Mathematischer Korrespondenz-zirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Beispiellösungen zu Blatt 85

Aufgabe 1

Jemand möchte genau 2010 Konfettikreise ausstanzen und benutzt dafür einen handelsüblichen Locher und ein dünnes, genügend großes, rechteckiges Blatt Papier. Erlaubt ist auch noch, das Papier beliebig oft auf die Hälfte zu falten.
Wie oft muss man den Locher mindestens betätigen?

Lösung:

Wir wollen durch geeignete Hintereinanderausführung von Lochungen und Faltungen genau 2010 Konfettikreise ausstanzen. Wenn wir dabei so selten wie möglich lochen wollen, werden wir keine zwei Lochvorgänge hintereinander anwenden, da dies genauso viele Kreise liefert wie ein einziger Lochvorgang nach weiterer Faltung.
Wenn man den Locher auf das n-mal gefaltete Blatt anwendet, erhält man genau 2^{n+1} Konfettikreise. (Wenn man nur zulässt, jeweils nur eine der beiden Lochstanzen zu benutzen, erhält man nur 2^n Kreise. Das ist aber egal: Hauptsache ist, dass man eine Zweierpotenz erhält.)
Die Anzahl der nötigen Stanzvorgänge ergibt sich also als Anzahl der Einsen in der Binärdarstellung der Zahl 2010.
Wegen $2010_{10} = 11111011010_2$ muss man mindestens 8-mal stanzen. Aus der obigen Beschreibung des Lochens ist aber auch sofort zu sehen, dass 8-mal ausreicht.

Bemerkung: In der Praxis hat diese Aufgabe noch einen kleinen Haken: Recht glaubwürdig wird von vielen Seiten behauptet, dass sich ein handelsübliches Blatt DIN-A4-Papier nur 7-mal falten lässt. – Ihr könnt ja noch ausrechnen, wie oft dann zu lochen ist.

Aufgabe 2

Die Klasse 7d trifft nach den Ferien zum ersten Mal wieder mit ihrem Klassenlehrer zusammen. Jede Schülerin und jeder Schüler begrüßt den Lehrer mit Handschlag. Genauso tun es die Mädchen untereinander und die Jungen untereinander. Zwischen den Jungen und den Mädchen hingegen wird nur freundlich genickt. Anschließend stellen sich die Schülerinnen und Schüler in Dreierreihen auf.
Insgesamt kam es 123-mal zum Händeschütteln. Wie viele Schülerinnen und Schüler sind in der Klasse insgesamt?

Lösung:

Wir bezeichnen mit m die Anzahl der Jungen und mit w die Anzahl der Mädchen in der Klasse.

Die Anzahl der Handschläge mit dem Lehrer ist dann $m + w$ und die der Handschläge innerhalb der Gruppen $m(m-1)/2$ bzw. $w(w-1)/2$. Insgesamt ergeben sich also $m(m+1)/2 + w(w+1)/2$ Handschläge.

Für Anzahlen zwischen 1 und 15 nehmen die beiden Summanden jeweils folgende Werte an:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\frac{x(x+1)}{2}$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120

Als mögliche Kombinationen $m + w$, bei denen in Summe 123 Handschläge gemacht werden, ergeben sich somit nur $2 + 15$ und $9 + 12$.
Da $m+w$ außerdem durch 3 teilbar sein muss, kommt nur die zweite Möglichkeit in Frage, d. h. es gibt in der Klasse entweder 9 Jungen und 12 Mädchen oder umgekehrt, insgesamt also 21 Schülerinnen und Schüler.

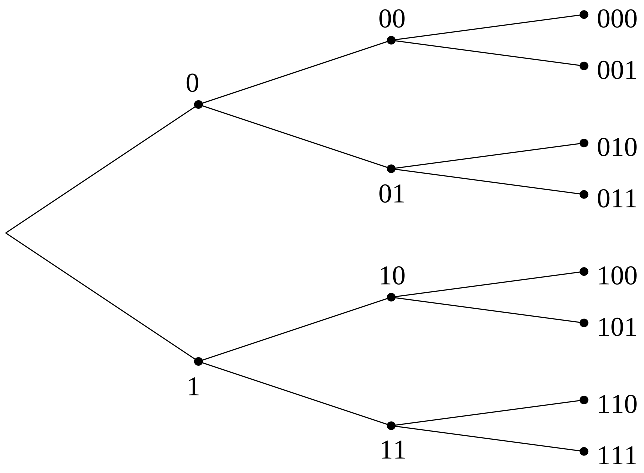
Aufgabe 3

Auf der bisher nicht entdeckten Inselgruppe „Binearen“ gibt es kein Alphabet von A bis Z, stattdessen wird mit den Ziffern 0 und 1 geschrieben. Außerdem gibt es keine Leerzeichen. Nun wollen wir eine Übersetzung („Codierung“) unseres bekannten Alphabets (26 Buchstaben) in die Binearensprache finden, und zwar so, dass man Texte, die dann aus Nullen und Einsen bestehen, ohne Trennzeichen lesen kann. Wir wollen dazu die Telefonnummerneigenschaft verwenden, dass keine Nummer Anfang einer weiteren Nummer ist.

