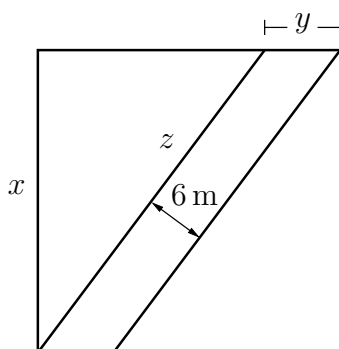


Beispiellösungen zu Blatt 76

Aufgabe 1

In einer neuen Filiale einer kleinen schwedischen Möbelhauskette soll es einen quadratischen Ausstellungsraum geben. Es ist vorgeschrieben, dass der Gang für die Besucher die Ausstellungsfläche in drei gleich große Teile einteilen soll und überall genau sechs Meter breit sein soll. Außerdem soll der Gang so wie in der Skizze dargestellt von der linken unteren Ecke des Raumes in die rechte obere Ecke führen.

Wie groß ist die Ausstellungsfläche, wenn alle Vorgaben erfüllt werden?



Lösung:

Die Seitenlänge der Ausstellungsfläche sei mit x und die Breite des oberen Endes des mittleren Flächenstückes sei mit y bezeichnet.

Jedes der drei Flächenstücke soll ein Drittel der Gesamtfläche einnehmen, also einen Flächeninhalt von

$$A = \frac{1}{3}x^2$$

haben.

Der Flächeninhalt des linken Dreiecks beträgt $A = \frac{1}{2}x(x - y)$. Also erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x^2 &= \frac{1}{2}x \cdot (x - y) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}xy &= \frac{1}{6}x^2. \end{aligned}$$

Wegen $x \neq 0$ ist die letzte Gleichung äquivalent zu

$$y = \frac{1}{3}x. \quad (1)$$

Das mittlere Flächenstück ist ein Parallelogramm mit dem Flächeninhalt

$$A = 6 \cdot z.$$

Nach dem Satz von Pythagoras gilt im linken Dreieck

$$z^2 = x^2 + (x - y)^2,$$

so dass wir

$$z = \sqrt{x^2 + (x - y)^2}$$

erhalten. Zusammen folgt:

$$\frac{1}{3}x^2 = 6 \cdot z = 6 \cdot \sqrt{x^2 + (x - y)^2}$$

Setzen wir nun noch y aus (1) in die letzte Gleichung ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x^2 &= 6 \cdot \sqrt{x^2 + \left(x - \frac{1}{3}x\right)^2} \\ &= 6 \cdot \sqrt{x^2 + \frac{4}{9}x^2} = 6 \cdot \sqrt{\frac{13}{9}x^2} = 6 \cdot \frac{1}{3}x\sqrt{13}. \end{aligned}$$

Da $x \neq 0$ gilt, folgt

$$x = 6\sqrt{13} \text{ und } y = \frac{1}{3}6\sqrt{13} = 2\sqrt{13}.$$

Die Ausstellungsfläche ist dann $x^2 = 36 \cdot 13 = 468$ Flächeneinheiten groß.

Aufgabe 2

Der Reiseleiter Marco Olo reist mit einer Gruppe von Touristen durch Frankreich. Sie möchten eine Rundreise mit Start und Ziel in Paris machen und dabei auch die Städte Rennes, Lyon und Lille besichtigen. Mit dem Zug haben sie folgende Reisezeiten bei Direktverbindungen:

	Paris	Rennes	Lyon	Lille
Paris	–	2 h	2 h	1 h
Rennes	2 h	–	4,5 h	4 h
Lyon	2 h	4,5 h	–	3 h
Lille	1 h	4 h	3 h	–

- Finde eine Route mit einer möglichst kurzen Reisezeit (unter Vernachlässigung von Umsteigezeiten).
- Die Reisegruppe möchte keine der Strecken zweimal nutzen. Wie sieht die schnellste Route mit dieser Nebenbedingung aus?

Lösung:

Teil a) Vergleichen wir die Fahrtdauer der Direktverbindungen Rennes–Lyon, Lyon–Lille und Lille–Rennes jeweils mit der Fahrtdauer bei einem Umstieg in Paris (also Rennes–Paris–Lyon, Lyon–Paris–Lille und Lilles–Paris–Rennes), so stellen wir fest, dass die Fahrtdauer bei Fahrt über Paris nie länger ist als bei der Direktverbidung (im Fall Lyon–Lille ist die Fahrtdauer gleich). Daher geht es am schnellsten, wenn man immer über Paris fährt, wie z. B. die Tour Paris–Rennes–Paris–Lyon–Paris–Lille–Paris (oder mit der Direktverbindung Lyon–Lille: Paris–Rennes–Paris–Lyon–Lille–Paris). In diesem Fall dauert die Tour 10 Stunden.

