Beispiellösungen zu Blatt 83

Aufgabe 1

Unser Maulwurf Tom möchte den Eichhörnchen, die ja manchmal vergessen, wo sie ihren Wintervorrat versteckt haben, zum Advent etwas Gutes tun. Er hat dafür Vorratskammern mit zusammen 271 Bucheckern, 69 Haselnüssen und 151 Eicheln angelegt. Die Leckereien will er nun in Pakete aufteilen, die entweder

5 Bucheckern, 2 Haselnüsse und 2 Eicheln
oder 4 Bucheckern, 1 Haselnuss und 4 Eicheln
oder 6 Bucheckern, 1 Haselnuss und 3 Eicheln

enthalten.
Der Vorrat soll komplett aufgebraucht werden. Wie viele Pakete wird Tom packen?

Lösung:

Sei A die Anzahl der Pakete mit 5 Bucheckern, 2 Haselnüssen und 2 Eicheln, B die Anzahl der Pakete mit 4 Bucheckern, 1 Haselnuss und 4 Eicheln und C die Anzahl der Pakete mit 6 Bucheckern, 1 Haselnuss und 3 Eicheln, die Tom packt.
Die Bedingung, dass er seinen Vorrat komplett aufbraucht, lässt sich in drei Gleichungen zu den verpackten Bucheckern, Haselnüssen und Eicheln übersetzen:

$$5 \cdot A + 4 \cdot B + 6 \cdot C = 271 \qquad (1)$$
$$2 \cdot A + B + C = 69 \qquad (2)$$
$$2 \cdot A + 4 \cdot B + 3 \cdot C = 151\,. \qquad (3)$$

Subtrahieren wir nun Gleichung (1) vom Sechsfachen der Gleichung (2) bzw. vom Zweifachen der Gleichung (3), so erhalten wir die Gleichungen

$$7 \cdot A + 2 \cdot B = 143 \qquad (4)$$
$$-1 \cdot A + 4 \cdot B = 31\,. \qquad (5)$$

Wenn wir weiterhin Gleichung (5) vom Doppelten der Gleichung (4) subtrahieren, ergibt sich $15 \cdot A = 255$, also $A = 17$. Einsetzen in die Gleichungen (5) und (2) liefert als einzig mögliche Lösung $B = 12$ und $C = 23$.

Eine Probe bestätigt, dass $A = 17$, $B = 12$, $C = 23$ die Gleichungen (1) bis (3) löst. Insgesamt wird Tom also $17 + 12 + 23 = 52$ Pakete für die Eichhörnchen packen.

Bemerkung: Da hier nur die Anzahl der Pakete insgesamt gefragt war, ist es nicht zwingend nötig, die einzelnen Anzahlen A, B und C zuerst auszurechnen. Addieren wir das Doppelte der Gleichung (3) und das Dreifache der Gleichung (2) zur Gleichung (1), erhalten wir $15(A + B + C) = 780$, also direkt $A + B + C = 52$. Der Nachteil bei dieser Methode ist, dass nicht überprüft wird, ob das Problem überhaupt lösbar ist.

Aufgabe 2

Zeige, dass für alle positiven ganzen n die Zahl $3n$ oder die Zahl $7n$ wenigstens eine ungerade Ziffer hat.

Lösung:

Ist n selbst eine ungerade Zahl, so enden auch $3n$ und $7n$ auf ungerade Ziffern.

Ist n eine gerade Zahl, die auf eine Ziffer x ungleich 0 endet, so ist x auch die Zehnerziffer von $10n$ und weder $3n$ noch $7n$ enden auf 0.
Addieren wir in der Dezimalschreibweise $3n = [\ldots ba]$ und $7n = [\ldots dc]$ mit den Zehnerziffern b bzw. d und den Einerziffern a bzw. c, so erhalten wir

$$\begin{array}{lr} & 3n = [\ldots ba] \\ + & 7n = [\ldots dc] \\ \hline & 10n = [\ldots x0] \end{array},$$

also $a + c = 10$ und folglich einen Übertrag für die Zehnerziffern. Somit ist $b + d + 1 = x$ oder $b + d + 1 = 10 + x$. Da x eine gerade Ziffer ist, muss in beiden Fällen genau eine der beiden Ziffern b oder d ungerade sein.

