

Beispiellösungen zu Blatt 81

Aufgabe 1

Zu einer zweistelligen Zahl bildet man die Spiegelzahl, indem man sie umgekehrt noch einmal hinten anhängt. Die Spiegelzahl zu 12 ist also 1221 und die zu 30 ist 3003.

Finde alle Spiegelzahlen, die durch 81 teilbar sind, und alle, die durch 18 teilbar sind.

Lösung:

Keine der vierstelligen Spiegelzahlen ist durch 81 teilbar. Durch 18 sind genau die vier Spiegelzahlen 2772, 4554, 6336 und 8118 teilbar.

Die betrachteten Spiegelzahlen sind von der Form

$$n = [abba] = a \cdot 1000 + b \cdot 100 + b \cdot 10 + a$$

mit den Ziffern $a, b \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ und $a \neq 0$.

Die Primfaktorzerlegung von 18 ist $18 = 2 \cdot 3^2$, so dass $n = [abba]$ genau dann durch 18 teilbar ist, wenn a gerade ist und die Quersumme $Q(n) = 2(a + b)$ durch 9 teilbar ist. Da a und b Ziffern sind, ist die Quersumme genau dann durch 9 teilbar, wenn entweder $a = b = 9$ oder $a + b = 9$ gilt. In ersterem Fall ist a ungerade, der zweite Fall liefert genau die vier oben aufgelisteten durch 18 teilbaren Spiegelzahlen.

Die Primfaktorzerlegung von 81 ist $81 = 3^4$. Die Spiegelzahl $n = [abba]$ ist genau dann durch 81 teilbar, wenn die Zahlen n und $\frac{n}{9}$, bzw. ihre Quersummen, durch 9 teilbar sind.

Die Zahl $9999 = 9 \cdot 1111$ ist daher nicht durch 81 teilbar.

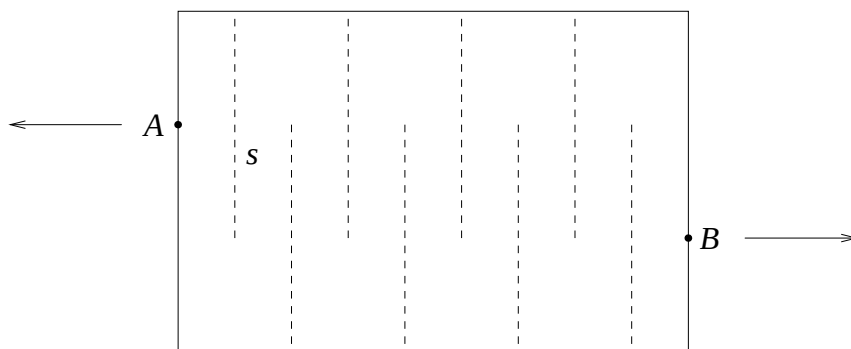
Sei nun $a + b = 9$. Dann sind $x = \frac{[ab]}{9}$ und $y = \frac{[ba]}{9}$ ebenfalls Ziffern und es gilt $\frac{n}{9} = \frac{[abba]}{9} = 100x + y = [x0y]$. Die Quersumme des letzten Bruches

$$Q\left(\frac{n}{9}\right) = x + y = \frac{1}{9}((10a + b) + (10b + a)) = \frac{11}{9}(a + b) = 11$$

ist jedoch nie durch 9 teilbar. Daher gibt es, wie behauptet, keine vierstelligen Spiegelzahlen, die durch 81 teilbar sind.

Aufgabe 2

Die Schüler einer Mathe-AG wollen eine mathematische Girlande basteln. Dazu schneiden sie ein Blatt Papier (DIN A4, das sind 210 mm mal 297 mm) wie in der Skizze gezeigt ein, das heißt gleichmäßig abwechselnd von beiden Seiten mit einer gewissen Schnitttiefe s . Sie machen insgesamt n Schnitte. Die Girlande soll an zwei Punkten A und B am Rand aufgehängt werden, die das Schnittmuster fortsetzen, also Abstand s von einer Ecke haben.

