Beispiellösungen zu Blatt 80

Aufgabe 1

Finde die kleinste positive ganze Zahl, die durch 80 teilbar ist und deren Quersumme ebenfalls durch 80 teilbar ist!

Lösung:

Anhand der Primfaktorzerlegung $80 = 2^4 \cdot 5$ sieht man, dass $5^3 = 125$ die kleinste Zahl n ist, für die gilt, dass $80 \cdot n$ eine Zehnerpotenz ist. Es ist $80 \cdot 125 = 10^4$; daher ergibt sich die Menge aller durch 80 teilbaren natürlichen Zahlen, indem man zu den Vielfachen von 80, die kleiner als 10^4 sind, beliebige Vielfache von 10^4 addiert.
Ab der fünften Stelle von rechts kann man die Ziffern also frei wählen bzgl. Teilbarkeit durch 80.
Da wir das kleinste Vielfache von 80 suchen, dessen Quersumme ebenfalls durch 80 teilbar ist, ist dann klar, dass dazu die letzten vier Ziffern einen möglichst hohen Anteil an der Quersumme haben müssen. Wir bestimmen also zunächst dasjenige unter den Vielfachen von 80 kleiner als 10^4 mit der größten Quersumme: Offenbar muss die letzte Ziffer eine Null und die vorletzte Ziffer gerade sein. Die Zahl 8880 ist durch 80 teilbar und wir zeigen nun, dass dies auch die Zahl mit der größten Quersumme ist. Um eine andere Zahl mit mindestens genauso großer Quersumme zu bekommen, müsste man mindestens eine der beiden ersten Ziffern durch eine Neun ersetzen, da man die dritte Ziffer nicht vergrößern kann. Da 9980, 9880 und 8980 nicht durch 80 teilbar sind, und auch nicht 9960, 9780 und 7980, ist tatsächlich 8880 die einzige durch 80 teilbare Zahl kleiner als 10^4 mit einer Quersumme größer gleich 24.
Nun wollen wir durch Voranstellen weiterer Ziffern vor die Zahl 8880 eine Zahl mit Quersumme 80 erzeugen. Wegen $80 - 3 \cdot 8 = 56$ müssen wir noch mindestens sieben Ziffern hinzufügen, denn selbst mit sechs Neunen würde man nur eine zusätzliche Quersumme von 54 erzeugen. Die insgesamt kleinste Zahl erhält man, wenn man die erste Ziffer minimal wählt. Wegen $6 \cdot 9 = 54 = 56 - 2$ ist es optimal, sechs Neunen und eine Zwei voranzustellen.
Die Lösung lautet also 29.999.998.880.