- Aus wie vielen Ziffern besteht der Buchstabe mit der längsten Codierung mindestens?
- Da die Buchstaben E, R, N, S, T und L sehr häufig vorkommen, sollen diese sechs Buchstaben so codiert werden, dass die Summe der Längen ihrer Codierungen minimal ist. Aus wie vielen Ziffern besteht nun der Buchstabe mit der längsten Codierung mindestens?

Lösung:

Wir betrachten zur Lösung des Problems den sogenannten Binärbaum:
Ein Graph, in dem ausgehend von einem Startknoten sich jeder Knoten zu genau zwei weiteren Knoten verzweigt. Jedem Knotenpunkt werden dabei induktiv Zahlen im Binärsystem zugeordnet: Die beiden Knoten der ersten Generation tragen die Zahlen „0“ und „1“ und bei jeder Verzweigung nach links wird eine „0“ an die bestehende Zahl hinten angehängt, bei einer Verzweigung nach rechts eine „1“. Alle 2^n Knoten der n-ten Generation tragen also Zahlen der Länge n im Binärsystem, wenn man führende Nullen mitzählt. Diese Zahlen entsprechen den Zahlen 0 bis $2^n - 1$ im Dezimalsystem.



Eine mögliche Codierung unseres Alphabets besteht nun darin, einigen Knoten einer einzigen Generation die 26 Buchstaben zuzuordnen und sie dann durch die entsprechenden Zahlen im Binärsystem zu ersetzen.
In vielen Fällen wird es jedoch gewünscht sein, nicht nur Codewörter gleicher Länge zu verwenden, sondern die 26 Buchstaben Knoten in verschiedenen Generationen zuzuordnen. Hierbei kommt die gewünschte Telefonnummerneigenschaft ins Spiel, dass kein Codewort Anfang eines anderen Codeworts sein soll. Im Binärbaum bedeutet dies aber gerade, dass in jedem Pfad von der ersten zur letzten Generation höchstens ein Buchstabe zugeordnet sein darf. Anders ausgedrückt: Sobald einem Knoten ein Buchstabe zugeordnet wurde, können alle weiteren Verzweigungen von diesem Knoten aus dem Baum gelöscht werden. Daher kann ein Baum mit n Generationen maximal 2^n Symbole mit der geforderten Telefonnummerneigenschaft codieren.

Betrachten wir nun die konkreten Fragen:

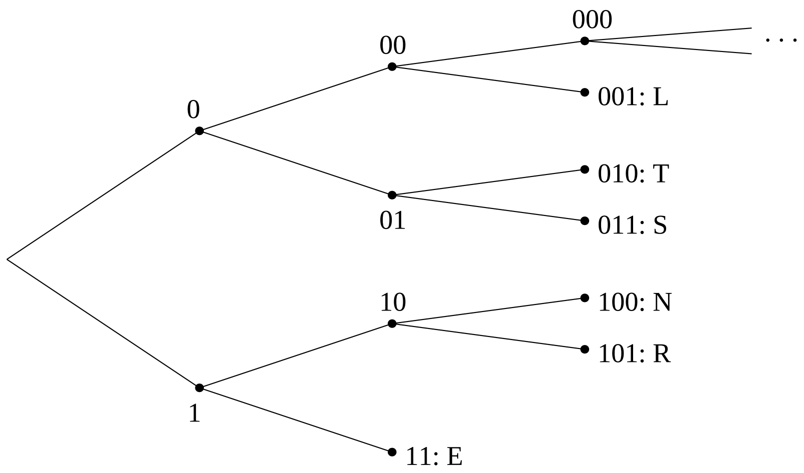
Da $2^4 = 16 < 26 \leq 32 = 2^5$ gilt, benötigt man für einige Codewörter also mindestens fünf Ziffern.
Codiert man alle 26 Buchstaben mit Wörtern der Länge 5, so hat man in der letzten Generation noch sechs freie Plätze. Daher könnte man zum Beispiel sechs Buchstaben mit jeweils vier Ziffern und 20 Buchstaben mit fünf Ziffern codieren, um freie Plätze am Ende des Baumes zu beseitigen.