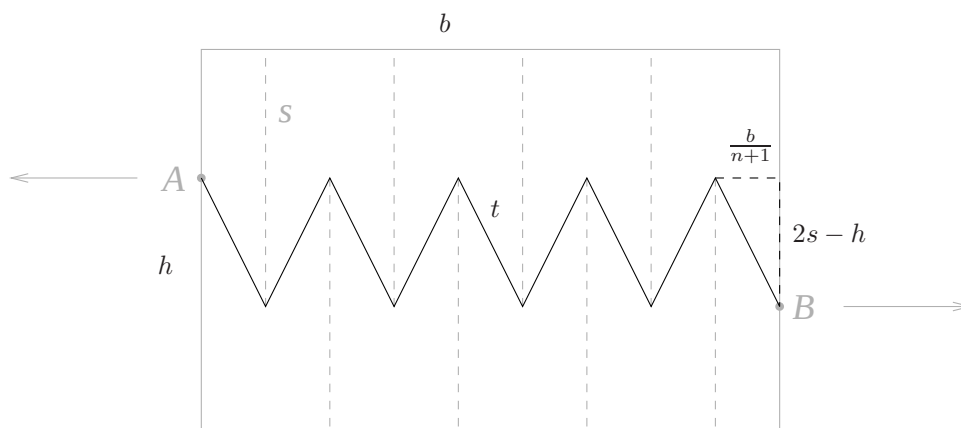


Wie weit auseinander kann man die Punkte A und B maximal aufhängen, abhängig von den Werten n und s ?

Wie lang müssen die Einschnitte insgesamt mindestens sein, damit A und B anderthalb Meter auseinander sein können?

Lösung:

Wir zeichnen einen Streckenzug t von A über die Endpunkte aller Einschnitte bis zum Punkt B . Da dieser Streckenzug auch im entfalteten Zustand der Girlande ein Streckenzug oder zumindest eine Kurve bleibt (also nicht auseinandergerissen wird), ist seine Länge eine obere Schranke für die Länge der Girlande. Gleichzeitig ist es offensichtlich möglich, die Girlande so aufzufalten, dass t in eine (einzige) Strecke übergeht, sofern die Schnitte weiter als bis zur Hälfte ins Blatt gehen, d. h. wenn $2s \geq h$ ist.



Der gesuchte maximale Abstand von A und B ist dann also gleich der Länge von t . Und diese ist:

$$d_{\max} = (n+1) \cdot \sqrt{\left(\frac{b}{n+1}\right)^2 + (2s-h)^2}.$$

Dabei ist $b = 297$ mm die Breite des Papiers und $h = 210$ mm dessen Höhe (wir setzen erst später ein).

Umformen liefert die Antwort auf die erste Frage im Fall $2s \geq h$:

$$\begin{aligned} d_{\max} &= \sqrt{b^2 + [(n+1)(2s-h)]^2} \\ &= \sqrt{b^2 + (2ns + 2s - nh - h)^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Falls $2s < h$ ist, können A und B nicht weiter auseinandergezogen werden, ihr Abstand ist dann unabhängig von der Zahl der Schnitte

$$d_{\text{zu_kurz_geschnitten}} = \sqrt{b^2 + (h - 2s)^2}.$$

Zum zweiten Teil der Aufgabe: Falls $2s < h$ ist, können A und B offensichtlich nicht weit genug voneinander entfernt liegen (die Diagonale eines DIN-A4-Blattes ist 364 mm lang). Es muss also im Folgenden $2s - h \geq 0$ sein.

Die Einschnitte haben zusammen eine Länge von $n \cdot s$. Dieser Term ist auch schon in Formel (1) zu erkennen, so dass wir dahin umstellen können. Wegen $2s - h \geq 0$ ist $2ns + 2s - nh - h$ nichtnegativ, so dass Wurzelziehen wie im Folgenden möglich ist. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} 2ns + 2s - nh - h &= \sqrt{d_{\text{max}}^2 - b^2} \\ ns &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{d_{\text{max}}^2 - b^2} - 2s + nh + h \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Bei festem d_{max} hängen nach (1) die Werte von n und s voneinander ab: wenn n wächst, muss s kleiner werden. Aus (2) ist zu erkennen, dass ns dann größer wird, denn bis auf $-2s$ und $+nh$ sind alle Ausdrücke Konstanten.

Offensichtlich aber ist s in der Praxis durch h begrenzt. Daher muss für eine minimale Gesamtschnittlänge ns die Zahl der Einschnitte n so klein wie möglich gewählt werden, dass dabei das nötige s noch kleiner als h ist.

