Mathematischer Korrespondenzzirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Beispiellösungen zu Blatt 79

Aufgabe 1

Tim ist Tierpfleger im Zoo und möchte für die Schimpansen einen möglichst gesunden Obstsalat zubereiten. Es gibt Äpfel und Bananen und Tim hat maximal 6 Euro für den Salat. Ein Apfel kostet 20 Cent und hat 5 „Gesundheitspunkte“, eine Banane kostet 50 Cent und hat 10 „Gesundheitspunkte“. Tim kann höchstens 15 Früchte tragen. Aus wie vielen Äpfeln und Bananen sollte der Obstsalat bestehen?

Lösung:

Sei a die Anzahl der Äpfel und b die Anzahl der Bananen, aus denen Tim den Obstsalat macht. Wir überlegen uns zuerst, welche Bedingungen a und b erfüllen müssen. Offensichtlich sind a und b natürliche Zahlen. Da Tim nur maximal 15 Früchte tragen kann, gilt

$$a + b \leq 15 \quad \Longleftrightarrow \quad b \leq -a + 15 \tag{1}$$

Alle Früchte zusammen dürfen nicht mehr als 6 Euro kosten:

$$0{,}2a + 0{,}5b \leq 6 \quad \Longleftrightarrow \quad b \leq -\frac{2}{5}a + 12 \tag{2}$$

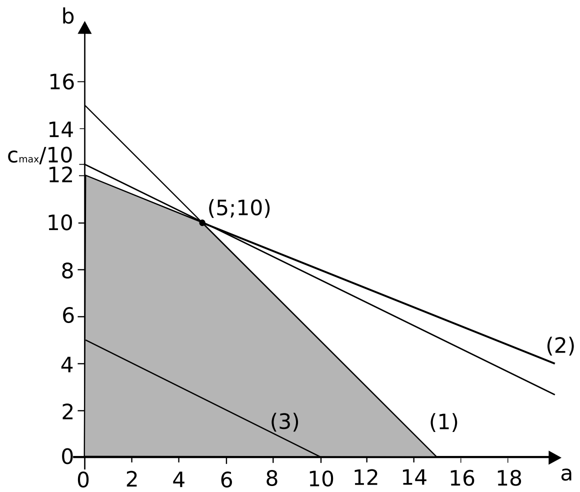
Natürlich möchte Tim einen möglichst gesunden Obstsalat zubereiten, weswegen die Anzahl c der Gesundheitspunkte möglichst groß sein sollte:

$$5a + 10b = c \to \max!$$

Es ist

$$5a + 10b = c \quad \Longleftrightarrow \quad b = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{10}c \tag{3}$$

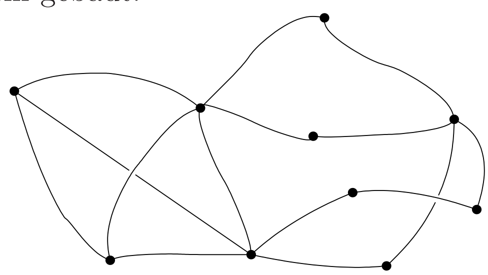
Zeichnet man nun die Begrenzungsgeraden für die Ungleichungen (1) und (2), d. h. die Geraden $b = -a + 15$ und $b = -\frac{2}{5}a + 12$, in ein Koordinatensystem, so ergibt sich aus den Bedingungen (1) und (2) zusammen mit $a, b \in \mathbb{N}$, dass der zu bestimmende Punkt $(a; b)$ in der grauen Fläche liegen muss.



Gesucht ist nun die größtmögliche Zahl $c_{\max}$, für welche die Gerade (3) noch mindestens einen Punkt mit der grauen Fläche gemeinsam hat. Da $\frac{1}{10}c$ den b-Achsenabschnitt der Geraden $b = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{10}c$ angibt, erhalten wir die Geradengleichung mit $c_{\max}$, indem wir die Gerade, die wir beispielhaft mit Achsenabschnitt $b = 5$, also mit $c = 50$ eingezeichnet haben, so lange parallel nach oben verschieben, bis sie die graue Fläche gerade noch berührt. Aus der Zeichnung ergibt sich nun $c_{\max} = 125$ und wir sehen, dass Tim dann 5 Äpfel und 10 Bananen kaufen muss.

