Wäre das nicht so, könnte man beide ein wenig verschieben, so dass sie sich gar nicht mehr berühren, und sie dann etwas größer machen – Widerspruch!)
Wir bezeichnen mit x den horizontalen Abstand der beiden Mittelpunkte, mit y den vertikalen Abstand, und $d = 2r$ sei der Durchmesser der Rohre. Es sei h die Höhe der Öffnung ($h = 37\,\text{cm}$) und b deren Breite ($b = 59\,\text{cm}$).



Dann gilt (vgl. Skizze):

$$\begin{aligned} x &= b - 2r = b - d, \\ y &= h - 2r = h - d \quad \text{und} \\ d^2 &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

Einsetzen der ersten beiden Zeilen in die dritte ergibt:

$$\begin{aligned} & d^2 = (h-d)^2 + (b-d)^2 = h^2 + b^2 - 2(h+b)d + 2d^2 \\ \Leftrightarrow\quad & d^2 - 2(h+b)d + h^2 + b^2 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & d^2 - 2(h+b)d + h^2 + 2hb + b^2 = 2hb \\ \Leftrightarrow\quad & (d-(h+b))^2 = 2hb \\ \Leftrightarrow\quad & d-(h+b) = -\sqrt{2hb}\,, \quad \text{da die linke Seite negativ sein muss} \\ \Leftrightarrow\quad & d = h + b - \sqrt{2hb} \end{aligned}$$

Im konkreten Fall lautet die Lösung also:

$$\begin{aligned} d &= 59 + 37 - \sqrt{2 \cdot 59 \cdot 37} \\ &= 96 - \sqrt{4366} \\ &\approx 29{,}9\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

Ausnahmsweise entstammt die Geschichte dieser Aufgabe nicht unserer Fantasie, sondern dem realen Leben: Genau so wurde die Aufgabe jemandem im Umkreis unseres Zirkels gestellt, und netterweise wurde das an uns weitergeleitet. Vielen Dank!

Aufgabe 2

Es gilt $(20+25)^2 = 2025$. Finde alle Paare zweistelliger Zahlen (wobei führende Nullen erlaubt sind), bei denen das Quadrat der Summe gleich der Zahl ist, die beim Hintereinanderschreiben entsteht.

Lösung:
Gesucht sind alle nichtnegativen ganzen Zahlen a und b kleiner als 100 mit

$$\begin{aligned} & (a+b)^2 = 100a + b. \\ \iff & a^2 + a(2b - 100) + (b^2 - b) = 0 \\ \iff & a = 50 - b \pm \sqrt{2500 - 100b + b^2 - (b^2 - b)} \qquad \text{nach der } p\text{-}q\text{-Formel} \\ & = 50 - b \pm \sqrt{2500 - 99b}\,. \end{aligned}$$

Da a und b ganze Zahlen sein sollen, muss $2500 - 99b$ eine Quadratzahl sein. Es muss also gelten: $2500 - 99b = z^2$ mit einem $z \in \mathbb{Z}$.

Eine Möglichkeit, an dieser Stelle fortzufahren, ist, zu erkennen, dass b nicht größer als 25 sein kann (da sonst z^2 als negativ anzunehmen wäre), und dann für b alle Zahlen von 0 bis 25 auszuprobieren.

Ein etwas allgemeinerer Weg, den wir im Folgenden gehen wollen, betrachtet die Restklassen bei Division durch geeignete Zahlen:
Da $99b$ durch 9 und 11 teilbar ist und 2500 bei Division durch 9 den Rest 7 und bei Division durch 11 den Rest 3 lässt, muss auch z^2 bei Division durch 9 den Rest 7 und bei Division durch 11 den Rest 3 lassen.

Allgemein gilt für beliebige natürliche Zahlen x, m und k:

$$x^2 \equiv (m-x)^2 \mod m \qquad \text{und} \qquad x^2 \equiv (x + k \cdot m)^2 \mod m\,.$$

Um nun alle Quadratzahlen zu bestimmen, die bei Division durch m einen bestimmten Rest q lassen, genügt es also, die Quadrate der Zahlen zwischen 0 und $m/2$ zu prüfen, da sich aus diesen Zahlen und den beiden obigen Operationen alle Quadratzahlen erzeugen lassen.
Alle weiteren Zahlen, deren Quadrate dieselbe Restklasse q haben, erhält man dann durch Differenzbildung zu m und durch Addition beliebiger Vielfacher von m.

