Beispiellösungen zu Blatt 84

Aufgabe 1

Welche der folgenden Zahlen ist größer?

$$\sqrt{2009+\sqrt{2010}}+\sqrt{2010+\sqrt{2009}}\,, \qquad \sqrt{2009+\sqrt{2009}}+\sqrt{2010+\sqrt{2010}}$$

Lösung:

Es gilt $2009 < 2010$ und folglich auch

$$2009\cdot(\sqrt{2010}-\sqrt{2009}) < 2010\cdot(\sqrt{2010}-\sqrt{2009})\,.$$

Addieren wir noch $2009\cdot 2010+\sqrt{2009\cdot 2010}$ und schieben die negativen Terme auf die jeweils andere Seite, ergibt sich

$$\begin{aligned}&2009\cdot 2010+2009\cdot\sqrt{2010}+2010\cdot\sqrt{2009}+\sqrt{2009\cdot 2010}\\ &\qquad< 2009\cdot 2010+2010\cdot\sqrt{2010}+2009\cdot\sqrt{2009}+\sqrt{2009\cdot 2010}\end{aligned}$$

oder zusammengefasst

$$(2009+\sqrt{2009})\cdot(2010+\sqrt{2010}) < (2009+\sqrt{2010})\cdot(2010+\sqrt{2009})\,.$$

Ziehen wir die Wurzel, multiplizieren mit 2 und addieren auf beiden Seiten noch $2009+\sqrt{2009}+2010+\sqrt{2010}$, erhalten wir

$$\begin{aligned}&2009+\sqrt{2009}+2\sqrt{(2009+\sqrt{2009})(2010+\sqrt{2010})}+2010+\sqrt{2010}\\ &\quad< 2009+\sqrt{2010}+2\sqrt{(2009+\sqrt{2010})(2010+\sqrt{2009})}+2010+\sqrt{2009}\end{aligned}$$

bzw. quadratisch zusammengefasst

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt{2009+\sqrt{2009}}+\sqrt{2010+\sqrt{2010}}\right)^2\\ &\qquad\qquad< \left(\sqrt{2009+\sqrt{2010}}+\sqrt{2010+\sqrt{2009}}\right)^2\,.\end{aligned}$$

Da die quadrierten Terme beide positiv sind, ändert sich beim Wurzelziehen wiederum nichts am Relationszeichen. Somit ergibt sich, dass

$$\sqrt{2009+\sqrt{2010}}+\sqrt{2010+\sqrt{2009}}$$

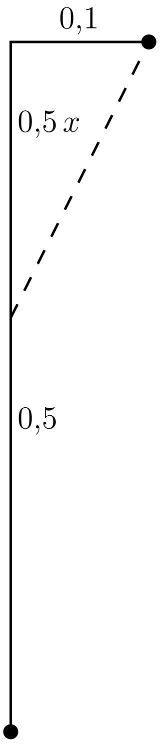
die größere der beiden Zahlen ist.

Aufgabe 2

Stefan Schneestiefel ist auf großer Winterwanderung und möchte die nächste Wanderhütte möglichst schnell erreichen. Der noch verbleibende Weg dorthin hat eine L-Form, noch 500 m geradeaus, danach knickt der Weg um 90° ab und hat noch einmal 100 m. Stefan überlegt, ob es sich lohnt, über das schneebedeckte Feld abzukürzen, bzw. ab welcher Stelle es sich lohnt. Er muss dabei einkalkulieren, dass seine Querfeldein-Geschwindigkeit nur 4 km/h beträgt, während die normale Wandergeschwindigkeit 5 km/h beträgt. Was rätst du ihm?

Lösung:

Auflösen der hoffentlich bekannten Formel „Geschwindigkeit = Weg durch Zeit“ ($v = s/t$) nach t ergibt $t = s/v$. Im Folgenden rechnen wir in den Einheiten km und km/h, lassen diese aber beim Schreiben teilweise weg.