Aufgabe 2

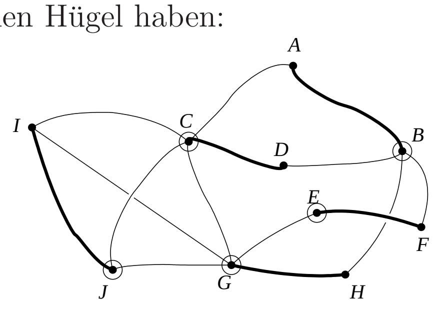
Maulwurf Tom hat es gut, er lebt auf einer Ökowiese. Dabei hat er derzeit folgendes Gangsystem gebaut:



An den markierten Stellen hat er seine Maulwurfshügel aufgeworfen, und Verzweigungen in seinem Netz gibt es nur da, wo es auch einen Hügel gibt.
Nun hat Benno, der Naturschutzbeauftragte für die Wiese von Tom, ein Überwachungssystem gekauft, um zu untersuchen, wo sich der Maulwurf jeweils aufhält. Die Sensoren, angebracht jeweils unter einem Maulwurfshügel, arbeiten nach einem neuartigen akustischen Verfahren und können jeden von dem Hügel ausgehenden Gang bis zum jeweils nächsten Hügel überwachen (selbst wenn es dort keine weitere Verzweigung gibt). Benno hat gerade so viele Sensoren gekauft, dass er jeden Gang überwachen kann.
Im Prinzip hat Tom ja Verständnis für die Maßnahme, aber ein wenig Privatsphäre möchte er auch behalten. Daher möchte er einen weiteren Gang so graben, dass es Benno mit seinen Sensoren nicht mehr schafft, ihn komplett zu überwachen – aber ohne dass er einen neuen Hügel aufwirft, denn sonst riecht Benno Lunte ...
Wo sollte Tom graben?

Lösung:

Als Erstes markieren wir in Toms Gangsystem fünf Gänge, von denen keine zwei einen gemeinsamen Hügel haben:

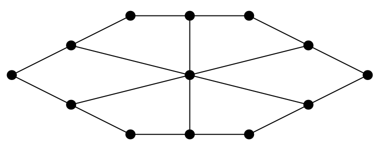


Da eben diese Gänge nicht aneinanderstoßen, kann man keinen Sensor für zwei dieser Gänge gleichzeitig einsetzen, daher braucht Benno mindestens fünf Sensoren. Gleichzeitig reichen auch fünf Sensoren, denn wenn man sie an den Hügeln B, C, E, G und J postiert, erfasst man alle Gänge.
Nun ist Toms Frage, an welchen Hügeln nie ein Sensor aufgestellt werden wird (solange Benno nicht mehr als fünf Sensoren hat), denn genau zwischen solchen Hügeln kann Tom einen weiteren Gang graben.
Um eine lästige Fallunterscheidung zu vermeiden, halten wir eine allgemeine Beobachtung fest:

Sind drei Maulwurfshügel paarweise durch Gänge verbunden, benötigt man zur Überwachung dieser Gänge mindestens zwei Sensoren.

Die Aussage ist sofort klar, denn jeder Sensor kann ja nur zwei der drei Gänge überwachen.
In Toms Netz bilden die Hügel G, I und J ein solches Dreieck. Da IJ eine der markierten Kanten ist, steht für sie nur ein Sensor zur Verfügung, daher *muss* ein Sensor bei G platziert werden.
Mit einer analogen Argumentation über das Dreieck CIJ erhält man, dass auch ein Sensor bei C stehen muss.
Nun ist also schon klar, dass nie ein Sensor bei D oder H stehen kann; und weil dort keiner ist, muss einer bei B sein, denn die Kanten BD und BH sollen ja auch überwacht werden. Daher steht auch bei A kein Sensor.
Umgekehrt sieht man leicht, dass der Sensor bei E auch bei F stehen könnte, genauso der Sensor bei J unter dem Hügel I.
Damit stehen genau die Punkte A, D und H als Endpunkte für neue, „private" Gänge zur Verfügung. Am einfachsten wäre also der Gang AD zu graben.

Hinweis: Es ist zwar naheliegend, dass die ersten Sensoren unter den Hügeln mit den meisten Gängen zu platzieren sind, und in den meisten Fällen auch richtig. Jedoch gibt es auch Beispiele, wo man genau an diesen Stellen keine Sensoren platzieren darf, wenn man mit einer geringstmöglichen Zahl auskommen möchte:



Für eine völlig korrekte Untersuchung kann man daher dieses heuristische Argument nicht ohne weitere Überlegungen verwenden.