Zur Beantwortung der zweiten Frage stellen wir folgende Vorüberlegung an: Angenommen, es gäbe eine optimale Konfiguration, bei der die sechs besonderen Buchstaben Codewörter aus mehr als zwei aufeinanderfolgenden Generationen bekommen hätten. Dann könnte man eines der kürzesten Codewörter um eine Ziffer verlängern und die Verlängerung dieses Wortes um die andere Ziffer für einen Buchstaben verwenden, der eines der längsten Codewörter hatte. Das Codewort für den ersteren Buchstaben verlängert sich so um eine Ziffer, das für den letzteren Buchstaben verkürzt sich um mindestens eine Ziffer, die Summe der Längen kann also zumindest nicht größer werden. Echt kleiner wird sie, wenn die Längendifferenz vorher größer als zwei war. Somit kann es keine optimale Konfiguration geben, bei der es Worte mit einem Längenunterschied von mehr als zwei gibt, und um nur eine der möglichen optimalen Konfigurationen zu finden, reicht es aus, nur solche Konfigurationen zu betrachten, bei denen die Worte aus zwei aufeinanderfolgenden Generationen stammen.

Da es sich hier um sechs besondere Buchstaben handelt, brauchen wir dafür einen Baum mit mindestens drei Generationen. Dieser reicht auch tatsächlich aus, denn wir brauchen ja in ihm nur noch einen weiteren Pfad, über den man die restlichen 20 Buchstaben in einem anzufügenden Baum erreichen können soll. Setzen wir zwei Buchstaben in Generation 2 des Baumes, so gibt es nur noch vier Knoten in Generation 3; damit wäre kein Platz mehr für die anderen 20 Buchstaben. Mit einem Buchstaben in Generation 2 und fünf Buchstaben in Generation 3 klappt es: Den letzten freien Platz in Generation 3 kann man als 0-te Generation eines neuen Baumes auffassen, mit dem die 20 verbleibenden Buchstaben codiert werden sollen. Analog zum ersten Teil benötigt man wegen $2^4 < 20 \leq 2^5$ hierzu mindestens fünf Generationen.

Also hat der längste Buchstabe in diesem Fall mindestens $3 + 5 = 8$ Ziffern.

Beispiel:



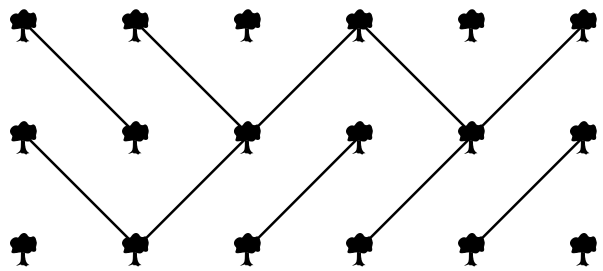
Bemerkung: Die gezeigte Lösung, die sechs häufigen Buchstaben mit Codewörtern zu versehen, ist tatsächlich nicht die einzige mit minimaler Länge: Man kann auch zwei Buchstaben in Generation 2 legen, drei in Generation 3 und einen in Generation 4. Die Summe der Längen ist wie oben 17. Der einzige noch verbleibende Pfad in Generation 4 ist dann der Startpunkt für den Baum für die restlichen 20 Buchstaben, deren Länge sich damit komplett um eine Ziffer vergrößert hat. Dies zeigt gleichzeitig, dass die Abschätzung in der Vorüberlegung nicht schärfer formuliert werden kann, da es auch eine optimale Konfiguration für die sechs Buchstaben gibt, bei der Längenunterschiede von 2 bei den Codewörtern auftreten.

Zusatz: Und hier noch die Decodierung des angegebenen Textes:

> Und neun ist eins
> und zehn ist keins,
> das ist das Hexeneinmaleins. *Goethe, Faust I*

Aufgabe 4

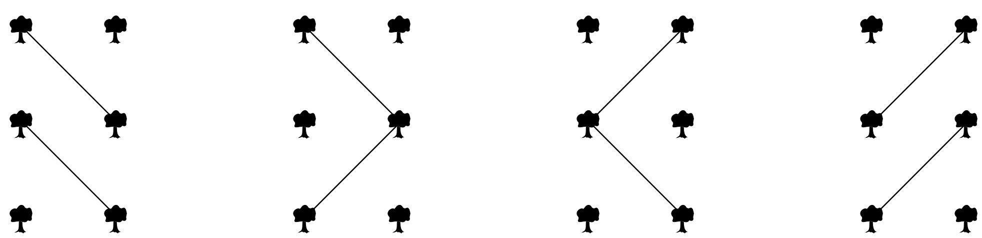
Der Zirkelwald besteht aus drei parallelen Baumreihen mit jeweils $n+1$ Bäumen. Diese sind jeweils in einem Abstand von 10 m gepflanzt. Auch die Baumreihen haben einen Abstand von jeweils 10 m.