Ist n eine Zahl, die auf eine oder mehrere Nullen endet, so können wir die Vielfachen $3n$ und $7n$ auch berechnen, indem wir erst alle Nullen am Ende streichen, die so erhaltene Zahl y mit 3 bzw. 7 multiplizieren und die Nullen wieder anfügen. Nach den obigen beiden Fällen hat mindestens eine der beiden Zahlen $3y$ und $7y$ und damit dann auch die entsprechende Zahl $3n$ oder $7n$ eine ungerade Ziffer.

Aufgabe 3

Bei einem Würfel der Seitenlänge 2 sind neben den acht Eckpunkten zusätzlich die Mittelpunkte der zwölf Kanten, die Mittelpunkte der sechs Flächen und der Mittelpunkt des Würfels markiert.
Welches ist die kleinste natürliche Zahl k, deren Wurzel nicht als Abstand zweier markierter Punkte vorkommt?

Lösung:

Vom Mittelpunkt des Würfels aus gesehen sind alle diejenigen Punkte markiert, die in jeder der drei Raumrichtungen den gerichtet gemessenen Abstand $0, -1$ oder 1 vom Mittelpunkt haben. Es können also für je drei natürliche Zahlen zwischen 0 und 2 immer zwei Punkte gefunden werden, die diese drei Zahlen als Abstände in x-, y- bzw. z-Richtung haben.

Der Abstand d zwischen zwei Punkten im Raum ergibt sich durch zweimalige Anwendung des Satzes von Pythagoras zu $d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$. Für die Beantwortung der Fragestellung reicht es also aus, zu bestimmen, welche Zahlen sich als Summe von drei Quadraten der Zahlen 0, 1 und 2 darstellen lassen. Dazu notieren wir diese systematisch, bei der kleinsten beginnend:

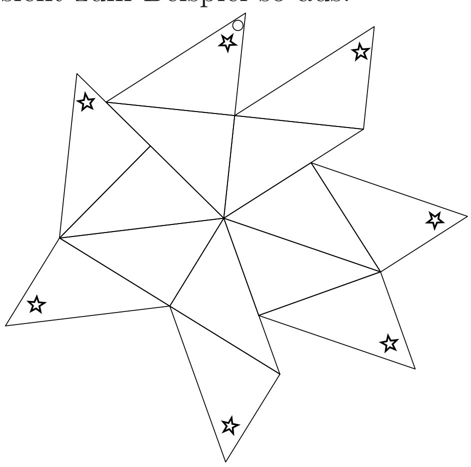
$$\begin{aligned} 0 &= 0^2 + 0^2 + 0^2 & 5 &= 0^2 + 1^2 + 2^2 \\ 1 &= 0^2 + 0^2 + 1^2 & 6 &= 1^2 + 1^2 + 2^2 \\ 2 &= 0^2 + 1^2 + 1^2 & 8 &= 0^2 + 2^2 + 2^2 \\ 3 &= 1^2 + 1^2 + 1^2 & 9 &= 1^2 + 2^2 + 2^2 \\ 4 &= 0^2 + 0^2 + 2^2 & 12 &= 2^2 + 2^2 + 2^2\,. \end{aligned}$$

Die 7 ist also die kleinste Zahl, die so nicht darstellbar ist. Das heißt, das gesuchte k hat den Wert 7.

Bemerkung: Weil bereits $3^2 > 7$ gilt, folgt aus der obigen Rechnung, dass 7 auch die kleinste Zahl ist, die nicht als Summe von drei beliebigen natürlichen Quadraten darstellbar ist.

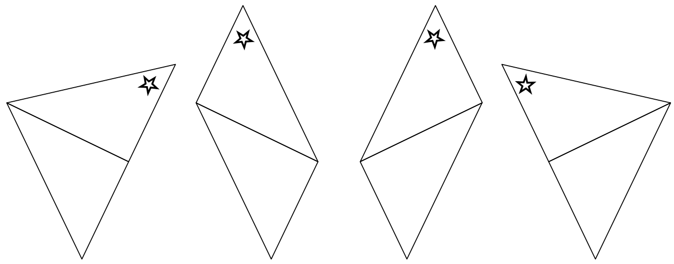
Aufgabe 4

Gisela hat zum Weihnachtsbasteln 14 kongruente Dreiecke mit den Winkeln $90°$, $\left(\frac{360}{7}\right)^\circ$ und $90° - \left(\frac{360}{7}\right)^\circ$ ausgeschnitten. Sieben Dreiecke legt sie jeweils mit den $\left(\frac{360}{7}\right)^\circ$-Ecken aneinander, sodass sich der „Kreis“ schließt. Die anderen sieben legt sie an die jeweils äußeren Kanten, und zwar so, dass immer gleich lange Kanten aneinanderliegen. An diejenigen Spitzen der „äußeren“ Dreiecke, die der Verbindungskante gegenüberliegen, klebt sie je einen kleinen Goldstern. In eine Spitze kommt ein Loch zum Aufhängen – fertig! Einzige Bedingung dabei: Die Dreiecksspitzen, an denen Goldsterne sind, sollen mit keinem anderen Dreieck Berührung haben.
Wie viele verschiedene solche Sterne kann Gisela herstellen?
Ein möglicher Stern sieht zum Beispiel so aus:



Lösung:

Bei einem solchen Stern gehören in offensichtlicher Weise immer zwei Dreiecke zusammen; eine Ecke des einen Dreiecks liegt in der Mitte, und eine Ecke des anderen Dreiecks hat einen Goldstern. Da die Seiten der Dreiecke verschieden lang sind, klebt der Goldstern an derjenigen Ecke des zweiten Dreiecks, die den $\left(\frac{360}{7}\right)^\circ$-Winkel hat.
Durch das eingestanzte Loch ist den sieben Dreieckspaaren eindeutig eine Position im Stern zugewiesen.
Für die Anordnung jedes Paares gibt es vier Möglichkeiten:



Ohne die verlangte Einschränkung gibt es also 4^7 Möglichkeiten für die Anordnung.
Die unerlaubten Anordnungen schließen wir jetzt nach dem Prinzip der „Inklusion und Exklusion“ aus.
Einen Verstoß gegen die Einschränkung – wir nennen das eine *Störstelle* – gibt es genau dann, wenn im Uhrzeigersinn die äußere linke und die äußere rechte Anordnung (in der obigen Zeichnung) aneinandertreffen. Das bedeutet gleichzeitig, dass es zu den direkten Nachbarn der beiden beteiligten Dreieckspaare keinen Verstoß geben kann.
Es gibt 7 verschiedene Positionen für eine Störstelle. Wir zählen, wie viele Möglichkeiten es gibt, an einer bestimmten Position eine Störstelle zu haben: zwei Dreieckspaare sind fixiert, die anderen frei. Es gibt also $1 \cdot 4^5$ Möglichkeiten. Diesen Wert ziehen wir für jede Position, also sieben Mal ab:

$$4^7 - 7 \cdot 4^5$$

Dabei ist jeder Stern mit *genau* einer Störstelle genau einmal negativ gezählt, wird in der Summe also gar nicht gezählt. Sterne mit zwei oder mehr Störstellen wurden dagegen mehrfach abgezogen und zählen nun quasi negativ. Sterne mit genau zwei Störstellen wurden offenbar genau zweimal abgezogen. Daher zählen wir nun, wie viele Sterne es mit zwei Störstellen an zwei bestimmten Orten gibt: Es sind 4^3, da analog noch drei Dreieckspaare frei angeordnet werden können. Zu bestimmen ist noch, wie viele Anordnungen von zwei Störstellen es gibt. Wir zeichnen eine Stelle aus; dann bleiben noch vier Möglichkeiten für eine zweite Störstelle. Auf diese Weise zählen wir jede Möglichkeit doppelt – also bleiben $\frac{7 \cdot 4}{2}$ Möglichkeiten, zwei Störstellen zu haben. Entsprechend verändern wir unseren Term:

$$4^7 - 7 \cdot 4^5 + \frac{7 \cdot 4}{2} \cdot 4^3.$$

Nun wird auch jeder Stern mit genau zwei Störstellen genau null Mal gezählt. Sterne mit drei Störstellen werden in unserem Term bislang $1 - 3 + 3$ Mal gezählt, also muss ihre Anzahl noch einmal subtrahiert werden. Diese Zahl ist wieder leicht zu bestimmen: Genau ein Dreieckspaar ist frei in der Anordnung (Faktor 4); und seine Position im Stern (7 Möglichkeiten) bestimmt das Aussehen vollständig.
Es ergibt sich als Anzahl der von Gisela zugelassenen Sterne:

$$\begin{aligned} & 4^7 - 7 \cdot 4^5 + \frac{7 \cdot 4}{2} \cdot 4^3 - 7 \cdot 4 \\ = {} & 9 \cdot 4^5 + \frac{7 \cdot 4}{2} \cdot 4^3 - 7 \cdot 4 \\ = {} & (144 + 14) \cdot 4^3 - 28 \\ = {} & 158 \cdot 64 - 28 \\ = {} & 10\,084\,. \end{aligned}$$