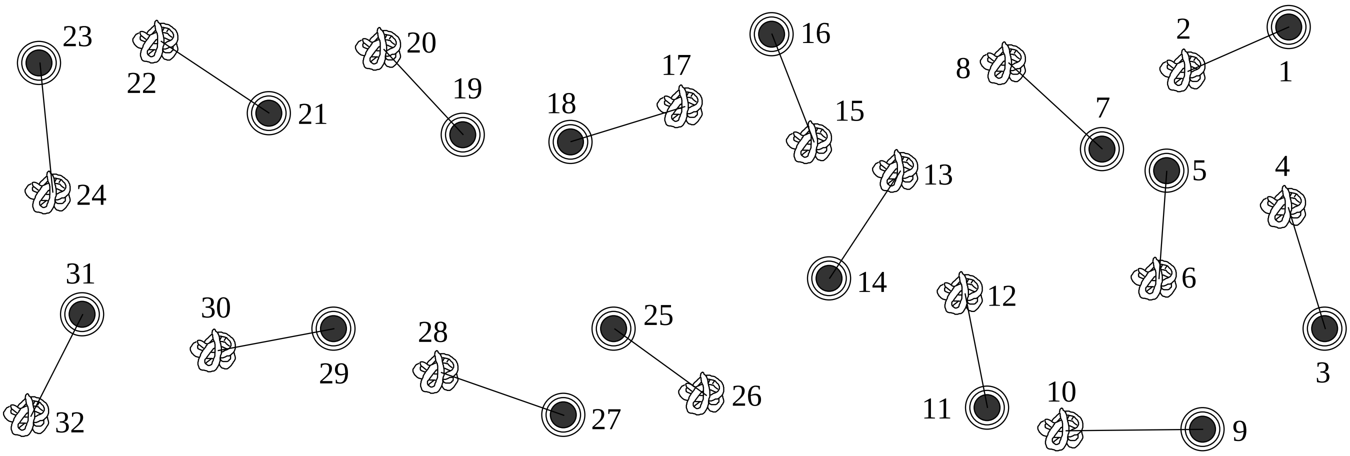
Aufgabe 2

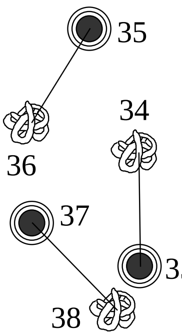
Der uns wohlbekannte Maulwurf Tom macht Urlaub. Bildungsurlaub! Und zwar bei den Wattwürmern im neuen UNESCO-Weltnaturerbe Wattenmeer, die ja auch den Boden durchwühlen. – Tom lernt: Wattwürmer bauen keine verzweigten Gänge, sondern ihr Bau hat genau einen  Vorder- und einen  Hintereingang, deren Mittelpunkte 3 bis 4 Herzmuscheldurchmesser 

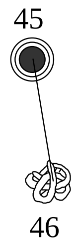
auseinander liegen. Außerdem bauen sie keine sich überkreuzenden Gänge. Tom fragt sich und uns nun: Welcher Vorder- und welcher Hintereingang gehören zusammen?

Lösung:

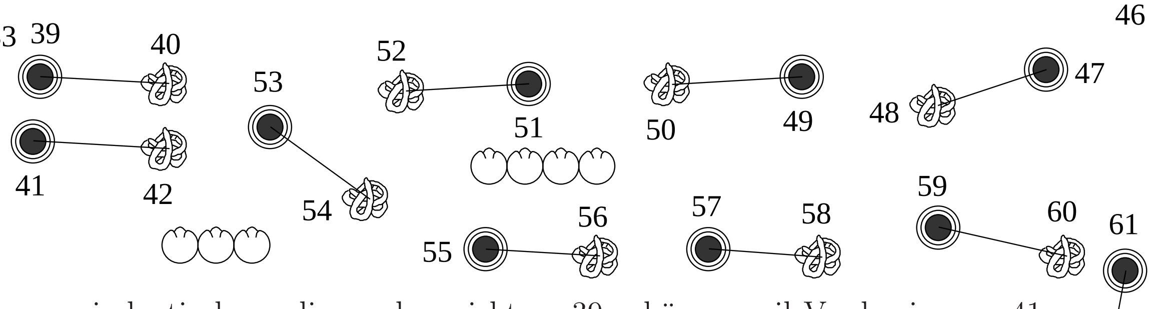
Bei dieser Aufgabe gibt es mehrere Ansatzpunkte für eine Lösung. Man kann zum Beispiel den Vordereingang 1 betrachten und feststellen, dass nur der Hintereingang 2 in passender Entfernung liegt. Ebenso liegt zu Vordereingang 3 nur Hintereingang 4 in Reichweite.

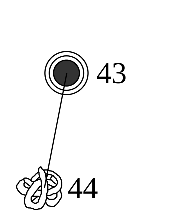


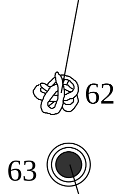


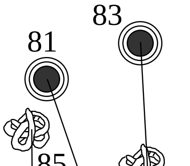


Damit bleibt für Vordereingang 5 nur noch Hintereingang 6 übrig, da die anderen beiden Hintereingänge in Reichweite schon vergeben sind.
Auf diese Weise kann man in aufsteigender Reihenfolge der Zahlen weiter argumentieren.
Bei Vordereingang 33 ist dabei wichtig, dass der zugehörige Hintereingang auch nicht zu dicht daran liegen kann; und bei Vordereingang 39 wäre Hintereingang 42 vielleicht noch im Grenzbereich des erlaubten Abstandes;