Wenn Stefan auf die Abkürzung verzichtet und den befestigten Weg läuft, beträgt die zu absolvierende Strecke 0,5 km + 0,1 km = 0,6 km und die dafür benötigte Zeit

$$t_1 = \frac{0{,}6\,\text{km}}{5\,\text{km/h}} = 0{,}12\,\text{h}\,.$$

Wir nehmen nun an, dass Stefan den Anteil x der 0,5 Kilometer langen Strecke abkürzt, indem er von dieser Stelle aus querfeldein läuft. Wir bestimmen die Gesamtzeit für einen solchen Weg in Abhängigkeit von x und anschließend diejenigen Werte für x, für die die Zeit ebenfalls 0,12 Stunden beträgt:
Die Wegstrecke, die Stefan über das Feld läuft, ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Kathetenlängen 0,1 und $0{,}5 \cdot x$, hat also die Länge $\sqrt{0{,}1^2 + (0{,}5 \cdot x)^2}$. Das Stück, das Stefan auf dem befestigten Weg geht, hat die Länge $0{,}5(1-x)$. Die Gesamtzeit für diese Wanderwegvariante beträgt also

$$t_2(x) = \frac{0{,}5(1-x)}{5} + \frac{\sqrt{0{,}1^2 + (0{,}5 \cdot x)^2}}{4}.$$

Lösen der Gleichung $t_1 = t_2(x)$ liefert nun die gesuchten Werte für x:

$$\begin{aligned} & t_1 = \frac{0{,}5(1-x)}{5} + \frac{\sqrt{0{,}1^2 + (0{,}5 \cdot x)^2}}{4} \\ \iff \quad & 8 \cdot t_1 = 8 \cdot 0{,}1(1-x) + \sqrt{4 \cdot 0{,}1^2 + 4 \cdot (0{,}5 \cdot x)^2} \\ \iff \quad & 0{,}96 - 0{,}8(1-x) = \sqrt{0{,}04 + x^2} \\ \iff \quad & (0{,}16 + 0{,}8 \cdot x)^2 = 0{,}04 + x^2 \end{aligned}$$

(Die Äquivalenz folgt daraus, dass es nur positive Lösungen x geben kann.)

$$\begin{aligned}
\iff\quad & 0 = 0{,}36x^2 - 0{,}256 \cdot x + 0{,}0144 \\
\iff\quad & 0 = x^2 - \frac{32}{45}x + 0{,}04 \\
\implies\quad & x_{1/2} = \frac{16}{45} \pm \sqrt{\frac{256}{2025} - \frac{81}{2025}} = \frac{16}{45} \pm \frac{5\sqrt{7}}{45} \\
\implies\quad & x_1 \approx 0{,}65\,, \qquad x_2 \approx 0{,}062
\end{aligned}$$

Da der Koeffizient von x^2 in der Funktion $t_2(x)$ positiv ist, ist die zugehörige Parabel nach oben geöffnet, d. h. zwischen den beiden gefundenen Lösungen nimmt die Funktion Werte kleiner als $t_1 = 0{,}12\,\text{h}$ an.
Also lohnt es sich, jeden beliebigen Anteil zwischen 6,2% und 65% der 500 m langen Strecke abzukürzen.

Bemerkung: Da nicht explizit nach dem zeitoptimalen Weg gefragt war, genügte es, das obige Intervall zu bestimmen. Natürlich kann man unter Verwendung von etwas Analysis (Bestimmen der Nullstelle der Ableitung von $t_2(x)$) auch die Stelle finden, an der Stefan optimalerweise auf das Feld abbiegen sollte; sie ist bei $x = \frac{4}{15}$.

Aufgabe 3

Jomtje und Sverre spielen: An einer Tafel steht die Zahl 2010. Abwechselnd nehmen sie die an der Tafel stehende Zahl n, ziehen einen ihrer Teiler ungleich n ab, schreiben das Ergebnis der Subtraktion als neue Zahl an die Tafel und streichen die alte Zahl durch.
Wer die 1 anschreiben kann, gewinnt. Jomtje fängt an. Kann einer der beiden den Gewinn erzwingen?

Lösung:

Jomtje als beginnende Spielerin kann den Gewinn erzwingen.

