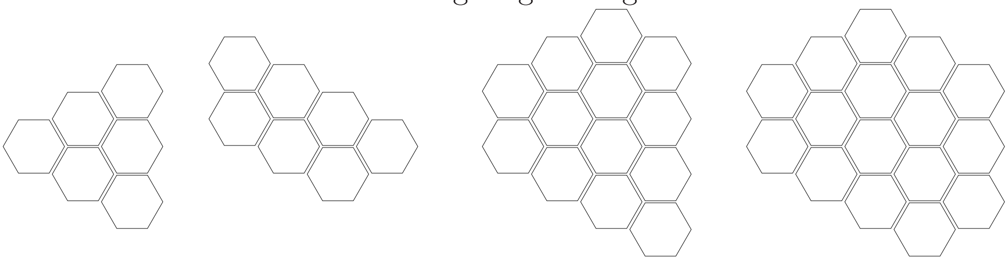
Beispiellösungen zu Blatt 78

Aufgabe 1

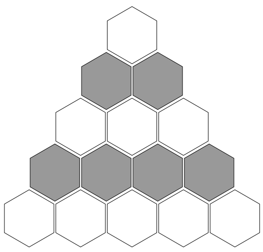
Kora spielt mit ihren regelmäßig sechseckigen Holzplättchen, die sie gerne zu Figuren zusammenlegt. Sie wünscht sich von den Eltern mehr solche Plättchen, und zwar möchte sie insgesamt 78 haben. „Warum genau 78?“, fragt der Vater. „Weil 78 eine *vielseitige* Zahl ist: Man kann mit jeweils 78 Plättchen sowohl ein Dreieck als auch ein Viereck, Fünfeck und ein Sechseck legen!“ „Soso“, brummt der Vater, „ob Du damit mal Recht hast …“.
Hat sie Recht?

Um nicht viele Worte dafür zu verlieren, sind hier zur Verdeutlichung je ein Dreieck, Viereck, Fünfeck und Sechseck aus Sechseckplättchen abgebildet. Die Vielecke müssen also keineswegs regelmäßig sein.



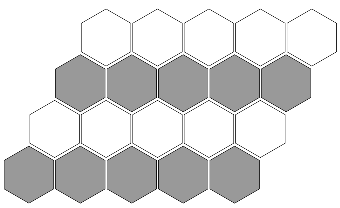
Lösung:

Zunächst stellen wir fest, dass man aus den sechseckigen Plättchen ein Dreieck erhält, indem man in die erste Reihe ein Plättchen legt, in die zweite Reihe zwei usw. Mit einer Reihe bezeichnen wir dabei gleichfarbige benachbarte Plättchen (wie in der Zeichnung).



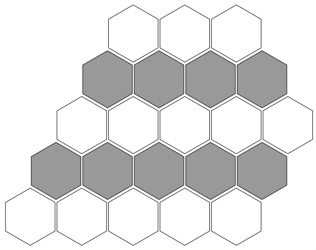
Ein zwölfreihiges solches Dreieck besteht nun aus genau $1 + \ldots + 12 = \frac{12 \cdot 13}{2} = 78$ Plättchen.

Ein Viereck erhält man u. a. durch das Aneinanderlegen gleichlanger Plättchenreihen.



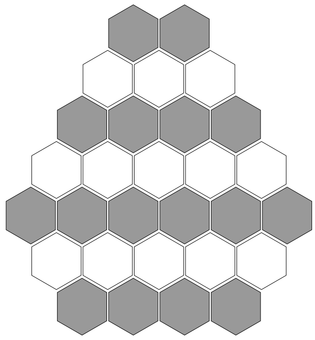
Im Fall von sechs Reihen aus jeweils 13 Plättchen hat das Viereck also genau $6 \cdot 13 = 78$ Plättchen.

Bestehen nun die Reihen nacheinander aus a, $a+1$, $\ldots$, $b-1$, b, b, b, $\ldots$, b Plättchen mit $1 < a < b$, so erhält man ein Fünfeck.



Im Fall $a = 9$ und $b = 12$ mit vier Reihen aus 12 Plättchen hat das sich auf diese Weise ergebende Fünfeck insgesamt $9 + 10 + 11 + 4 \cdot 12 = 30 + 48 = 78$ Plättchen.

Ein Sechseck lässt sich z. B. durch eine Reihenlängenfolge der Art a, $a+1$, $\ldots$, $b-1$, b, $b-1$, $\ldots$, $c+1$, c mit $1 < a$, $c < b$ konstruieren.