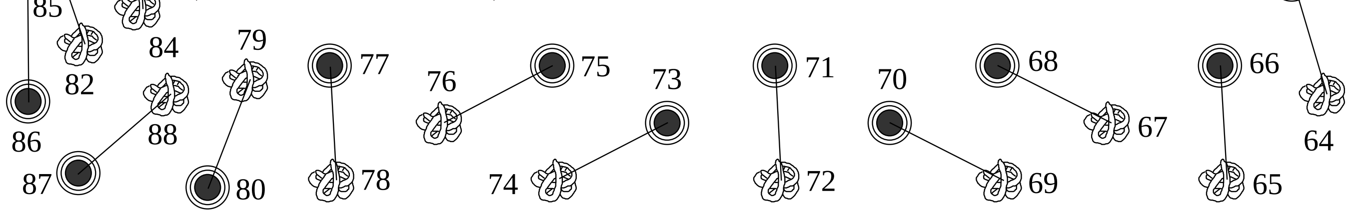








ganz eindeutig kann dieser aber nicht zu 39 gehören, weil Vordereingang 41 dann keinen Hintereingang in Reichweite hätte, zu dem nicht ein anderer Gang gekreuzt werden müsste.
Beide Argumentationen kommen schließlich noch bei der Verbindung 81–82 (und dann auch 83–84) zum Einsatz.



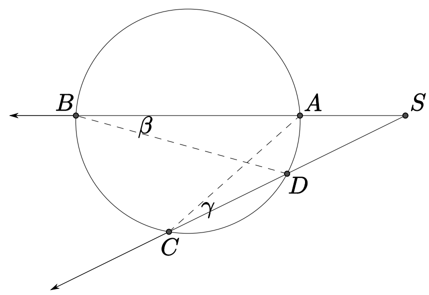
Aufgabe 3

Während andere im Sommer wegfahren, strickt Oma P. schon an den Wintersachen. Am Abend steckt sie zwei 30 cm lange Stricknadeln so in ihr kugelförmiges Wollknäuel, dass sie sich an einem ihrer Enden außerhalb des Wollknäuels berühren.
Dabei „verschwindet" genau das mittlere Drittel der ersten Stricknadel im Knäuel. Von der zweiten stehen am freien Ende 5 cm über.
Welcher Teil der zweiten Nadel steckt innerhalb des Knäuels?

Lösung:

Es stecken genau 17 cm der zweiten Nadel im Wollknäuel.

Da die beiden Stricknadeln sich in einem Punkt berühren, liegen die beiden Nadeln in einer gemeinsamen Ebene und wir können ein zweidimensionales Bild der Situation malen. Der Querschnitt des Wollknäuels ist dann ein Kreis. Wir nennen den Berührpunkt S, die Wollknäuelaustrittspunkte der zweiten Stricknadel A und B und die der ersten D und C, siehe Skizze.



Aus den Vorgaben folgt

$$|SD| = 10, \quad |SC| = 20 \quad \text{und} \quad |SB| = 25$$

für die Längen der Abschnitte in Zentimetern.

Die beiden Dreiecke SBD und SAC haben bei S einen gemeinsamen Winkel. Außerdem sind $\beta = \sphericalangle DBA$ und $\gamma = \sphericalangle DCA$ Umfangswinkel über der Sehne DA und somit ebenfalls gleich groß.
Damit sind ΔSBD und ΔSAC ähnlich, sodass für die Verhältnisse der Dreiecksseiten

$$\frac{|SB|}{|SD|} = \frac{|SC|}{|SA|}$$

gilt. Aus den obigen Längenangaben folgt dann

$$|SA| = \frac{|SC| \cdot |SD|}{|SB|} = \frac{20 \cdot 10}{25} = 8\,,$$

womit wir die gefragte Größe zu

$$|AB| = |SB| - |SA| = 25 - 8 = 17$$

berechnen.

