

Beispiellösungen zu Blatt 77

Aufgabe 1

Die Zahl 29 ist sowohl als Summe der drei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen 2^2 , 3^2 und 4^2 als auch als Differenz zweier Quadratzahlen, nämlich $29 = 15^2 - 14^2$ darstellbar.

Welche anderen zweistelligen Zahlen haben dieselbe Eigenschaft?

Lösung:

Die zweistelligen Zahlen sollen aus der Summe $z^2 + (z+1)^2 + (z+2)^2$ dreier aufeinanderfolgender Quadratzahlen gebildet werden. Da $0^2 + 1^2 + 2^2 = 5$ und $5^2 + 6^2 + 7^2 = 110$ ist, muss $z \in \{1, \dots, 4\}$ sein. Damit ergeben sich die zweistelligen Zahlen 14, 29, 50 und 77. Diese erfüllen also die erste Bedingung der Aufgabenstellung.

Nun nehmen wir die zweite Bedingung dazu. Wir betrachten zunächst die ungeraden zweistelligen Zahlen, also 29 und 77. Die Differenz zweier Quadratzahlen schreiben wir allgemein als $a^2 - b^2$ mit $a > b$ und $a, b \in \mathbb{N}$, und genau eine der beiden Variablen muss hier ungerade sein. Wir betrachten den Fall, dass $b = a - 1$ ist. Daraus ergibt sich die Differenz $a^2 - (a-1)^2 = a^2 - a^2 + 2a - 1 = 2a - 1$. Nun lösen wir die daraus entstehenden Gleichungen $2a - 1 = 29$ und $2a - 1 = 77$. Aus der ersten erhalten wir, wie in der Aufgabenstellung, $a = 15$ und damit $29 = 15^2 - 14^2$. Die Lösung der zweiten Gleichung liefert $77 = 39^2 - 38^2$.

Jetzt betrachten wir die beiden geraden zweistelligen Zahlen 14 und 50. Für sie muss die Differenz folgendermaßen aussehen: $(a+x)^2 - a^2 = a^2 + 2ax + x^2 - a^2 = 2ax + x^2$, $a \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{N}$. Dann muss x gerade sein, da a und $a+x$ beide ungerade oder beide gerade sein müssen, damit die Differenz der Quadrate gerade ist. Wir schreiben daher $x = 2n$, $n \in \mathbb{N}$. Somit lautet die Differenz $2ax + x^2 = 2a(2n) + (2n)^2 = 4an + 4n^2 = 4n(a+n)$. Die geraden zweistelligen Zahlen müssten also durch 4 teilbar sein. Da 14 und 50 beide nicht durch 4 teilbar sind, gibt es keine Differenz von Quadratzahlen, die 14 oder 50 ergibt.

Also sind 29 und 77 die einzigen zweistelligen Zahlen, die die Voraussetzungen erfüllen.

Aufgabe 2

Auf jedem Feld eines 9×9 -Schachbrettes sitzt ein Käfer. Bei Sonnenuntergang krabbelt jeder Käfer auf ein diagonal benachbartes Feld. Sollte sich nach Sonnenuntergang auf einem Feld mehr als ein Käfer befinden, so feiern die entsprechenden Krabbeltiere auf dem Feld eine Party.

Wie viele Käferpartys finden mindestens statt?

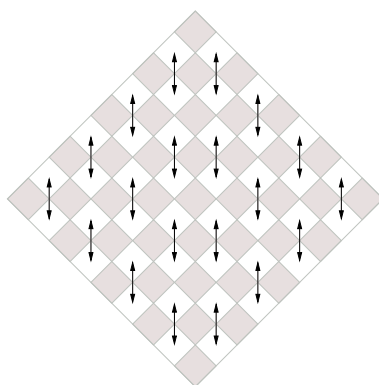
Und weil die Zahl so schön ist: Wie sieht es bei einem 77×77 -Feld aus?

Lösung:

Auf dem 9×9 -Feld finden mindestens drei Käferpartys statt.

Zunächst bestimmen wir eine scharfe untere Abschätzung der Anzahl der Käferpartys auf dem 9×9 -Schachbrett. Die klassische Schachbretteinfärbung sei so gehalten, dass die vier Felder in den Schachbrettecken schwarz seien. Da jeder Käfer wie ein Läufer beim normalen Schach nur auf ein Feld der gleichen Färbung wechseln kann, zerfällt das gesamte System in zwei unabhängige Teile, nämlich das der schwarzen und das weißen Felder.