Jomtjes Strategie besteht darin, einen solchen Teiler auszuwählen, dass sie Sverre jedes Mal eine ungerade Zahl hinterlässt. Hat Sverre nämlich eine ungerade Zahl x an der Tafel stehen, so sind auch alle Teiler dieser Zahl ungerade. Zieht er einen davon von x ab, so ist die Differenz in jedem Fall eine gerade Zahl. Insbesondere kann er nicht die 1 an die Tafel schreiben.

Hat hingegen Jomtje – so wie am Anfang – eine gerade Zahl y an der Tafel stehen, so hat diese mindestens einen ungeraden Teiler, nämlich die 1. Zieht sie die 1 oder irgendeinen anderen ungeraden Teiler von y ab, so ist die Differenz ebenfalls eine ungerade Zahl.

Jomtje kann also in ihrem ersten Zug, so wie auch in jedem ihrer folgenden Züge, Sverre eine ungerade Zahl hinterlassen. Sverre hingegen muss jedes Mal eine gerade Zahl für Jomtje an die Tafel schreiben. Da die angeschriebene Zahl jedes Mal echt kleiner als die vorhergende ist, wird Jomtje nach endlich vielen Schritten die 1 an die Tafel schreiben können und gewinnt.

Aufgabe 4

Für eine positive ganze Zahl $m > 1$ sei $k(m)$ die kleinste positive ganze Zahl größer als 1, die ein Teiler von m ist; und wenn $m = 1$ ist, sei $k(m) = 1$.
Zu einer rationalen Zahl z bestimmen wir eine Nachfolgerzahl $f(z)$. Dazu stellen wir z gekürzt als $z = \frac{p}{q}$ dar, schreiben allerdings anders als sonst üblich ein eventuelles Minus in den Nenner. Es gilt dann also $\mathrm{ggT}(p, q) = 1$ und $p \geq 0$. Damit definieren wir

$$f(z) := \frac{p}{k(p) \cdot \left(p - k\left(\frac{p}{k(p)}\right) \cdot \frac{p}{k(p)} + 1\right)} .$$

Sei schließlich eine positive ganze Startzahl a_0 gegeben. Wir betrachten die Folge, die sich aus $a_{n+1} := f(a_n)$ für $n \geq 0$ ergibt.
Zeige, dass die Folge irgendwann konstant wird. Welchen Wert nimmt sie dann an, nach wie vielen Schritten ist das der Fall und wie oft wird zwischendurch ein negativer Wert angenommen?

Lösung:

Sei $m = p_1^{i_1} p_2^{i_2} \dots p_s^{i_s}$ eine positive ganze Zahl ungleich 1 mit ihrer Primfaktorzerlegung, $p_1 < p_2 < \dots < p_s$ sind also die Primteiler, und die i_j seien natürlich größer als null. (Diese Bedingungen sollen im Folgenden bei jeder Primfaktorzerlegung gelten.) Wenn $k(m)$ die kleinste positive ganze Zahl größer als 1 ist, die ein Teiler von m ist, dann ist offensichtlich $k(m)$ die kleinste Primzahl, die m teilt, also $k(m) = p_1$.
Wenn $i_1 > 1$ ist, ist auch $k\left(\frac{m}{k(m)}\right) = p_1 = k(m)$. In diesem Fall ist

$$k\left(\frac{m}{k(m)}\right) \cdot \frac{m}{k(m)} = k(m) \cdot \frac{m}{k(m)} = m,$$

also

$$k(m) \cdot \left(m - k\left(\frac{m}{k(m)}\right) \cdot \frac{m}{k(m)} + 1\right) = k(m) \cdot 1 = p_1 .$$

Das bedeutet: Wenn in der gekürzten Bruchdarstellung von $z = \frac{p_1^{i_1} p_2^{i_2} \dots p_s^{i_s}}{q}$ der kleinste Primteiler des Zählers von z in mehr als nur einfacher Potenz vorkommt, also $i_1 > 1$ ist, dann ist

$$f(z) = \frac{p_1^{i_1} p_2^{i_2} \dots p_s^{i_s}}{p_1 \cdot 1} = \frac{p_1^{i_1 - 1} p_2^{i_2} \dots p_s^{i_s}}{1} .$$