Aufgabe 3

Angeregt durch die Geschichte vom letzten Blatt spielen Anton und Stefan mit Dominosteinen (Format: 2×1) und versuchen, Rechtecke in allen möglichen Größen mit ihnen vollständig auszulegen. Dabei fragen sie sich, bei welchen Größen von Rechtecken es möglich ist, die Dominosteine so zu legen, dass es keine durchgehende Fuge von einer Seite zur gegenüberliegenden Seite gibt.

Was werden die Beiden als Antwort herausfinden, wenn sie schlau sind und dementsprechend auch kein Rechteck mit ungeradem Flächeninhalt untersuchen?

Lösung:

Um den Text leichter lesbar zu machen, bezeichnen wir eine Belegung eines Rechtecks, die die Bedingung der Aufgabenstellung erfüllt, als fugenlos.

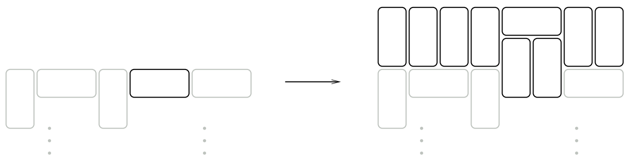
Behauptung: Ein $m \times n$-Rechteck mit geradem n lässt sich genau dann fugenlos mit Dominosteinen belegen, wenn entweder

- $m = 1$ und $n = 2$ ist oder
- m auch gerade ist, $m, n \geq 6$ gilt und mindestens eine der beiden Zahlen echt größer als 6 ist oder
- m ungerade ist sowie $m \geq 5$ und $n \geq 6$ gilt.

Beweis: Als Erstes machen wir eine allgemeine Feststellung, die die Untersuchung auf wenige Spezialfälle reduzieren wird:

Hilfssatz: Falls ein $m \times n$-Rechteck mit $m, n \geq 3$ fugenlos mit Dominosteinen auslegbar ist, so ist es auch ein $(m + 2) \times n$-Rechteck.

Zum Beweis betrachten wir die obere Kante, die n Felder lang ist. Es kann nicht sein, dass bei der fugenlosen Belegung alle Dominosteine an dieser Kante senkrecht liegen, denn dann würde die Fuge unter der zweiten Zeile ganz durchgehen. Also liegt mindestens ein Dominostein waagerecht. Wenn wir das $m \times n$-Rechteck zu einem $(m + 2) \times n$-Rechteck vergrößern, indem wir zwei Zeilen oben anbauen, dann verschieben wir einfach zunächst den eben genannten waagerecht liegenden Dominostein um zwei Felder nach oben. Dadurch ändern wir nichts an der Situation der vorher vorhandenen Fugen: auf jeder gibt es weiterhin mindestens einen querliegenden Dominostein. Den noch verbleibenden Freiraum im größeren Rechteck füllen wir mit senkrecht stehenden Dominosteinen auf – damit sind auch die beiden neu hinzugekommenen waagerechten Fugen gesperrt. (Dazu ist die Voraussetzung $n \geq 3$ nötig, da wir sonst keinen Stein hätten, der die oberste Fuge überbrückt.)

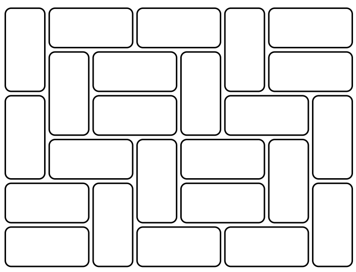


Nun zur konkreteren Abgesehen von einem Rechteck mit Kantenlängen 1 und 2 kann es kein fugenlos belegtes Rechteck geben, dessen eine Kantenlänge gleich 2 ist. Denn dann müsste ein Stein parallel zu dieser Kante liegen, um die senkrecht dazu liegende Fuge zu unterbrechen. Die Längsseiten dieses Steins bildeten aber durchgehende Fugen in der anderen Richtung.

Offensichtlich kann es auch kein anderes Rechteck mit einer Kantenlänge 1 geben, das fugenlos belegt werden kann.