Auf den weißen Feldern kann man sehr einfach eine Käferbewegung vorgeben, bei der es zu keinen Partys kommt – wir kippen dabei das Feld um 45 Grad, weil man dann die Struktur noch besser erkennt:



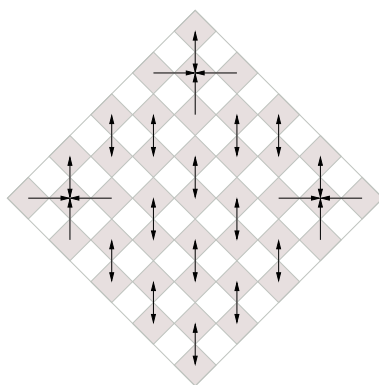
Bei den schwarzen Feldern kann man noch zwischen zwei Unterarten unterscheiden: Wir versehen das Schachbrett mit Koordinaten, und zwar so, dass die untere linke Ecke (wenn es nicht auf die Spitze gestellt ist) die Koordinaten $(1, 1)$ und die obere rechte die Koordinaten $(9, 9)$ hat. Dann erkennt man, dass ein Feld genau dann schwarz ist, wenn beide Koordinaten entweder ungerade oder beide gerade sind. Die Felder, bei denen beide Koordinaten gerade sind, nennen wir *gerade* Felder, die anderen *ungerade*. Man überlegt sich weiter, dass ein Käfer von einem geraden Feld aus zwingend auf ein ungerades gehen muss und umgekehrt.

Von den ungeraden Feldern gibt es $5^2 = 25$, von den geraden aber nur $4^2 = 16$. Das heißt, dass die Käfer von den ungeraden Feldern zu wenige gerade Felder vorfinden, um allein bleiben zu können. Es bleiben rechnerisch genau $25 - 16 = 9$ Käfer übrig.

Eine Party kann offensichtlich höchstens vier Teilnehmer haben – anders gesagt: es sind dann 3 Käfer mehr auf dem Feld als „normalerweise“.

Da 9 Käfer übrig sind, heißt das, dass es mindestens $9 : 3 = 3$ Partys geben muss.

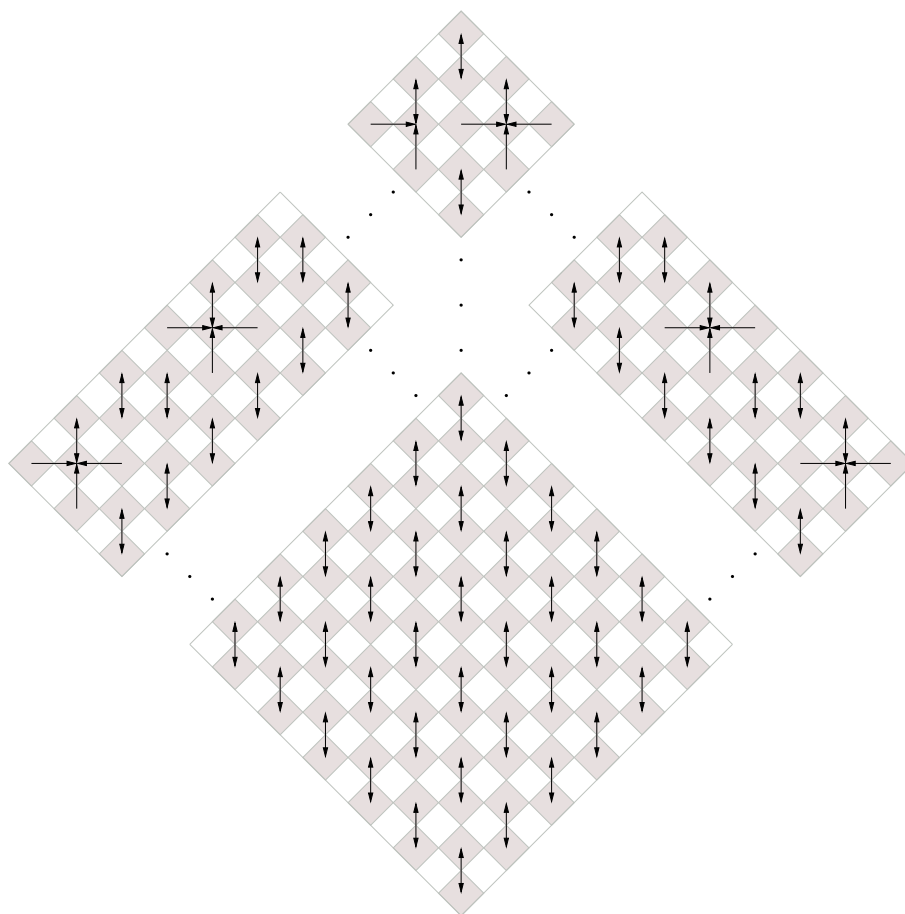
Und tatsächlich ist es möglich, dass sich die Käfer so bewegen, dass es nur drei Partys gibt:



Nun zu der Frage, wie es bei dem 77×77 -Feld aussieht:

Auf den weißen Feldern kann man wie oben die Käfer paarweise tauschen lassen, denn die weißen Diagonalen haben immer eine gerade Anzahl an Feldern.

Für die schwarzen Felder machen wir eine analoge Abschätzung wie eben: von den ungeraden Feldern gibt es 39^2 , von den geraden nur 38^2 . Es sind also $39^2 - 38^2 = 39 + 38 = 77$ Käfer übrig. Wenn wir 77 nun durch 3 teilen, müssen wir aufrunden: $77 : 3 = 26$. Und mit dem Prinzip von oben kann man auch eine Konstellation mit genau 26 Partys erreichen:



Man kann sich leicht klarmachen, dass dieses Prinzip allgemein gilt: Auf einem Feld der Größe $(2n - 1) \times (2n - 1)$ gibt es immer mindestens $\lceil \frac{2n-1}{3} \rceil$ Partys.

Und was passiert auf Feldern mit gerader Seitenlänge? Auf ihnen gibt es sowohl bei den schwarzen wie auch bei den weißen Feldern eine Diagonalenrichtung, auf der es immer eine gerade Anzahl an Feldern gibt. Nach dem Prinzip von oben auf den weißen Feldern können die Käfer also, wenn sie wollen, paarweise tauschen (das ergibt dann übrigens ein Muster, bei dem sie auf 2×2 -Feldern diagonal tauschen), so dass keine einzige Party garantiert ist. Wie langweilig!

Aufgabe 3

Wolfgang, Xaver, Yannik und Zacharias zeichnen je ein rechtwinkliges Dreieck mit ganzzahligen Seitenlängen auf ein Blatt Papier. Dabei stellen sie fest, dass bei allen vier Dreiecken die Maßzahl der Fläche doppelt so groß wie die Maßzahl des Umfangs ist.

Zeige, dass zwei der vier dasselbe Dreieck gezeichnet haben.

Lösung:

Variante 1: Für ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seitenlängen $a, b, c > 0$ und c als größter Seite gilt nach dem Satz des Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$ bzw. $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Die Aussage, dass die Maßzahl der Fläche doppelt so groß wie die Maßzahl des Umfangs ist, übersetzt sich zu $2(a + b + c) = \frac{ab}{2}$.

Durch Einsetzen von c und einfache Umformungen erhalten wir nun

$$\begin{aligned}
 & 2(a + b + \sqrt{a^2 + b^2}) = \frac{ab}{2} \\
 \iff & 4\sqrt{a^2 + b^2} = ab - 4a - 4b \\
 \implies & 16a^2 + 16b^2 = (ab)^2 + 16a^2 + 16b^2 - 8a^2b - 8ab^2 + 32ab \\
 \iff & 0 = (ab)^2 - 8a^2b - 8ab^2 + 32ab \\
 & \quad = ab \cdot (ab - 8(a + b) + 32) \\
 \implies & 0 = ab - 8(a + b) + 32, \text{ da } a, b > 0 \\
 & \quad = (a - 8)(b - 8) - 32 \\
 \iff & 32 = (a - 8)(b - 8).
 \end{aligned}$$

Da alle Seitenlängen ganzzahlig sind, folgt, dass $a - 8$ und $b - 8$ Teiler von $32 = 2^5$ sind. Es kommen also höchstens die drei Fälle $a - 8 = 1, 2$ oder 4 in Frage, denn die Fälle $a - 8 = 8, 16, 32$ erhält man durch Vertauschen der Rollen von a und b , und $a - 8 = -1, -2$ bzw. -4 ist ausgeschlossen, da sonst b kleiner bzw. gleich null wäre.