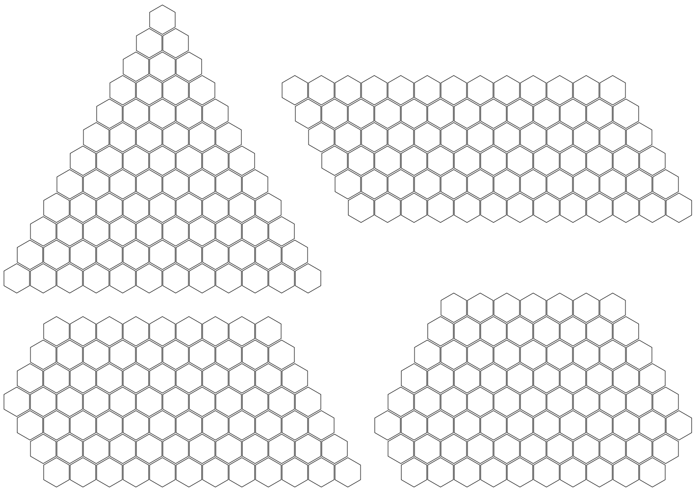


Mit $a = 7$, $b = 12$ und $c = 10$ erhalten wir ein Sechseck aus $7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 11 + 10 = 78$ Plättchen.

Diese Beispiele zeigen, dass 78 eine vielseitige Zahl ist.

Bemerkung: *78 ist nach 21, 36, 45, 55 und 66 die sechste vielseitige Zahl. Es scheint so zu sein, als sei die Suche nach vielseitigen Zahlen einigermaßen planvoll möglich:*
Man erkennt sofort, dass eine vielseitige Zahl notwendigerweise eine Dreieckszahl sein muss. Sofern sie größer oder gleich 6 ist, kann man dann mit dieser Anzahl an Plättchen auch ein Viereck legen: Denn eine Dreieckszahl hat die Form $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ *und ist damit ein Produkt zweier ganzer Zahlen:* $\frac{n}{2}\cdot(n+1)$ *oder* $n\cdot\frac{n+1}{2}$. *Für* $n \geq 3$ *sind beide Faktoren ungleich 1, so dass man ein Viereck in Parallelogrammform mit den beiden Faktoren als Seitenlängen legen kann. Die Bedingung, dass man auch ein Fünf- und ein Sechseck legen kann, ist bei kleinen Dreieckszahlen nur teilweise erfüllbar. Ab 36 jedoch haben alle unsere Versuche zum Erfolg geführt – einen Beweis für die Vermutung, dass jede Dreieckszahl größer oder gleich 36 auch eine vielseitige Zahl ist, können wir jedoch leider nicht liefern. Für Hinweise dazu sind wir dankbar.*

PS: Für alle, die nachzählen wollen: Die genannten Beispiele sehen wie folgt aus, wobei es natürlich zur Lösung der Aufgabe auch reicht, nur Beispiele anzugeben:



Aufgabe 2

In einem Schloss gibt es viele Zimmer und jedes Zimmer hat einige Türen, die entweder zu anderen Zimmern oder nach draußen führen. Allerdings sind den Baumeistern des Schlosses einige Fehler unterlaufen, so dass man nicht unbedingt alle Zimmer durch Türen erreichen kann (dafür gäbe es dann ja noch Fenster, Kamine, Löcher in den Decken und Fußböden und was man sich sonst alles noch so ausdenken kann). Ein Prinz kommt an das Schloss und sieht, dass es nur eine Eingangstür hat, und an der liest er: „In jedem Zimmer, das eine ungerade Anzahl an Türen hat, ist eine Prinzessin!“
Beweise, dass der Prinz eine Prinzessin finden kann, indem er nur durch Türen geht.

Lösung:

Wir betrachten die Menge aller Zimmer, die von der Eingangstür aus durch Türen erreichbar sind.
Da das Schloss nur eine Eingangstür hat, verbindet jede der anderen Türen genau zwei Räume des Schlosses miteinander.
In Gedanken stellen wir uns nun in jedes der erreichbaren Zimmer und zählen die Türen. Außer der Eingangstür werden dabei alle Türen doppelt gezählt; die Summe dieser Anzahlen ist also ungerade.

Daher muss es mindestens ein erreichbares Zimmer mit einer ungeraden Anzahl an Türen geben; in diesem wartet eine Prinzessin.

