Mathematischer Korrespondenz-zirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Beispiellösungen zu Blatt 82

Aufgabe 1

Wir versuchen, die Zahl 82 „aus sich selbst“ zu erzeugen. Dazu bilden wir alle möglichen Produkte aus den beiden Ziffern und addieren sie:

$$8 \cdot 8 + 2 \cdot 8 + 2 \cdot 2 = 84.$$

Nicht ganz 82, aber schon gar nicht schlecht. Gibt es denn andere zweistellige Zahlen, bei denen man bei diesem Verfahren mindestens genauso gut an die Ausgangszahl herankommt?

Lösung:

Wir stellen eine zweistellige Zahl durch $10a+b$ mit $1 \le a \le 9$ und $0 \le b \le 9$ dar und suchen also a und b so, dass

$$a^2 + ab + b^2 = a(a+b) + b^2 \approx 10a + b \tag{1}$$

gilt. Dabei bedeute „$x \approx y$“, dass $|x-y| \le 2$ gilt.
Wenn $b \ge 5$ und also $b^2 \ge 25$ gilt, muss die Zahl selbst größer oder gleich 25 sein, also $a \ge 2$. Außerdem ist dann $b^2 - b \ge 20$ und aus Umformung von (1) zu $b^2 - b \approx 10a - a(a+b)$ folgt $a(a+b) < 10a$. Wegen $a > 0$ folgt sogar $a+b < 10$. Das ist nur für $a \le 4$ möglich, dann ist aber $10a - (a+b)a \le 10a - (a+5)a \le 10a - (1+5)a = 4a \le 16$. Die Abweichung zu $b^2 - b$ ist also mindestens 4, sodass wir den Fall $b \ge 5$ ausschließen können.

Betrachten wir nun die übrigen Fälle einzeln:
Für $b = 4$ ist $b^2 - b = 12$ und genau wie eben müssen $a(a+b) < 10a$, $(a+b) < 10$ und somit $a \le 5$ gelten. Wenn wir versuchen, die Zahlen 14, 24, 34, 44 und 54 aus sich selbst zu erzeugen, erhalten wir der Reihe nach

$$\begin{aligned} 1^2 + 1 \cdot 4 + 4^2 &= 21 \not\approx 14, \\ 2^2 + 2 \cdot 4 + 4^2 &= 28 \not\approx 24, \\ 3^2 + 3 \cdot 4 + 4^2 &= 37 \not\approx 34, \\ 4^2 + 4 \cdot 4 + 4^2 &= 48 \not\approx 44 \quad \text{und} \\ 5^2 + 5 \cdot 4 + 4^2 &= 61 \not\approx 54. \end{aligned}$$

Ganz analog erhalten wir für $b = 3$, dass $a \le 6$ gelten muss. Wieder versuchen wir, die Zahlen 13, 23, 33, 43, 53 und 63 aus sich selbst zu erzeugen und erhalten die Zahlen 13, 19, 27, 37, 49 und 63, womit wir zwei Zahlen gefunden haben, die sich selbst erzeugen, nämlich 13 und 63.

Sei nun $b = 2$, also $b^2 - b = 2$. Für $3 \le a \le 6$ ist $10a - a(a+b) = a(10 - (a+b)) \ge 3 \cdot 2 = 6 \not\approx 2$. Für $1 \le a \le 2$ ist $a(10 - (a+b)) \ge 1 \cdot 6 \not\approx 2$.

Es bleiben also die Zahlen 72, 82 und 92 zu prüfen; 72 erzeugt 67, 92 erzeugt 103 und die 82 erzeugt bekanntermaßen 84.

Für $b = 1$ folgt aus $a^2 + ab + b^2 \approx 10a + b$ nacheinander $a^2 + a + 1 \approx 10a + 1$, $a(a + 1) \approx 10a$ und schließlich $a + 1 \approx 10$, also $a \approx 9$. Für $a = 8$ ist $a(a + 1) = 72 \not\approx 80 = 10a$ und für $a = 7$ ist $a(a + 1) = 56 \not\approx 70 = 10a$. Also folgt $a = 9$. Die Zahl 91 ist tatsächlich eine sich selbst erzeugende Zahl.

Zusammenfassend können wir festhalten: 82 ist die einzige Zahl, deren Erzeugnis sich um 1 oder 2 von der Zahl selbst unterscheidet. Es gibt drei Zahlen, die sich selbst erzeugen: 13, 63 und 91.

Aufgabe 2

Auf jedem Feld eines Schachbretts liegt entweder ein roter oder ein blauer Stein, und es gibt von jeder Farbe mindestens einen. Gibt es dann immer einen Punkt, der Ecke von genau einem rot besteinten Feld ist?

Lösung:

Auch wenn man möglicherweise intuitiv dazu neigt, die Aufgabe mittels Widerspruchsbeweis zu lösen, so ist der direkte Beweis doch am kürzesten:
Wir betrachten die erste Spalte des Feldes (vom linken Rand des Feldes gesehen), in der rote Felder vorkommen. Der linke obere Eckpunkt des obersten (und auch der linke untere Eckpunkt des untersten) von diesen roten Feldern erfüllt die gewünschte Eigenschaft.
Bemerkung: Man kann natürlich auch mit der letzten Spalte oder der ersten/letzten Zeile beginnen.