Anders gesagt: In diesem Fall ergibt sich die Nachfolgezahl von z einfach aus dem Zähler von z durch Teilen durch dessen kleinsten Primteiler.
Wir gehen wieder einen Schritt zurück und betrachten $k(m)$ für den Fall, dass $m = p_1^{i_1} p_2^{i_2} \dots p_s^{i_s}$ mit $i_1 = 1$ und mit $s \geq 2$ ist. Hier ist $\frac{m}{k(m)} = \frac{m}{p_1} = p_2^{i_2} p_3^{i_3} \dots p_s^{i_s}$. Daher ist $k(\frac{m}{k(m)}) = p_2$ und also

$$\left(m - k\left(\frac{m}{k(m)}\right) \cdot \frac{m}{k(m)} + 1\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(m - p_2 \cdot \frac{m}{p_1} + 1\right)\\
&= \frac{m}{p_1} \cdot (p_1 - p_2) + 1\\
&\leq -\frac{m}{p_1} + 1\\
&< 0\,,
\end{aligned}
$$

da $\frac{m}{p_1} \geq p_2 \geq 3$ gilt.

Daraus folgt: Wenn für $z = \frac{m}{q} = \frac{p_1^{i_1} p_2^{i_2} \ldots p_s^{i_s}}{q}$ gilt, dass $i_1 = 1$ und $s \geq 2$ ist, dann ist

$$f(z) = \frac{m}{p_1 \cdot \left(\frac{m}{p_1} \cdot (p_1 - p_2) + 1\right)} = \frac{\frac{m}{p_1}}{\frac{m}{p_1} \cdot (p_1 - p_2) + 1}\,.$$

Wohlgemerkt ist natürlich $\frac{m}{p_1} = p_2^{i_2} \ldots p_s^{i_s}$ eine positive ganze Zahl.
Der Nenner von $f(z)$ ist ein Vielfaches des Zählers plus 1 und damit teilerfremd zum Zähler. Also ist die obige Darstellung ein gekürzter Bruch, und hier ist der Nenner negativ, also die Zahl $f(z)$ insgesamt.
Wie an der Formel für $f(z)$ zu erkennen ist, ist der Nenner für den weiteren Fortgang einer Rekursion uninteressant; er sorgt hier aber dafür, dass das Ergebnis negativ wird.

Bleibt als letzter interessanter Fall zu untersuchen, welchen Wert $f(z)$ (und gegebenenfalls seine Nachfolger) annehmen, wenn $z = \frac{p_s}{q}$, der Zähler von z also eine Primzahl ist. Es ist $k(p_s) = p_s$ und $k(\frac{p_s}{k(p_s)}) = k(1) = 1$. Damit ist

$$
\begin{aligned}
f(p_s) &= \frac{p_s}{p_s \cdot (p_s - 1 \cdot 1 + 1)}\\
&= \frac{1}{p_s}.
\end{aligned}
$$

Der Nachfolger dieser Zahl ist dann genau wie der Nachfolger von 1 (da der Nenner für die Nachfolgerberechnung ja uninteressant ist)

$$f(1) = \frac{1}{1 \cdot (1 - k(1) \cdot 1 + 1)} = 1.$$

Zusammengenommen ergibt sich:
Für das Berechnen der nächsten Zahl in einer Rekursion ist nur der Zähler der Startzahl wichtig.
In jedem Schritt der Rekursion verliert der Zähler seinen kleinsten Primfaktor. Wenn der letzte Primfaktor verschwindet, ist allerdings der Nenner ungleich 1, so dass ein weiterer Rekursionsschritt nötig ist, um den Wert 1 zu erreichen. Ab diesem Zeitpunkt ist die Folge konstant.
Genau dann, wenn der kleinste Primfaktor des Zählers in nur einfacher Potenz vorhanden ist, ergibt sich ein negativer Nenner, also ein negativer Wert in der Folge – mit der Ausnahme beim Übergang von p_s zu $\frac{1}{p_s}$.

Für eine Startzahl $a_0 = \frac{p_1^{i_1} p_2^{i_2} \ldots p_s^{i_s}}{q}$ braucht die Rekursion daher genau $i_1 + i_2 + \ldots + i_s + 1$ Schritte, um den konstant bleibenden Wert 1 zu erreichen; und $(s-1)$-mal wird dabei ein negativer Wert angenommen.