Aufgabe 3

Peter addiert zu seiner Lieblingszahl, der 23, die größtmögliche natürliche Zahl, deren Quadrat nicht größer als 23 ist. Wegen $4^2 = 16$ und $5^2 = 25$ ist das also 4, und er erhält $23 + 4 = 27$. Nun macht er mit der 27 weiter, findet,

dass wegen $5^2 = 25 \leq 27$, aber $6^2 = 36 > 27$ die kleinste natürliche Zahl, deren Quadrat nicht größer als 27 ist, die 5 ist, und addiert $27 + 5 = 32$. Dann führt er das Verfahren mit der 32 fort usw.
Zeige, dass Peter irgendwann zu einer Quadratzahl gelangt.
Wenn Peter mit 2009 statt 23 startet, kommt er dann auch irgendwann zu einer Quadratzahl? Wie ist das bei einer allgemeinen Startzahl n?

Lösung:

Für die Startzahl 23 sind die ersten Schritte bis zur 32 bereits beschrieben. Es ist $5^2 = 25 < 32 < 36 = 6^2$. Der nächste Wert ist also $32 + 5 = 37$. Nun haben wir $6^2 = 36 < 37 < 49 = 7^2$, dann ist der nächste Wert $37 + 6 = 43$. Wegen $6^2 = 36 < 43 < 49 = 7^2$ erhalten wir schließlich die Quadratzahl $43 + 6 = 49 = 7^2$.

Wenn wir bei 2009 starten, gilt im ersten Schritt $44^2 = 1936 < 2009 < 2025 = 45^2$ und wir erhalten $2009 + 44 = 2053$ als neuen Wert. Weiter ergibt sich

$$\begin{aligned}
45^2 + 28 = 2053 < 2116 = 46^2 &\longrightarrow 2053 + 45 = 2098\\
45^2 + 73 = 2098 < 2116 = 46^2 &\longrightarrow 2098 + 45 = 2143\\
46^2 + 27 = 2143 < 2209 = 47^2 &\longrightarrow 2143 + 46 = 2189\\
46^2 + 73 = 2189 < 2209 = 47^2 &\longrightarrow 2189 + 46 = 2235\\
47^2 + 26 = 2235 < 2304 = 48^2 &\longrightarrow 2235 + 47 = 2282\\
47^2 + 73 = 2282 < 2304 = 48^2 &\longrightarrow 2282 + 47 = 2329\\
48^2 + 25 = 2329 < 2401 = 49^2 &\longrightarrow 2329 + 48 = 2377
\end{aligned}$$

usw.

Wir sehen, dass der Abstand zwischen der letzten Zahl unseres Verfahrens und der nächstkleineren Quadratzahl nach jeweils zwei Schritten des Verfahrens immer um eins kleiner wird. Am Ende sollten wir also bei einer Quadratzahl landen, und das wollen wir nun für einen beliebigen Startwert n zeigen.

Ist n eine Quadratzahl, sind wir sofort fertig. Wir nehmen daher an, dass n keine Quadratzahl ist. Dann liegt n zwischen zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen:

$$z^2 < n < (z+1)^2.$$

Weiterhin unterscheiden wir die beiden Fälle $z^2 < n < (z + 1/2)^2$ und $(z + 1/2)^2 < n < (z+1)^2$; da $(z + 1/2)^2$ keine ganze Zahl ist, brauchen wir dabei an keiner Stelle ein Gleichheitszeichen zu setzen.

Fall 1: $z^2 < n < (z + 1/2)^2$.
Nach dem Verfahren müssen wir im ersten Schritt z zu unserer Startzahl n addieren. Dies tun wir in allen Teilen der Ungleichungskette und erhalten damit

$$z^2 + z < n + z < \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + z.$$

Da z^2+z und $n+z$ ganzzahlig sind, können wir zur linken Seite $1/4$ addieren, ohne dass die Ungleichung ungültig wird. Zur rechten Seite addieren wir $3/4$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
z^2+z+\frac{1}{4} < n+z &< \left(z+\frac{1}{2}\right)^2 + z + \frac{3}{4} \\
\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 < n+z &< z^2+z+\frac{1}{4}+z+\frac{3}{4} \\
\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 < n+z &< z^2+2z+1 \\
\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 < n+z &< (z+1)^2 .
\end{aligned}$$

Also gelangen wir im Fall $z^2 < n < (z+1/2)^2$ nach einmaliger Anwendung des Verfahrens mit $n' := n+z$ zum Fall $(z+1/2)^2 < n' < (z+1)^2$, den wir nun betrachten wollen.