Teil b) In den oben beschriebenen Touren tauchen Strecken doppelt auf und dies sind (bis auf Vertauschen der Reihenfolge) die einzigen Touren, die „nur“ 10 Stunden dauern. Um die doppelt befahrenen Strecken zu vermeiden, müssen wir sie in der Tour durch Direktverbindungen ersetzen. Dazu betrachten wir den Zeitverlust, den die Direktverbindung mit sich bringt. Dieser beträgt im Fall Rennes–Lyon 0,5 Stunden, im Fall Lille–Rennes 1 Stunde und im Fall Lyon–Lille gibt es keinen Zeitverlust. Wir ersetzen nun die Verbindungen über Paris nacheinander durch Direktverbindungen so, dass der Zeitverlust möglichst gering bleibt. Im ersten Schritt nehmen wir die Strecke Lyon–Lille und erhalten die Tour Paris–Rennes–Paris–Lyon–Lille–Paris, die auch 10 Stunden dauert, bei der jedoch die Strecke Paris–Rennes doppelt auftaucht. Im nächsten Schritt nehmen wir die Direktverbindung Rennes–Lyon dazu. Dies führt zu der Tour Paris–Rennes–Lyon–Lille–Paris. Diese dauert 10,5 Stunden und enthält keine doppelt befahrenen Strecken. Da – wie oben festgestellt wurde – jede schnellere Tour (d. h. eine Tour der Dauer 10 Stunden) doppelt befahrene Strecken enthält, ist dies die kürzestmögliche Tour mit den gesuchten Eigenschaften.

Aufgabe 3

Oskar hat 100 Holzstäbe, deren Längen in Zentimetern ganzzahlig sind und die alle jeweils nicht länger als 1 Meter sind. Dabei treten mindestens 88 verschiedene Längen auf. Wenn er sie alle hintereinanderlegt, ist die Länge dieser Strecke in Zentimetern gerade.

Zeige, dass Oskar die Stäbe auch so auf zwei nebeneinanderliegende Strecken verteilen kann, dass die beiden Strecken gleich lang sind.

Lösung:

Als Erstes bildet Oskar Paare von Stäben, deren Länge sich um 1 unterscheidet: Er betrachtet die 50 möglichen Längenpaare (1, 2), (3, 4), (5, 6), ..., (99, 100). Da es höchstens 12 der Längen von 1 bis 100 nicht gibt, sind mindestens 38 der genannten Paare in seiner Sammlung vorhanden. Diese Stäbe legt Oskar erst einmal in vollständigen Paaren beiseite.

Mit den restlichen Stäben beginnt er, die beiden Strecken zu bauen. Dabei legt er den nächsten Stab immer an die Strecke, die bis dahin kürzer ist.

So erreicht er, dass der Längenunterschied der beiden Strecken maximal 100 beträgt.

Ist nach dem Verbauen der nicht beiseitegelegten Stäbe die Längendifferenz kleiner gleich 38, so kann Oskar dies mit den Paaren sofort ausgleichen: Mit dem Anlegen jedes Paares wird die Differenz um 1 verringert, indem der längere Stab an die kürzere Strecke gelegt wird und kürzere an die längere. Wird vorzeitig Längengleichheit erreicht, stört das natürlich nicht, denn die durch das nächste Paar geschaffene neue Differenz 1 wird vom übernächsten ausgeglichen. Da die Gesamtsumme der Längen gerade ist, kann das Verfahren nicht mit der Differenz 1 enden.

Ist die Längendifferenz von eben jedoch größer als 38, planen wir etwas genauer: Sei d diese Differenz und n diejenige ganze Zahl mit

$$\begin{aligned} 2n - 1 &= d - 37 \quad \text{oder} \\ 2n - 1 &= d - 36. \end{aligned} \tag{2}$$

Unter den 13 Längenpaaren (in der Anordnung wie oben), die eine der Zahlen $n, n + 2, n + 4, \dots$ oder $n + 24$ enthalten (man beachte: es ist $2 \leq n \leq 32$, daher $n + 24 < 100$), muss mindestens eines in Oskars Sammlung enthalten sein. Dieses bzw. eines davon nimmt er und legt beide Stäbe an die kürzere Strecke, die dadurch um mindestens $2n - 1$ und höchstens $2n + 49$ länger wird. Nach Wahl von n verändert sich die gerichtet gemessene Differenz dadurch auf einen Wert zwischen

$$\begin{aligned} d - (2n - 1) &\leq 37 \quad \text{und} \\ d - (2n + 49) &= d - (2n - 1) \geq 36 - 50 = -14 \quad (\text{vgl. (2)}), \end{aligned}$$

im Betrag also kleiner gleich 37. Diese Differenz kann Oskar mit den verbleibenden (mindestens) 37 Paaren wie oben beschrieben ausgleichen.

Bemerkung: Das eben beschriebene Verfahren ist an mehreren Stellen mit verschieden großem Aufwand in dem Sinne verbesserungsfähig, dass man auch auskommt, wenn weniger als 88 verschiedene Längen vorhanden sind. Leider wissen wir nicht, wie viele verschiedene Längen mindestens gefordert werden müssen, um die Aufgabe bei ansonsten beliebiger Verteilung lösen zu können. Ein Beispiel zeigt, dass diese Zahl größer als 22 sein muss: Gibt es je einen Stab der Länge 1 und 2 und ansonsten nur Stäbe mit durch 5 teilbaren Längen, so ist es nicht möglich, diese so zusammenzulegen, dass die Längen auf beiden Seiten den gleichen Rest beim Teilen durch 5 lassen, somit können die beiden Seiten insbesondere nicht gleich lang werden. Aber zwischen 22 und 88 ist noch viel Luft – wir würden uns über Verbesserungsvorschläge freuen.