Aufgabe 3

Eine Folge von Zahlen wird wie folgt gebildet: Die erste Zahl ist die 5, und jedes weitere Glied ist um 4 größer als das Produkt aller vorherigen Zahlen. Zeige: Die Folge besteht bis auf die Startzahl nur aus Quadratzahlen.

Lösung:

Wir bezeichnen das n-te Folgeglied mit a_n. Dann ist $a_1 = 5$ sowie $a_2 = 5+4 = 9 = 3^2$. Nach Voraussetzung gilt

$$a_{n+1} = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n + 4.$$

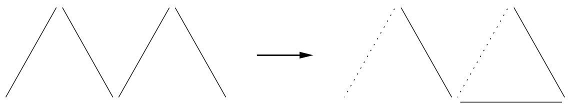
Durch Umformen erhalten wir für $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_1 \cdot \ldots \cdot a_n + 4 \\ &= a_n \cdot (a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}) + 4 \\ &= a_n \cdot (a_n - 4) + 4 \\ &= a_n^2 - 4a_n + 4 \\ &= (a_n - 2)^2 \end{aligned}$$

Also sind alle Folgeglieder bis auf den Startwert Quadratzahlen, wie behauptet.

Aufgabe 4

Volker und Wanda spielen ein Spiel. Sie legen n Hölzchen in einer Zickzacklinie aus, und zwar so, dass die Winkel zwischen den Hölzchen jeweils 60° sind. Ein Spielzug besteht darin, erst zwei Hölzchen wegzunehmen und dann ein Hölzchen so hinzulegen, dass seine Enden an Punkten sind, wo jeweils mindestens ein weiteres Hölzchen endet. Dabei darf man es aber nicht an eine Stelle legen, von der aus man gerade ein Hölzchen entfernt hat. Beispiel:

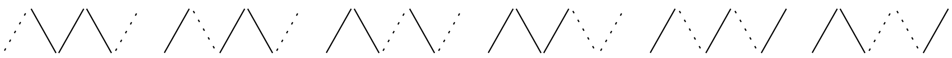


Wer keinen vollständigen Zug mehr ausführen kann, hat verloren. Volker beginnt.
Man erkennt leicht, dass für $n \leq 3$ kein Zug ausführbar ist und dass für $n = 4$ Volker gewinnt, weil er einen Zug ausführen kann, Wanda mit nur drei Hölzchen aber nicht mehr.
Wer kann für $n = 5$ und für $n = 6$ den Sieg erzwingen?

Lösung:

Für $n = 5$ kann Wanda den Sieg erzwingen.

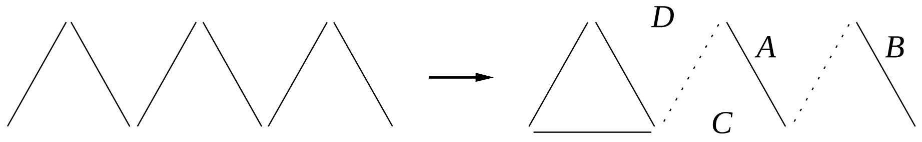
In der ersten Hälfte seines Zuges hat Volker $\binom{5}{2} = 10$ Möglichkeiten, zwei Hölzchen wegzunehmen; einige der Möglichkeiten sind jedoch spiegelbildlich zueinander (es ist egal, ob er das erste und das vierte oder das zweite und das fünfte Hölzchen nimmt):



Betrachten wir nur noch die Hölzchen, die übrig bleiben, so sehen noch zweimal zwei Konstellationen gleich aus und es bleiben die folgenden vier Fälle zu untersuchen:

In jedem Fall gibt es mindestens zwei zulässige Stellen, an denen Volker in der zweiten Hälfte seines Zuges das neue Hölzchen einfügen kann.
Wählt er eine davon aus, so ist anschließend Wanda am Zug und kann die zweite – von Volker nicht ausgewählte – Stelle nutzen. Sie sucht zwei Hölzchen so aus, dass diese die beiden Eckpunkte der möglichen Einfügeposition berühren, entfernt die beiden anderen und fügt das neue Hölzchen ein.
Volker erhält dann eine Konstellation mit drei Hölzchen und kann keinen vollständigen Zug mehr ausführen. Folglich verliert er.

Starten die beiden mit 6 Hölzchen, so kann Volker den Sieg erzwingen. Er kann zum Beispiel als Erstes folgenden Zug machen:



Entfernt Wanda dann das Hölzchen A, kann sie selbst ihren Zug nicht zu Ende bringen. Also muss A liegenbleiben. Wenn sie B nicht entfernt, gibt es zwischen A und B drei Möglichkeiten, ein Hölzchen einzufügen. Da Wanda nur eine davon belegen kann, kann auch Volker eine davon in seinem nächsten Zug nutzen. Wanda findet danach nur noch drei Hölzchen vor und verliert.
Wenn Wanda aber B entfernt, kann sie vom linken Dreieck nur noch ein Hölzchen entfernen; damit verbleiben in jedem Fall die beiden Möglichkeiten C und D zum Einfügen eines Hölzchens. Wie eben schon kann Volker noch einen Zug ausführen und gewinnt.