Fall 2: $(z+1/2)^2 < n < (z+1)^2$
Da nach wie vor $z^2 < n < (z+1)^2$ gilt, müssen wir ebenso z zu n addieren. Wie vorher addieren wir z zur gesamten Ungleichung und erhalten

$$\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 + z < n+z < (z+1)^2 + z.$$

Wir addieren nun $5/4$ zur rechten Seite. Auf der linken Seite addieren wir $3/4$. Da dort vorher $1/4$ mehr als eine ganze Zahl stand, erhalten wir durch den dazu addierten Summanden jetzt genau die nächste ganze Zahl. Weil $n+z$ eine ganze Zahl ist, haben wir nun für diese Seite eine $\leq$-Bedingung. Zusammengefasst erhalten wir

$$\begin{aligned}
\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 + z + \frac{3}{4} \leq n+z &< (z+1)^2 + z + \frac{5}{4} \\
z^2+2z+\frac{1}{4}+\frac{3}{4} \leq n+z &< z^2+3z+\frac{9}{4} \\
z^2+2z+1 \leq n+z &< \left(z+\frac{3}{2}\right)^2 \\
(z+1)^2 \leq n+z &< \left(z+\frac{3}{2}\right)^2 .
\end{aligned}$$

Wir erhalten also entweder eine Quadratzahl $n+z = (z+1)^2$ oder eine Zahl $n' := n+z$ mit $(z+1)^2 < n' < (z+3/2)^2$, wären dann also wieder im ersten Fall.

Nach dieser Voruntersuchung fangen wir nun noch einmal ganz konkret von vorne an:

Indem wir gegebenenfalls einen Schritt des Verfahrens anwenden, können wir – sofern wir dann noch nicht bei einer Quadratzahl gelandet sind – davon ausgehen, dass für unser n und ein passendes z gilt: $z^2 < n < (z+1/2)^2$.
Sei $d = n - z^2$. Nach zwei Schritten des Verfahrens haben wir, wie oben gesehen, als neue Zahl $n+2z$. Es ist $n+2z-(z+1)^2 = z^2+2z+d-(z+1)^2 = d-1$.
Nach je zwei Schritten des Verfahrens nähern wir uns also um 1 an die nächstkleinere Quadratzahl an. Wir werden mit diesem Verfahren daher nach endlich vielen Durchläufen eine Quadratzahl erhalten.
Für 2009 als Startzahl heißt das wegen (siehe oben) $2009 + 44 = 45^2 + 28$: Nach $1 + 2 \cdot 28 = 57$ Schritten wird die Quadratzahl $(45+28)^2 = 73^2 = 5329$ erreicht.

Aufgabe 4

Anton und Stefan haben Fußballaufkleber der Größe 4 cm mal 8 cm gesammelt und sie auf ein quadratisches Blatt der Seitenlänge 24 cm geklebt, ohne dass Lücken bleiben und ohne dass die Aufkleber sich überlappen. Einige der Aufkleber sind dabei hochkant, andere quer bedruckt und so auch aufgeklebt. Nach einem Streit wollen sie das Blatt durch einen geraden Schnitt so in zwei (nicht unbedingt gleich große) Teile teilen, dass kein Aufkleber kaputt geht. Ist dies in jedem Fall möglich?

Lösung:

Die Antwort lautet: Ja, es gibt immer einen geraden Schnitt, der keinen Aufkleber zerschneidet.

Wir zerlegen das Blatt gedanklich in sechs Zeilen und sechs Spalten aus „halben" Aufklebern und betrachten eine beliebige Zeile. In dieser können 0, 1, 2 oder 3 Aufkleber im Querformat liegen, entsprechend müssen dann 6, 4, 2 bzw. 0 Aufkleber senkrecht in der Zeile stehen.
Unter den senkrecht stehenden einer Zeile unterscheiden wir zwei Gruppen: Die zweite Hälfte des Aufklebers kann in der Zeile darüber oder in der Zeile darunter liegen. Wäre nun in einer Gruppe (und somit auch in der anderen) eine ungerade Anzahl von Aufklebern, so gäbe es unterhalb und oberhalb der betrachteten Zeile eine ungerade Anzahl von noch freien Aufkleberhälften. Dann wäre das Blatt nicht lückenlos beklebt.
Also treten Aufkleber, die zwei Zeilen miteinander verbinden und somit einen Schnitt zwischen diesen verhindern, immer im Paar auf. Analog gilt dies für die Spalten.
Bei einer Aufkleberkonfiguration, die keine geraden Schnitte zulässt, muss jede der Zeilen- und Spaltenfugen von Aufklebern überdeckt werden. Es gibt $2 \cdot 5 = 10$ Fugen; man bräuchte also mindestens 20 Aufkleber.
Da auf dem Blatt nur 18 Aufkleber sind, ist eine solche Konfiguration nicht möglich.