Konkret in unserem Fall: Die Reste von 0^2, 1^2, 2^2, 3^2 bzw. 4^2 bei Division durch 9 sind 0, 1, 4, 0 bzw. 7.
Also sind die Quadratzahlen mit Rest 7 genau die Zahlen 4^2, $(9-4)^2 = 5^2$, $(4+k\cdot 9)^2$ und $(5+k\cdot 9)^2$ mit $k = 1, 2, 3, \ldots$, das heißt: 4, 5, 13, 14, 22, 23, 31, 32, 40, 41, 49, 50, ...
Die Reste von 0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2 bzw. 5^2 bei Division durch 11 sind 0, 1, 4, 9, 5 bzw. 3.
Also sind die Quadratzahlen mit Rest 3 genau die Zahlen 5^2, $(11-5)^2 = 6^2$, $(5+k\cdot 11)^2$ und $(6+k\cdot 11)^2$ mit $k = 1, 2, 3, \ldots$, das heißt: 5, 6, 16, 17, 27, 28, 38, 39, 49, 50, ...
Da b nicht negativ sein darf, muss außerdem $z \le 50$ sein.
Aus diesen drei Bedingungen folgt, dass z nur 5, 49 oder 50 sein kann.

Gehen wir diese drei Fälle durch:

$$\begin{array}{lllll}
z = 5 & \Rightarrow & b = (2500-5^2)/99 = 25 & \Rightarrow & a = 50 - 25 \pm 5 \\
 & & & & a = 20 \text{ oder } a = 30 \\
z = 49 & \Rightarrow & b = (2500-49^2)/99 = 1 & \Rightarrow & a = 50 - 1 \pm 49 \\
 & & & & a = \ \ 0 \text{ oder } a = 98 \\
z = 50 & \Rightarrow & b = (2500-50^2)/99 = 0 & \Rightarrow & a = 50 - 0 \pm 50 \\
 & & & & a = \ \ 0 \text{ oder } a = 100
\end{array}$$

Eine Probe bestätigt, dass die Tupel (20, 25), (30, 25), (00, 01), (98, 01) und (00, 00) die gesuchte Eigenschaft haben.

Aufgabe 3

Der Reiseleiter Marco Olo ist mit einer Gruppe von Touristen in New York. Heute will er ihnen das Gebiet zwischen der 47th und 59th Street in Nord-Süd-Richtung sowie der 1st und 13th Avenue zeigen – mit Ausnahme des Broadway, den sie schon gestern besichtigt haben und der sich nicht so klar an einer einzigen Richtung orientiert. Die übrigen Straßen in diesem Teil Manhattans sind – etwas idealisiert – nach einem Schachbrettmuster angeordnet mit einer Ausdehnung von jeweils 12 „Feldern“ in Nord-Süd- bzw. Ost-West-Richtung. Startpunkt ist die Metro-Station an der Kreuzung 53rd Street / Seventh Avenue genau in der Mitte des Gebietes.

Die Reisegruppe, die übrigens nur aus Mathematikern besteht, wünscht sich dabei eine Stadtführung der besonderen Art: An jeder Kreuzung soll mit Hilfe zweier Münzwürfe ausgelost werden, in welche der vier Himmelsrichtungen die Gruppe weitergehen wird. Für den Weg zwischen zwei Kreuzungen will man sich jeweils eine halbe Stunde Zeit nehmen. Insgesamt soll die Stadtführung drei Stunden dauern, da Marco damit rechnet, dass die Touristen nach dieser Zeit erschöpft sein werden.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht die Gruppe die 59th Street, wo man sich im Central Park ausruhen könnte?

b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Gruppe innerhalb der drei Stunden noch einmal an ihrem Ausgangspunkt vorbeikommt?

Lösung:

Teil a): Da die 59th Street genau sechs Straßen nördlich vom Ausgangspunkt liegt, kann diese Straße von der Gruppe in drei Stunden nur erreicht werden, falls die Gruppe stets in Richtung Norden geht. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich die Gruppe eine halbe Stunde in Nord-Richtung bewegt, beträgt jeweils $\frac{1}{4}$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4096} = 0{,}000244140625$, also ungefähr $0{,}02\,\%$.