Bemerkung: Wir hätten hier auch direkt den *Sekantensatz* anwenden können. Dieser sagt, dass für zwei Sekanten, die sich wie in dem obigen Bild in einem Punkt außerhalb des Kreises schneiden, die Gleichung $|SB| \cdot |SA| = |SC| \cdot |SD|$ gilt. Was wir oben ausgeführt haben, ist ein möglicher Beweis des Sekantensatzes.

Zweite Bemerkung: Über den Durchmesser des Wollknäuels kann nur ausgesagt werden, dass er mindestens 17 cm sein muss – nach oben sind, außer durch die Größe von Oma P.s Wohnzimmer, keine Grenzen gesetzt.

Aufgabe 4

Maulwurf Tom interessiert sich auf seiner Urlaubsinsel nicht nur für den Boden, sondern auch für markante Bauwerke. Er beschäftigt sich mit den beiden dortigen Leuchttürmen und fragt einen Maulwurfkollegen von der Insel, wie hoch die Türme sind. Dieser hat vor allem ein gutes Formelgedächtnis und stellt fest: „Ich kann mich nicht mehr sicher an die Höhen x und y erinnern, war auch noch nie dort oben. Aber ich weiß noch, dass y durch 8 teilbar ist und dass die beiden Zahlen die folgenden Ungleichungen erfüllen:

$$x^2 - 122y + 6287 \leq 0 \tag{1}$$
$$y^2 - 78x - 1054 \leq 0.\text{“} \tag{2}$$

x und y sind in ganzen Metern gemessen – welche Werte haben sie?

Zusatzfrage: Auf welcher Insel macht Tom Urlaub?

Lösung:

Wir wollen aus den Bedingungen (1) und (2) weitere Bedingungen für die Leuchtturmhöhen x und y herleiten. Dazu addieren wir die Ungleichungen (1) und (2) und erhalten

$$\begin{aligned} & x^2 - 78x + y^2 - 122y + 5233 \leq 0 \\ \iff \ & (x-39)^2 - 39^2 + (y-61)^2 - 61^2 + 5233 \leq 0\,. \end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zur Ungleichung

$$(x-39)^2 + (y-61)^2 - 9 \leq 0\,, \tag{3}$$

aus der wir die Ungleichungskette

$$(y-61)^2 \leq 9 - (x-39)^2 \leq 9$$

erhalten, da Quadrate reeller Zahlen nichtnegativ sind.

Daraus folgt

$$58 \leq y \leq 64\,. \tag{4}$$

Da wir zudem wissen, dass y eine ganze Zahl und durch 8 teilbar ist, ergibt sich aus (4), dass $y = 64$ ist.

Setzen wir diesen Wert in Ungleichung (3) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} & (x-39)^2 + (64-61)^2 - 9 \le 0 \\ \iff \qquad & (x-39)^2 \le 0\,. \end{aligned}$$

Da Quadrate reeller Zahlen nichtnegativ sind, folgt $(x-39)^2 = 0$ und somit $x = 39$.

Eine Probe bestätigt das Ergebnis $x = 39$ und $y = 64$.

Zweite Lösung:

Man kann sich den Lösungswerten auch schrittweise nähern:
Aus (1) folgt
$$y \ge \frac{1}{122}(x^2 + 6287) \ge \frac{6287}{122} > 51\,.$$
Mit der weiteren Bedingung, dass y durch 8 teilbar ist, folgt $y \ge 56$. Aus (2) folgt dann

$$x \ge \frac{1}{78}(y^2 - 1054) \ge \frac{1}{78}(3136 - 1054) = \frac{2082}{78} > 26\,,$$

also $x \ge 27$. Wiederum (1) ausnutzend folgt

$$y \ge \frac{1}{122}(x^2 + 6287) \ge \frac{1}{122}(729 + 6287) = \frac{7016}{122} > 57$$

und damit sogar $y \ge 64$. Und aus (2) ergibt sich daraus

$$x \ge \frac{1}{78}(y^2 - 1054) \ge \frac{1}{78}(4096 - 1054) = \frac{3042}{78} > 38\,,$$

also $x \ge 39$.
Weiteres Iterieren ändert an diesen Abschätzungen nichts mehr, daher müssen wir nun eine Abschätzung nach oben versuchen.