Auflösen von (1) oder (2) nach s und Einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2n+2} \left(\sqrt{d_{\text{Wunsch}}^2 - b^2} + nh + h \right) \\ &= \frac{1}{2(n+1)} \sqrt{d_{\text{Wunsch}}^2 - b^2} + \frac{h}{2} \\ &= \frac{1}{2(n+1)} \sqrt{1500^2 - 297^2} + 105 \\ &= \frac{1}{2(n+1)} \sqrt{2\,161\,791} + 105 \\ &= \frac{1}{2(n+1)} \sqrt{(7 \cdot 210)^2 + 891} + 105 \\ &> \frac{1}{n+1} \cdot 7 \cdot 105 + 105. \end{aligned}$$

Für $n+1 \leq 7$ ergibt sich damit ein Wert größer als 210. Für $n+1 = 8 \Leftrightarrow n = 7$ erhält man:

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2 \cdot 8} \sqrt{2\,161\,791} + 105 \\ &\approx 196,89. \end{aligned}$$

Man braucht also 7 Einschnitte mit einer Länge von etwa 196,9 Millimetern, zusammen 1378,3 mm.

Aufgabe 3

Bei einem Rennen starten 15 Teilnehmer hintereinander – sie sind von 1 bis 15 durchnummeriert. Im Laufe des Rennens finden insgesamt genau 4 Überholvorgänge statt; dabei überholt kein Teilnehmer einen Konkurrenten, der ihn selbst schon überholt hat.

Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Reihenfolge der Zielankunft?

Lösung:

Soweit sinnvoll, betrachten wir das Problem zunächst ganz allgemein, also für beliebige Anzahlen von Sportlern und beliebige Anzahlen von Überholvorgängen.

Als Erstes beweisen wir einen Hilfssatz:

Hilfssatz: Die möglichen Zieleinlaufsreihenfolgen entsprechen genau den Möglichkeiten, wie man den Teilnehmern Anzahlen zuordnen kann, wie viele Überholungen sie im Laufe des Rennens machen.

Beweis: Klar ist: Aus dem Zieleinlauf lässt sich sofort eine solche Zahlenzuordnung vornehmen, denn da nach Voraussetzung ein Teilnehmer nur Konkurrenten mit einer niedrigeren Startnummer überholt haben kann, braucht man nur zu zählen, wie viele davon nach dem Teilnehmer ins Ziel gekommen sind, und erhält so die Anzahl seiner Überholungen.

Zu zeigen ist also noch, dass jeder Zahlensatz von Überholungen bei nur genau einem Zieleinlauf vorkommt. Dafür sei angenommen, wir hätten jedem Teilnehmer eine Anzahl von Überholungen fest zugeordnet, und zwar so, dass so ein Rennen auch tatsächlich möglich ist.

Teilnehmer Nummer 1 kann dabei gar nicht überholen. Teilnehmer Nummer 2 kann allenfalls die Nummer 1 überholen. Auf jeden Fall ist durch die Zahl seiner Überholvorgänge (keinen oder einen) eindeutig festgelegt, ob er vor Nummer 1 ins Ziel kommt oder nicht.

Teilnehmer Nummer 3 kann höchstens zweimal überholen. Da die Reihenfolge von Teilnehmer Nummer 1 und 2 *untereinander* aber bereits feststeht, kann sich Nummer 3 gar nicht aussuchen, wen er überholt. Am Ende muss er sich an der richtigen Stelle eingereiht haben, sonst wurde entweder die Regel verletzt, dass man sich nicht gegenseitig überholen darf, oder die Anzahl an Überholungen stimmt nicht.

Und so – also *per Induktion* – kann man weiter argumentieren: Die jeweils ersten n Teilnehmer sind durch die gegebenen Überholvorgänge bereits in der Reihenfolge untereinander festgelegt. Der $(n + 1)$ -te Teilnehmer muss sich dann in diese Reihenfolge an der richtigen Stelle einfügen, wodurch also die Ankunft unter den ersten $n + 1$ Teilnehmern festgelegt ist. $\square$

Wohlgemerkt ist der *Rennverlauf* durch die Überholanzahlen im Allgemeinen noch bei weitem nicht festgelegt, es gibt aber kleine Einschränkungen. Wenn bei drei Teilnehmern zum Beispiel die hinteren beiden je einmal überholen sollen, dann muss Teilnehmer 3 warten, bis Teilnehmer 2 den zuerst Startenden überholt hat. Sonst müsste Nummer 2 mit seiner Überholung die Nummer 3 überholen, und das ist ja verboten.