Teil b): Um die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu berechnen, bestimmen wir zunächst die Anzahl aller Wegrouten, bei denen man innerhalb von drei Stunden wieder am Ausgangspunkt vorbeikommt. Da man sich innerhalb einer halben Stunde stets von einer Kreuzung zu einer benachbarten Kreuzung bewegt, kann man nur nach einer geraden Anzahl von Schritten, also nach vollen Stunden, wieder am Ausgangspunkt angekommen.

Im Folgenden bezeichnen wir mit n_I die Anzahl der Routen, die die Eigenschaft I haben. Dabei werden wir in unserem Fall I als Kombinationen aus den Zahlen $1, 2, 3$ sowie den Buchstaben „u" und „o" schreiben. Dabei bedeutet die Zahl, dass sich die Gruppe nach dieser Anzahl von Stunden wieder am Ausgangspunkt befindet. Die Buchstaben „u" bzw. „o" verknüpfen diese Bedingungen durch ein logisches „und" bzw. „und/oder". Über nicht als Zahlen auftretende Zeitpunkte soll dabei keine Aussage gemacht werden.

Gesucht ist nun die Anzahl der Routen, bei denen sich die Gruppe nach einer, zwei oder drei Stunden wieder am Ausgangspunkt befindet, also n_{1o2o3}. Es wird sich herausstellen, dass die Anzahl der Routen, die nur „und"-Bedingungen erfüllen, vergleichsweise einfach bestimmen lässt. Daher wollen wir n_{1o2o3} anders darstellen. Um zunächst einmal n_{1o2} zu berechnen, addieren wir n_1 und n_2. Dann haben wir jedoch die Routen, bei denen die Gruppen nach einer und nach zwei Stunden am Ausgangspunkt vorbeikommt, doppelt gezählt und müssen ihre Anzahl daher noch einmal subtrahieren. Es gilt also

$$n_{1o2} = n_1 + n_2 - n_{1u2}.$$

Analog erhält man

$$n_{1o2o3} = n_{1o2} + n_3 - n_{(1o2)u3} = n_1 + n_2 + n_3 - n_{1u2} - n_{1u3} - n_{2u3} + n_{1u2u3}.$$

Diese Formel ist ein Spezialfall der sogenannten „Siebformel".

Um nun die Anzahlen der Routen zu bestimmen, sehen wir jede Route (bzw. Teilroute) als Menge von k (halbstündigen) Schritten an, die in Teilmengen von k_1 Schritten in Nord-, k_2 in Süd-, k_3 in West- und k_4 Schritten in Ostrichtung unterteilt werden kann ($k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = k$). Die Anzahl der Möglichkeiten, die es dafür gibt, bestimmt man mit Hilfe des Multinomialkoeffizienten $\binom{k}{k_1, k_2, k_3, k_4} := \frac{k}{k_1!\cdot k_2!\cdot k_3!\cdot k_4!}$ (siehe Bemerkung). Die Bedingung, dass man sich dabei nach k Schritten wieder am Ausgangspunkt befindet, ist dann gleichbedeutend damit, dass man jeweils gleich viele Schritte in Nord und Süd- bzw. in West- und Ostrichtung gegangen ist, also $k_1 = k_2$ und $k_3 = k_4$.

Für $n = 1$ betrachten wir die zulässigen Möglichkeiten für die beiden ersten Schritte. Da diese jeweils entweder Nord-/Süd- oder West-/Ostrichtung gemacht werden können, sind dies dann $\binom{2}{1,1,0,0} + \binom{2}{0,0,1,1}$ Möglichkeiten. Weiterhin können die Schritte drei bis sechs jeweils in beliebige Himmelsrichtung erfolgen. Damit ergibt sich

$$n_1 = \left(\binom{2}{1,1,0,0} + \binom{2}{0,0,1,1}\right) \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = (2+2) \cdot 4^4 = 4^5.$$

Analog erhält man:

$$\begin{aligned}
n_2 &= \left(\binom{4}{2,2,0,0} + \binom{4}{1,1,1,1} + \binom{4}{0,0,2,2}\right) \cdot 4^2 \\
&= (6 + 24 + 6) \cdot 4^2 = 36 \cdot 4^2, \\
n_3 &= \binom{6}{3,3,0,0} + \binom{6}{2,2,1,1} + \binom{6}{1,1,2,2} + \binom{6}{0,0,3,3} \\
&= 20 + 180 + 180 + 20 = 400, \\
n_{1u2} &= \left(\binom{2}{1,1,0,0} + \binom{2}{0,0,1,1}\right) \\
&\quad \cdot \left(\binom{2}{1,1,0,0} + \binom{2}{0,0,1,1}\right) \cdot 4 \cdot 4 = 4 \cdot 4 \cdot 4^2 = 4^4, \\
n_{1u3} &= \left(\binom{2}{1,1,0,0} + \binom{2}{0,0,1,1}\right) \\
&\quad \cdot \left(\binom{4}{2,2,0,0} + \binom{4}{1,1,1,1} + \binom{4}{0,0,2,2}\right) = 4 \cdot 36 = 144, \\
n_{2u3} &= \left(\binom{4}{2,2,0,0} + \binom{4}{1,1,1,1} + \binom{4}{0,0,2,2}\right) \\
&\quad \cdot \left(\binom{2}{1,1,0,0} + \binom{2}{0,0,1,1}\right) = 36 \cdot 4 = 144, \\
n_{1u2u3} &= \left(\binom{2}{1,1,0,0} + \binom{2}{0,0,1,1}\right) \cdot \left(\binom{2}{1,1,0,0} + \binom{2}{0,0,1,1}\right) \\
&\quad \cdot \left(\binom{2}{1,1,0,0} + \binom{2}{0,0,1,1}\right) = 4^3 = 64
\end{aligned}$$

Mit obiger Formel folgt

$$n_{1o2o3} = 4^5 + 36 \cdot 4^2 + 400 - 4^4 - 144 - 144 + 64 = 1520\,.$$

Da es insgesamt $4^6 = 4096$ mögliche Pfade gibt, von denen jeder gleich wahrscheinlich ist, beträgt dann die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{1520}{4096} = \frac{95}{256} = 0{,}37109375$, also ungefähr 37 %.

Bemerkung (Herleitung des Multinomialkoeffizienten):

Gesucht ist die Anzahl der Möglichkeiten, eine Menge mit n Elementen in k Teilmengen mit $n_1, \ldots, n_k$ Elementen zu unterteilen ($n_1 + \ldots + n_k = n$). Diesen Unterteilungsvorgang können wir auch wie folgt auffassen: Wir wählen zunächst aus der Gesamtmenge n_1 Elemente für die erste Teilmenge, dann aus den verbleibenden $n - n_1$ Elementen n_2 Elemente für die zweite Teilmenge, usw..

Um aus einer m-elementigen Menge l Elemente auszuwählen, hat man $\binom{m}{l} := \frac{m!}{l!(m-l)!}$ Möglichkeiten (m für das erste Element, ..., $m - l + 1$ für das l-te Element; da die Reihenfolge der ausgewählten Elemente keine Rolle spielt, führen dabei jeweils $l!$ Möglichkeiten zum gleichen Ergebnis, weshalb die Anzahl noch durch $l!$ zu dividieren ist. Man erhält also $\frac{1}{l!} \cdot m \cdot \ldots \cdot (m-l+1) = \frac{1}{l!} \cdot \frac{m!}{(m-l)!}$).

So bekommt man insgesamt $\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-n_1-\ldots-n_{k-1})!}{k_n! \cdot (n-n_1-\ldots-n_k)!} = \frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!} =: \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ Möglichkeiten.

Aufgabe 4

Im Weihnachtsengelland müssen noch die vielen Bäume mit Kerzen versehen werden. Es gibt drei Arten, einen Baum zu schmücken: Einmal mit 71, dann mit 101 und auch noch mit 147 Kerzen. Das Schmücken eines solchen Baumes benötigt 4 bzw. 5 bzw. 6 Arbeitsstunden.
Im vergangenen Jahr wurden genau eine Million Kerzen verwendet, und die Arbeit umfasste 48 600 Arbeitsstunden. Ein junger Engel erinnert sich noch daran, dass genau 9 984 Bäume geschmückt wurden. Der Leiter der Baumdekorationsabteilung bestätigt diese Zahl, stellt aber fest: „Im letzten Jahr haben wir allerdings auch ein paar Bäume zu schmücken vergessen, das darf nicht wieder vorkommen. Es könnte aber auch sein, dass inzwischen ein paar Bäume verschwunden sind. Trotzdem sollen wir in diesem Jahr wieder die gleiche Zahl an Kerzen und an Arbeitsstunden aufwenden. Ich frage mich gerade, welchen Spielraum wir da haben ...“
Könnt ihr dem Engel helfen? Für welche Anzahlen an Bäumen ist es möglich, sie gemäß den Vorgaben zu schmücken?