Wie nehmen an, es gäbe eine Lösung mit $x \ge 122$. Dann folgte aus (1):

$$0 \ge x^2 - 122y + 6287 > x^2 - 122y \ge 122(x-y)\,.$$

Daher müsste $y > x \ge 122$ gelten.
Mit (2) bekommt man dann aber den Widerspruch

$$0 \ge y^2 - 78x - 1054 > x^2 - 78x - 1054 = (x-78)x - 1054 \ge 44 \cdot 122 - 1054 > 0\,.$$

Somit muss $x \le 121$ sein.

Nun nutzen wir die Gleichungen (1) und (2) zur Abschätzung nach oben:
Aus $x \le 121$ folgt mit (2):

$$y^2 \le 78 \cdot 121 + 1054 = 10492 \quad \Longrightarrow \quad y \le 102\,.$$

Weil y durch 8 teilbar sein soll, folgt weiter:

$$y \leq 96\,.$$

Daraus folgt mit (1):

$$x^2 \leq 122 \cdot 96 - 6287 = 5425 \quad \Longrightarrow \quad x \leq 73\,.$$

Nun kann man erneut über (2) abschätzen:

$$y^2 \leq 78 \cdot 73 + 1054 = 6748 \quad \Longrightarrow \quad y \leq 82 \quad \Longrightarrow \quad y \leq 80\,.$$

Daraus folgt wiederum mit (1):

$$x^2 \leq 122 \cdot 80 - 6287 = 3473 \quad \Longrightarrow \quad x \leq 58\,.$$

Und in weiteren Schritten folgt:

$$\begin{array}{lclcl}
y^2 \leq 78 \cdot 58 + 1054 = 5578 & \Longrightarrow & y \leq 74 & \Longrightarrow & y \leq 72 \\
x^2 \leq 122 \cdot 72 - 6287 = 2497 & \Longrightarrow & x \leq 49 & & \\
y^2 \leq 78 \cdot 49 + 1054 = 4876 & \Longrightarrow & y \leq 69 & \Longrightarrow & y \leq 64 \\
x^2 \leq 122 \cdot 64 - 6287 = 1521 & \Longrightarrow & x \leq 39\,. & &
\end{array}$$

Damit kann nur noch $x = 39$ und $y = 64$ sein. Eine Probe bestätigt, dass dies tatsächlich eine Lösung ist.

Zur Zusatzfrage: Unser Maulwurf Tom macht auf der Insel Wangerooge Urlaub. Der dortige Alte Leuchtturm ist 39 m hoch, die Höhe des Neuen Leuchtturms beträgt 64 m.

Warum Wangerooge? Nun, zum einen war das für den mathematikinteressierten Tom schon deswegen ein „Muss“, weil Carl Friedrich Gauß Anfang des 18. Jahrhunderts bei der Landesaufnahme im Königreich Hannover auf Wangerooge einen Messpunkt eingerichtet hatte (auf einem heute nicht mehr existenten Turm). Auf dem letzten 10-DM-Schein war übrigens ein Teil des so entstandenen Dreiecksnetzes von trigonometrischen Punkten abgebildet. Zum anderen war Wangerooge das Ziel des Ausflugs aller Teilnehmer an der diesjährigen Internationalen Mathematik-Olympiade – da wollte natürlich auch Tom die besondere Atmosphäre schnuppern. Auch drei Mitglieder des Korrespondenzzirkelteams durften als Korrektoren dabei sein; die geplante Wattwanderung musste allerdings wegen Sturmes ausfallen. Schade, denn sonst hätten wir die Wattwürmer vom Korrespondenzzirkel gegrüßt.