1. Fall. Nun betrachten wir zunächst Rechtecke, bei denen beide Kantenlängen gerade sind. Ein Spezialfall davon wurde schon auf dem letzten Aufgabenblatt untersucht, wir wiederholen die Argumentation aber noch einmal und erweitern sie gleich:

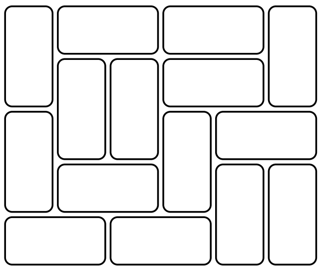
Sei ein Rechteck mit zwei geraden Kantenlängen m und n gegeben. Wir betrachten eine beliebige Zeile in diesem Rechteck. Da oberhalb dieser Zeile eine gerade Anzahl von Feldern liegt, muss die Anzahl an Dominosteinen, die bei einer lückenlosen Belegung des Rechtecks die betrachtete Zeile mit der darüberliegenden verbindet, gerade sein. Denn sonst würden diese Dominosteine in dem Bereich oberhalb der Zeile eine ungerade Anzahl an Feldern belegen; die verbleibende Anzahl an Feldern dort muss aber gerade sein, da ein Dominostein ja genau zwei Felder belegt und sich das Rechteck nach Voraussetzung lückenlos belegen lässt.
Sofern wir also nicht gerade die oberste Zeile betrachten, liegen bei einer fugenlosen Belegung mindestens zwei Dominosteine über der Fuge oberhalb der betrachteten Zeile.
Eine genau analoge Argumentation gilt natürlich für die Spalten.
Jeder Dominostein liegt auf genau einer Fuge; daher sind für eine fugenlose Belegung mindestens $2(m-1)+2(n-1)$ Dominosteine nötig.
In einem 6×6-Rechteck ist jedoch nur Platz für $36/2 = 18 < 20 = 2 \cdot (5+5)$ Steine.
Und in einem Rechteck der Größe $4 \times n$ bräuchte man $2 \cdot (3+(n-1)) = 2n+4$ Steine, hat aber nur Platz für $4 \cdot n/2 = 2n$ Steine.
Ein 6×8-Rechteck lässt sich hingegen fugenlos belegen (es gibt mehrere Möglichkeiten):



Wendet man den oben gezeigten Hilfssatz genügend oft an, erhält man damit für jedes Rechteck der Größe $m \times n$ mit $m \geq 6$, $n \geq 8$ (oder umgekehrt – man beachte zudem: m und n sind nach wie vor nur gerade), dass es fugenlos belegbar ist. Im 1. Fall sind das damit alle Fälle fugenlos belegbarer Rechtecke.

2. Fall. Nun fehlen noch die Rechtecke, bei denen genau eine Kante eine ungerade Länge hat. Sei ohne Einschränkung n ungerade, also die waagerechte Kantenlänge.
Die Argumentation von oben, dass immer mindestens je zwei Dominosteine eine waagerechte Fuge überbrücken müssen, lässt sich jetzt nur noch auf jede

zweite Fuge anwenden, da ja in jeder Zeile eine ungerade Anzahl an Feldern ist. Für die restlichen waagerechten Fugen wissen wir nur, dass es mindestens einen Dominostein geben muss, der sie quert.
Für die Spalten gilt jedoch nach wie vor, dass jede senkrechte Fuge von mindestens zwei Dominosteinen gekreuzt wird.
Das führt zu der Formel, dass ein $m \times n$-Rechteck mit m gerade, n ungerade mindestens $2(\frac{m}{2} - 1) + \frac{m}{2} + 2(n-1) = 3\frac{m}{2} - 2 + 2(n-1)$ Steine braucht, um fugenlos belegt werden zu können. Platz bietet es wie oben für $\frac{mn}{2}$ Steine.
Der Fall $n = 1$ wurde schon betrachtet. Für $n = 3$ ergibt sich $3\frac{m}{2} - 2 + 2 \cdot 2 = 3\frac{m}{2} + 2 > 3\frac{m}{2}$. Daher kann es kein fugenlos belegbares Rechteck mit einer Kantenlänge 3 geben.
Jetzt betrachten wir den Fall, dass die eine Kante 4 Felder lang ist und die andere eine ungerade Länge hat: Es werden $3 \cdot \frac{4}{2} - 2 + 2(n-1) = 2n + 2$ Dominosteine benötigt, die auf $2 \cdot (2n)$ Feldern unterzubringen wären – das geht nicht.
Nächstgrößte Möglichkeit ist ein 5×6-Rechteck. Dafür gibt es eine Lösung (und auch hier noch eine zweite):



Nun sind wir im Prinzip fertig, denn alle anderen noch nicht behandelten Größen lassen sich aus der 5×6-Figur durch den Hilfssatz oben konstruieren.