Lösung:

Es bietet sich an, zunächst auszurechnen, wie viele Bäume von jeder der drei Arten im vorigen Jahr geschmückt worden sind. Dazu muss man ein Gleichungssystem mit den drei unbekannten Anzahlen x (Art 1), y (Art 2), z (Art 3) lösen, welches sich aus den Informationen vom letzten Jahr ergibt:

$$71x + 101y + 147z = 1\,000\,000 \text{ (Kerzen)} \qquad (1)$$
$$4x + 5y + 6z = 48\,600 \text{ (Arbeitsstunden)} \qquad (2)$$
$$x + y + z = 9\,984 \text{ (Bäume)} \qquad (3)$$

(1) − 71 · (3) und (2) − 4 · (3) liefern

$$30y + 76z = 291\,136 \tag{4}$$
$$y + 2z = 8\,664\,. \tag{5}$$

(4) − 30 · (5) ergibt: $16z = 31\,216 \iff z = 1\,951$.
Durch Einsetzen in (5) und (3) erhält man schließlich

$$x = 3\,271 \qquad y = 4\,762 \qquad z = 1\,951\,.$$

Zurück zur eigentlichen Fragestellung: Für welche Anzahlen außer 9 984 ist es möglich, die zwei Vorgaben einzuhalten?
Etwas anders formuliert lautet diese Frage: Angenommen, man verändert die Anzahl einer Sorte im Vergleich zum Vorjahr (um a), um wie viel (b bzw. c) muss man dann die Anzahlen der anderen beiden Sorten ändern, um die Gesamtzahlen der Kerzen und der Arbeitsstunden beizubehalten?
Die Summe der Veränderungen in den einzelnen Sorten ist dann gerade die Differenz aus Bäumen in diesem Jahr zur Vorjahreszahl.

Es gilt also, das folgende Gleichungssystem zu lösen:

$$71(x + a) + 101(y + b) + 141(z + c) = 1\,000\,000 \text{ (Kerzen)} \tag{6}$$
$$4(x + a) + 5(y + b) + 6(z + c) = 48\,600 \text{ (Arbeitsstunden)} \tag{7}$$

Nach „Abzug“ der bereits bekannten Lösung ergibt sich das (homogene) Gleichungssystem:

$$71a + 101b + 141c = 0 \tag{8}$$
$$4a + 5b + 6c = 0 \tag{9}$$

Auflösen von (9) nach a und Einsetzen in (8) ergibt:

$$\frac{49}{4}b + \frac{81}{2}c = 0 \iff b = -\frac{162}{49}c$$
$$\text{sowie } a = +\frac{129}{49}c\,.$$

Das bedeutet: Will man 49 Bäume mehr nach Art 3 schmücken, so muss man 162 weniger nach Art 2 und 129 mehr von Art 1 schmücken. Insgesamt hat man dann $49 - 162 + 129 = 16$ Bäume mehr als im Vorjahr zu schmücken.

Da alle Anzahlen ganzzahlig sein müssen und da 49 teilerfremd zu 162 und 129 ist, darf die Anzahl der Bäume, die nach Art 3 geschmückt werden, nur um Vielfache von 49 variieren – immer ausgehend von der Situation im letzten Jahr.
Nun ist die Frage, wie oft man 49 Bäume von Art 3 maximal hinzunehmen bzw. weglassen kann, ohne von einer der anderen beiden Arten eine negative Anzahl von Bäumen schmücken zu müssen.

Da man von $4\,762$ (Art 2 im Vorjahr) maximal 29-mal 162 abziehen kann ($4\,762 - 29 \cdot 162 = 64 < 162$), ist die maximal mögliche Anzahl von Bäumen mit 147 Kerzen $1\,951 + 29 \cdot 49 = 3\,372$. (Insgesamt gibt es dann $9\,984 + 29 \cdot 16 = 10\,448$ Bäume.)
Mit demselben Argument ($3\,271 - 25 \cdot 129 = 46 < 129$) erhält man als minimale Zahl vom Bäumen mit 147 Kerzen $1\,951 - 25 \cdot 49 = 726$. Insgesamt hat man dann $9\,984 - 25 \cdot 16 = 9\,584$ Bäume.

Die gesuchten Anzahlen sind also

$$9\,584\,, \quad 9\,584 + 1 \cdot 16\,, \quad 9\,584 + 2 \cdot 16\,, \quad \ldots, \quad 9\,584 + 54 \cdot 16 = 10\,448\,.$$