Eine offensichtliche Beschränkung bei der Zahl der Überholungen wurde schon genannt: Der n -te Teilnehmer darf höchstens $(n - 1)$ -mal überholen. Diese Einschränkung ist aber auch schon die einzige; denn wenn man sich den obigen Beweis noch einmal anschaut, stellt man ohne Schwierigkeit fest, dass der $(n + 1)$ -te Teilnehmer sich ja an jeder Stelle unter den n vor ihm gestarteten Teilnehmern einreihen kann, entsprechend keiner bis n Überholungen durch ihn.

Etwas abstrahiert formuliert lautet unser Problem also: Wir haben b (hier: 15) Becher B_1 bis B_b und k (hier: 4) Kugeln. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Kugeln so auf die Becher zu verteilen, dass im Becher B_i höchstens $i - 1$ Kugeln sind?

Um das konkret auszurechnen, ignorieren wir erst einmal die Mengenbeschränkungen (das lohnt sich, weil wir nur wenige Kugeln haben), außer dass wir weiterhin beachten, in den ersten Becher nichts tun zu dürfen. Nach bekannter Formel gibt es $\binom{14+4-1}{4}$ Möglichkeiten, 4 Kugeln auf 14 Becher zu verteilen. Nun müssen wir nur noch davon abziehen, was nicht erlaubt war: Die Anzahlen, dass im i -ten Becher mehr als $i - 1$ Kugeln sind (für $i = 2, 3, 4$). Ist im zweiten Becher mehr als eine Kugel, so sind dort auf jeden Fall 2 Kugeln und die restlichen 2 Kugeln können beliebig auf die 14 Becher, inklusive des zweiten (dort könnten ja auch 3 oder 4 Kugeln sein) verteilt werden. Das sind also $\binom{14+2-1}{2}$ Möglichkeiten.

Entsprechend gibt es $\binom{14+1-1}{1}$ Möglichkeiten, dass im dritten Becher mehr als zwei, und genau eine Möglichkeit, dass im vierten Becher mehr als drei Kugeln sind.

Netterweise schließen sich diese drei verbotenen Verteilungen gegenseitig aus, so dass wir weiter nichts zu beachten brauchen, denn um zwei Becher zu überfüllen, bräuchte man mindestens $2 + 3 = 5$ Kugeln.

Es gibt also

$$\begin{aligned} & \binom{14+4-1}{4} - \binom{14+2-1}{2} - \binom{14+1-1}{1} - 1 \\ &= \frac{1}{24} \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 - \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 14 - 14 - 1 \\ &= 2380 - 105 - 14 - 1 \\ &= 2260 \end{aligned}$$

Möglichkeiten für die Zielankunft.

Variante:

Es sei mit $m_{t,u}$ die Anzahl der möglichen Zieleinkünfte für t Teilnehmer und u Überholungen bezeichnet. Diese Anzahlen lassen sich auch rekursiv berechnen. Dazu seien folgende Überlegungen angestellt:

Wir betrachten den zuletzt gestarteten Teilnehmer T_t . An seiner Position im Ziel lässt sich sofort ablesen, wie oft er überholt hat: Wenn er an w -ter Stelle ankommt, hat er $(t - w)$ -mal überholt. (Er selbst wurde natürlich

nicht überholt.) Die anderen $t - 1$ Teilnehmer haben dann also untereinander $u - t + w$ Überholungen gehabt, und dafür können wir die in der Rekursion bereits berechnete Anzahl $m_{t-1, u-t+w}$ einsetzen. Da der letzte Teilnehmer null- bis $(t - 1)$ -mal überholen kann, ergibt sich die Formel

$$\begin{aligned} m_{t,u} &= \sum_{i=0}^{\min(u, t-1)} m_{t-1, u-i} \\ &= \sum_{j=\max(0, u-t+1)}^u m_{t-1, j}. \end{aligned}$$

(Hier verbergen sich übrigens im Prinzip die Überlegungen zum Beweis des Hilfssatzes.)