Beachtenswert finden wir dabei, dass es bei Rechtecken mit ungerader Kantenlänge schon bei deutlich kleineren Größen möglich ist, sie fugenlos zu belegen.

Aufgabe 4

Frank Sparfuchs will sein Geld, 1000 Euro, für drei Jahre bei einer Bank anlegen. Die Spar-A-Bank bietet ihm insgesamt 12 Prozent Zinsen in drei Jahren an, wobei sich Frank aussuchen darf, wie er die Zinsen verteilt. Nach jedem Jahr werden die anfallenden Zinsen zum Kontostand hinzuaddiert und im nächsten Jahr mitverzinst.
a) Eine mögliche Verteilung auf die drei Jahre ist 4 %, 4 %, 4 %. Wie viel Geld hat Frank bei dieser Variante zum Schluss?
b) Gibt es eine bessere Verteilung der Prozentsätze auf die drei Jahre?

Lösung:

a) Nach dem ersten Jahr erhält Frank 4 % von 1000 Euro, das sind 40 Euro Zinsen. Sein neuer Kontostand beträgt also $1000 + 40 = (1 + 0{,}04) \cdot 1000$. Dieser Betrag wird nun wieder mit 4 % verzinst und Frank hat nach dem zweiten Jahr $1040 \cdot (1 + 0{,}04) = (1 + 0{,}04)^2 \cdot 1000 = 1081{,}6$ Euro. Nach drei Jahren hat Frank $(1 + 0{,}04)^3 \cdot 1000 = 1124{,}864$ Euro.

b) Um zu zeigen, dass es keine bessere Verteilung als in Teil a) gibt, betrachten wir zunächst nur die ersten beiden Jahre und gehen davon aus, dass wir den Zinssatz r_3 für das dritte Jahr schon gewählt haben. Dann bleiben $(12 - r_3)\,\%$ auf die ersten beiden Jahre zu verteilen. Angenommen, wir verteilen diese nicht gleichmäßig, sondern nehmen im ersten Jahr $\left(\frac{12-r_3}{2} + x\right)\%$ und im zweiten Jahr $\left(\frac{12-r_3}{2} - x\right)\%$ mit $x \neq 0$. Dann beträgt Franks Vermögen nach dem zweiten Jahr

$$\begin{aligned}
&\left[1 + \left(\frac{12 - r_3}{2} + x\right) \cdot 0{,}01\right] \left[1 + \left(\frac{12 - r_3}{2} - x\right) \cdot 0{,}01\right] \cdot 1000 \\
&= \left[\left(1 + \frac{12 - r_3}{200}\right)^2 - \left(\frac{x}{100}\right)^2\right] \cdot 1000 \\
&< \left(1 + \frac{12 - r_3}{200}\right)^2 \cdot 1000\,.
\end{aligned}$$

Das heißt, sein Vermögen ist kleiner, als wenn er die Zinsen gleichmäßig verteilt hätte. Unabhängig davon, welchen Zinssatz man sich für das dritte Jahr gewählt hat, ist die beste Verteilung für die ersten beiden Jahre also die gleichmäßige Verteilung.

Angenommen, wir wählen $r_3 \neq 4$, also $r_3 = 4 + x$ mit $-4 \leq x \leq 8$ und $x \neq 0$. (Der Einfachheit halber schließen wir negative Zinssätze hier aus; diese kommen höchstens in ökonomischen Ausnahmesituationen vor.) Dann ist das maximale Endvermögen

$$\begin{aligned}
&\left(1 + \frac{12 - (4 + x)}{2} \cdot 0{,}01\right)^2 (1 + (4 + x) \cdot 0{,}01) \\
&= \left(1{,}04 - \frac{x}{200}\right)^2 \left(1{,}04 + \frac{x}{100}\right) \\
&= 1{,}04^3 + \underbrace{\left(\frac{1{,}04}{4} - 1{,}04\right)}_{=-0{,}78} \left(\frac{x}{100}\right)^2 - \frac{x^3}{4 \cdot 100^3} \\
&< 1{,}04^3\,,
\end{aligned}$$

denn selbst für negative $x > -4$ ist der dritte Summand stets kleiner als $0{,}01 \cdot (\frac{x}{100})^2$ und somit betragsmäßig kleiner als der zweite Summand.

Also wird das Vermögen maximal bei einer jährlichen Verzinsung von $4\,\%$.