Somit gibt es maximal drei verschiedene rechtwinklige Dreiecke, die die beschriebene Eigenschaft haben; eines davon muss also zweimal gezeichnet worden sein.

Bemerkung: In allen drei Fällen erhält man tatsächlich eine ganzzahlige Länge für c :

$a - 8$	$b - 8$	a	b	c
1	32	9	40	41
2	16	10	24	26
4	8	12	16	20

Variante 2 – mit Vorstellung der Parametrisierung der pythagoräischen Tripel: Ähnlich zu oben stellen wir fest: Die Drei haben je ein pythagoräisches Dreieck gezeichnet, also ein rechtwinkliges Dreieck mit ganzzahligen Seitenlängen, und wenn die Seitenlängen mit a , b und c bezeichnet werden und c die Hypotenuse ist, dann übersetzt sich die Aussage zu $2(a + b + c) = \frac{ab}{2}$. Die Seitenlängen eines pythagoräischen Dreiecks bilden ein pythagoräisches Tripel. Hier nutzen wir nun, dass es für solche Tripel eine *Parametrisierung* gibt. Das bedeutet: Es gibt eine einfach zu beschreibende Menge an Variablen – den *Parametern* –, mit deren Hilfe sich die drei gesuchten Werte beschreiben lassen. Üblicherweise geschieht das dann auch noch so, dass es zu jedem Wertesatz genau einen Satz an Parametern gibt, der zu diesen Werten führt. Eine Parametrisierung dient also dazu, eine unübersichtliche Menge von Werten/Lösungen etc. überschaubarer zu machen.

Bei pythagoräischen Tripeln (a, b, c) sieht es so aus: Wir betrachten die Menge aller Tripel (p, q, r) positiver ganzer Zahlen, bei denen p und q teilerfremd sind, $p > q$ ist und genau eine der beiden Zahlen p und q gerade ist. Dann bilden

$$a := r \cdot (p^2 - q^2), \quad b := r \cdot 2pq, \quad c := r \cdot (p^2 + q^2)$$

ein pythagoräisches Tripel, und jedes pythagoräische Tripel lässt sich auf genau eine Weise so darstellen.

Dass es sich um ein pythagoräisches Tripel handelt, lässt sich leicht nachrechnen:

$$\begin{aligned} (r \cdot (p^2 - q^2))^2 + (r \cdot 2pq)^2 &= r^2(p^4 - 2p^2q^2 + q^4 + 4p^2q^2) \\ &= r^2(p^4 + 2p^2q^2 + q^4) \\ &= (r \cdot (p^2 + q^2))^2 \end{aligned}$$

Die andere Richtung der Behauptung, insbesondere die Einschränkungen bei der Wahl der Parameter (damit die Darstellung eindeutig ist), soll hier nicht bewiesen werden – das wäre an dieser Stelle etwas zu viel, obwohl es andererseits auch nicht richtig schwierig wäre. Herleitungen findet man in Büchern über Zahlentheorie oder zum Beispiel auf

<http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/pythtripel.html>.

Nun zur eigentlichen Lösung der Aufgabe:

In die Formel $2(a + b + c) = \frac{ab}{2}$ setzen wir die parametrisierten Werte ein. Das führt der Reihe nach zu

$$\begin{aligned} 2r(p^2 - q^2 + 2pq + p^2 + q^2) &= \frac{r(p^2 - q^2) \cdot r \cdot 2pq}{2} \\ 4p^2 + 4pq &= r \cdot pq(p^2 - q^2) \\ 4p(p + q) &= rpq(p + q)(p - q) \\ 4 &= rq(p - q). \end{aligned}$$

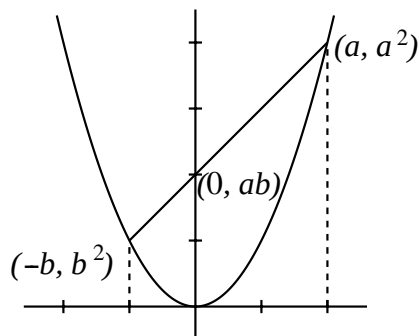
Da auf der rechten Seite jeweils (positive) ganze Zahlen stehen, gibt es nur noch sehr wenige Möglichkeiten, die 4 in dieser Form als Produkt darzustellen. Wir listen sie in einer Tabelle auf:

r	q	$p - q$	p	a	b	c	Bemerkung
4	1	1	2	12	16	20	1. Lösung (Probe: $2 \cdot (12 + 16 + 20) = 96 = \frac{12 \cdot 16}{2}$)
2	2	1	3	10	24	26	2. Lösung (Probe: $2 \cdot (10 + 24 + 26) = 120 = \frac{10 \cdot 24}{2}$)
2	1	2	3	16	12	20	Kein gültiger Parametersatz ($2 \nmid pq$), daher keine zusätzliche Lösung
1	4	1	5	9	40	41	3. Lösung (Probe: $2 \cdot (9 + 40 + 41) = 180 = \frac{9 \cdot 40}{2}$)
1	2	2	4	12	16	20	Kein gültiger Parametersatz (p und q nicht teilerfremd), daher keine zusätzliche Lösung
1	1	4	5	24	10	26	Kein gültiger Parametersatz ($2 \nmid pq$), daher keine zusätzliche Lösung

Es kann daher nur drei verschiedene solche Dreiecke geben; da in der Aufgabe von vier Personen die Rede ist, müssen mindestens zwei dasselbe Dreieck gezeichnet haben.

Aufgabe 4

Der Graph der Funktion $f(x) = x^2$, also die Normalparabel, ist eine *Multiplikationsmaschine*: Für beliebige zwei positive reelle Zahlen a und b schneidet die Gerade durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(-b, f(-b))$ die y -Achse bei $y = ab$.



1. Beweise diese hübsche Eigenschaft!
2. Gibt es auch eine Funktion f , deren Graph zur y -Achse symmetrisch ist und die als *Additionsmaschine* auf die gleiche Art und Weise wirkt?

Lösung:

Um den ersten Aufgabenteil zu zeigen, stellen wir zuerst die Geradengleichung durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(-b, f(-b))$ auf. Eine Gerade ist von der allgemeinen Form

$$y = mx + c,$$

wobei m die Steigung der Geraden und c den y -Achsenabschnitt angibt. Da die beiden Punkte $(a, f(a))$ und $(-b, f(-b))$ auf der Geraden liegen, erfüllen sie die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} a^2 &= f(a) = ma + c \\ b^2 &= (-b)^2 = f(-b) = m(-b) + c. \end{aligned}$$

Subtraktion der beiden Gleichungen liefert

$$a^2 - b^2 = m(a + b) \iff (a + b)(a - b) = m(a + b).$$

Nach Division durch $a + b > 0$ erhalten wir

$$m = a - b.$$

Durch Einsetzen in die Gleichung $a^2 = ma + c$ ergibt sich danach

$$a^2 = (a - b)a + c = a^2 - ba + c \iff c = ab.$$

Also schneidet die Gerade durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(-b, f(-b))$ die y -Achse tatsächlich bei $c = ab$.

Um den zweiten Aufgabenteil zu lösen, nehmen wir zunächst an, es gäbe eine solche *Additionsmaschine* f , und betrachten den Fall $b = a > 0$. Aufgrund der Achsensymmetrie gilt $f(-a) = f(a)$, d. h. die zu betrachtende Gerade geht durch die Punkte $(-a, f(a))$ und $(a, f(a))$. Dies ist wiederum eine Parallele zur x -Achse mit y -Achsenabschnitt $f(a)$. Andererseits muss diese Gerade die y -Achse bei $y = a + a = 2a$ schneiden, da f eine Additionsmaschine sein soll. Also ist $f(a) = 2a = f(-a)$ für jedes $a > 0$, also $f(x) = 2|x|$.

Nachdem wir nun f kennen, betrachten wir den Fall $a = 1, b = 2$. Die Gerade $y = mx + c$ durch die Punkte $(1, f(1)) = (1, 2)$ und $(-2, f(-2)) = (-2, 4)$ erfüllt dann die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}2 &= m \cdot 1 + c \\4 &= m \cdot (-2) + c.\end{aligned}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit 2 und addieren die beiden Gleichungen, so erhalten wir $8 = 3c$ bzw. $\frac{8}{3} = c$. Aufgrund der Additionseigenschaft von f müsste jedoch $c = 1 + 2 = 3$ sein.

Die Annahme, dass es eine Additionsmaschine gibt, führt somit zu einem Widerspruch und muss daher falsch sein.