Bei Anwendung der Formel muss man noch beachten, dass es bei t Teilnehmern maximal $(t - 1) + (t - 2) + \dots + 1 = \frac{t(t-1)}{2}$ Überholungen geben kann. Für $u > \frac{t(t-1)}{2}$ setzen wir daher $m_{t,u} := 0$. (Genaugenommen würde es sogar reichen, dies nur für $t = 1$ oder $t = 0$ zu tun.)

Der Startwert der rekursiven Bestimmung ist offensichtlich

$$m_{1,0} := 1$$

(oder abstrakter $m_{0,0} := 1$), womit sich die Zahlenwerte $m_{t,u}$ mit $1 \leq t \leq 15$ und $0 \leq u \leq 6$ wie folgt ergeben:

u	0	1	2	3	4	5	6
t							
1	1	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)
2	1	1	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)
3	1	2	2	1	(0)	(0)	(0)
4	1	3	5	6	5	3	1
5	1	4	9	15	20	22	20
6	1	5	14	29	49	71	90
7	1	6	20	49	98	169	259
8	1	7	27	76	174	343	602
9	1	8	35	111	285	628	1230
10	1	9	44	155	440	1068	2298
11	1	10	54	209	649	1717	4015
12	1	11	65	274	923	2640	6655
13	1	12	77	351	1274	3914	10569
14	1	13	90	441	1715	5629	16198
15	1	14	104	545	2260	7889	24087

Es ergeben sich wie oben 2260 Möglichkeiten.

Bemerkungen: Dass die einzelnen Zeilen der Tabelle symmetrisch aufgebaut sind, ist kein Zufall: Die Gleichheit $m_{t,u} = m_{t, t(t-1)-u}$ ergibt sich, wenn man

statt Überholungen umgekehrt Nicht-Überholungen betrachtet – die Rechnungen sind dieselben.

Da es insgesamt bei t Teilnehmern genau $t!$ verschiedene Möglichkeiten der Zielankunft gibt, haben die Zahlen noch die Eigenschaft

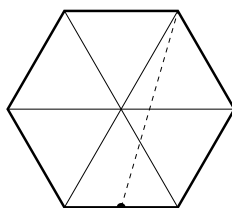
$$t! = \sum_{u=0}^{t(t-1)} m_{t,u}.$$

Aufgabe 4

Ein Billardtisch hat die Form eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge 2 m und eine Kugel liegt genau in der Mitte einer Seite – der sogenannten Grundseite. Sie wird mit 50 cm/s gestoßen. In welche Richtung muss man stoßen, damit die Kugel möglichst spät wieder zur Grundseite zurückkehrt und wie lange ist die Kugel dann unterwegs?

Lösung:

Wir spiegeln das Dreieck immer wieder an allen Seiten außer der Grundseite (also an allen Seiten, an denen die Kugel reflektiert werden kann, bevor sie wieder zur Grundseite kommt), bis sich eine geschlossene Figur ergibt. Die Bilder der Grundseite zeichnen wir dabei etwas dicker:



Wenn wir, anstatt dass die Kugel an einer Seite abprallt, das Dreieck an der Seite spiegeln und die Kugel dafür weiterlaufen lassen, ändert sich nichts an dem zurückgelegten Weg der Kugel, und sie läuft dann auf einer geraden Linie durch diese Figur.

Der längste Weg, den die Kugel damit von der Mitte der Grundseite aus zurücklegen kann, bevor sie wieder auf die Grundseite zurückkehrt, ist somit der Weg in eine der beiden gegenüberliegenden Ecken. Dieser Weg verläuft 1 m zur Seite und $2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2$ m nach oben, daher beträgt der Winkel zur Grundseite

$$\arctan \left(\frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2}{1} \right) = \arctan (2\sqrt{3}) \approx 73,9^\circ.$$

Man errechnet schnell, dass dieser Weg $\sqrt{12+1} \approx 3,606$ m lang ist. Daher ist die Kugel $3,606/0,50 = 7,212$ Sekunden unterwegs.

Außerdem sieht man, dass die Kugel bei einem optimalen Weg zweimal an einer Dreiecksseite reflektiert wird.