Aufgabe 4

Aufregung im Mathematischen Institut: Ein wertvolles Stück der Modellsammlung ist gestohlen worden! Die Polizei befragt Mathematiker, die flüchtig die mindestens zwei- und höchstens vierstellige Nummer n des Fluchtautos gesehen haben. Sie sagen Folgendes aus:

- (1) n ist kleiner als 100.
- (2) n ist eine Quadratzahl.
- (3) n hat die Quersumme 20.
- (4) Die letzten beiden Ziffern von n sind entweder beide gerade oder beide ungerade.
- (5) n ist durch keine 5. Potenz teilbar.
- (6) n lässt sich nicht als Summe zweier aufeinanderfolgender Zahlen schreiben.

„Nanu!“, wundert sich der Polizist. „Da sind ja mindestens k Aussagen falsch!“

a) Wie groß ist k ?

Als ihm später gesagt wird, dass an dem Tag der Anti-Logik-Tag war und alle Mathematiker nur falsche Äußerungen machen durften, ist er schon wieder sehr viel zufriedener.

b) Welche Zahlen bleiben letztlich noch übrig?

Lösung:

Teil a) Es sind mindestens zwei Aussagen falsch, das heißt das gesuchte k ist 2.

Zunächst stellt man fest, dass sich Aussage 1 und Aussage 3 gegenseitig ausschließen, denn die größte Quersumme aller Zahlen kleiner als 100 hat die 99, und diese ist 18.

Wenn nun Aussage 3 richtig ist (und somit Aussage 1 falsch), so lässt n bei Division durch 3 den Rest 2, da jede Zahl kongruent zu ihrer Quersumme modulo 3 ist. Dann ist aber Aussage 2 falsch, denn Quadrate haben alle Rest 0 oder 1 bei Division durch 3. Also hat man in diesem Fall schon 2 falsche Aussagen.

Ist andererseits Aussage 1 wahr (und somit Aussage 3 unwahr), so ist entweder Aussage 2 falsch (und man hat zwei falsche Aussagen) oder Aussage 2 ist wahr, d. h. $n = 16, 25, 36, 49, 64$ oder 81. Ist n gleich 64, so ist Aussage 5 falsch ($64 = 2 \cdot 2^5$); andernfalls ist Aussage 4 falsch.

Also hat man immer mindestens zwei falsche Aussagen.

Jetzt ist noch zu zeigen, dass k nicht größer als 2 ist. Dazu suchen wir eine Zahl, für die auch wirklich nur 2 Aussagen falsch sind. Eine dieser Zahlen ist die 64, bei der nur Aussagen 3 und 5 falsch sind.

Teil b) Nun gehen wir davon aus, dass alle Aussagen falsch sind: Gesucht sind also alle Zahlen n , für die gilt:

- ($\tilde{1}$) $n \geq 100$,
- ($\tilde{2}$) n ist keine Quadratzahl,
- ($\tilde{3}$) n hat nicht die Quersumme 20,
- ($\tilde{4}$) die letzten beiden Ziffern von n haben verschiedene Parität, d. h. eine der beiden Ziffern ist gerade, die andere ungerade,
- ($\tilde{5}$) n ist durch eine 5. Potenz teilbar,
- ($\tilde{6}$) n ist ungerade.

Die fünften Potenzen von 2, 3, 4, 5 und 6 sind 32, 243, 1024, 3125 und 7776. (7^5 ist bereits größer als 9999.) In Frage kommen also nur Vielfache dieser Potenzen, die kleiner als 10000 sind.

Da n ungerade ist, fallen die Vielfachen von 32, 1024 und 7776 bereits weg. Von den übrigen fünften Potenzen kommen weiterhin nur ungerade Vielfache in Frage.

Von 3125 sind dies $1 \cdot 3125$ und $3 \cdot 3125 = 9375$. Letzteres scheidet allerdings aus, da die letzten beiden Ziffern dieselbe Parität haben.

Die ungeraden Vielfachen von 243 sind:

243, 729, 1215, 1701, 2187, 2673, 3159, 3645, 4131, 4617, 5103, 5589, 6075, 6561, 7047, 7533, 8019, 8505, 8991, 9477 und 9963.

Von diesen erfüllen nur 243, 729, 1701, 2187, 3645, 5103, 5589, 6561, 7047, 8505 und 9963 die Paritätsbedingung. Außer $729 = 27^2$ und $6561 = 81^2$ erfüllen diese Zahlen auch die anderen Bedingungen ($\tilde{1}$), ($\tilde{2}$) und ($\tilde{3}$).

Übrig bleiben also die 10 Zahlen 243, 1701, 2187, 3125, 3645, 5103, 5589, 7047, 8505 und 9963.