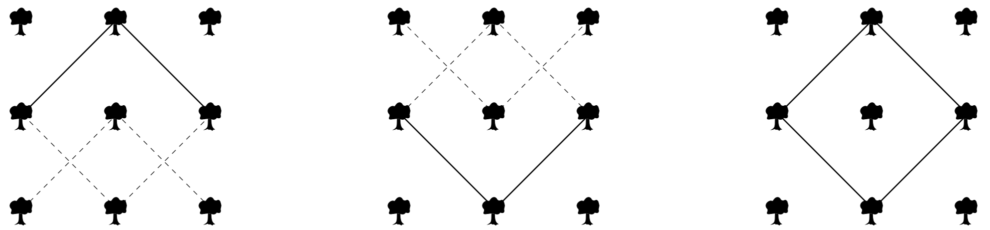
In jedem der (10 m × 10 m)-Baum-Quadrate sind diagonal zwischen den Bäumen Seile gespannt. Die Richtungen der Diagonalen sind jedoch zufällig gewählt.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit gibt es einen durchgehenden Seilpfad von der linken Seite zur rechten?

Lösung:

In einem Zirkelwald mit $3 \cdot (n+1)$ Bäumen gibt es $2n$ gespannte Seile. Da es nur drei Baumreihen gibt und die Seile alle diagonal gespannt sind, muss jeder zweite Baum bei einem Seilweg vom linken Ende zum rechten ein Baum in der mittleren Baumreihe sein. Daraus folgt nebenbei auch, dass es niemals hilfreich ist, sich wieder einen Baum nach links zu hangeln.
Es bezeichne Z_n einen Zirkelwald mit $3(n+1)$ Bäumen und also $2n$ Seilen. In ihm gibt es offenbar $2^{2n} = 4^n$ Möglichkeiten, die Seile anzuordnen. Mit M_n sei die Anzahl der Möglichkeiten bezeichnet, die Seile so anzuordnen, dass es möglich ist, von links aus über einen Seilpfad zum mittleren Baum auf der rechten Seite zu gelangen. (Die Anzahl möglicher Wege, einen der beiden anderen Bäume auf der rechten Seite zu erreichen, zählen wir erst später.) Es ist offensichtlich $M_0 = 1$ (man braucht in einem Z_0 gar kein Seil – das sieht vielleicht komisch aus, hilft aber beim weiteren Rechnen und ist formal korrekt) und fast genauso offensichtlich ist $M_1 = 3$: Von den 4 Möglichkeiten, einen Z_1 mit Seilen zu versehen, führt genau eine nicht zum rechten mittleren Baum.



Nun bestimmen wir M_{n+2} aus M_n (mit $n \geq 0$): Dazu müssen wir nur bestimmen, wie viele Möglichkeiten es gibt, die 4 Seile, die bei einem Z_{n+2} im Vergleich zu einem Z_n neu hinzukommen, so zu spannen, dass man in der Mitte startend zwei „Spalten“ weiterkommt. Man sieht:



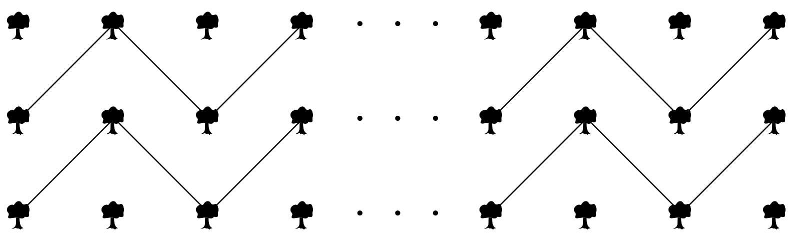
Es gibt 4 Möglichkeiten, bei denen man obenrum vorankommt, ebenso 4, bei denen man unten einen Weg hat. Doppelt gezählt ist dabei genau die rechte Variante; also gibt es 7 Möglichkeiten, womit

$$M_{n+2} = 7 \cdot M_n$$

gilt. Zusammen mit den Anfangsbedingungen $M_0 = 1$ bzw. $M_1 = 3$ ergibt sich

$$\begin{aligned} M_{2k} &= 7^k && \text{und} \\ M_{2k+1} &= 3 \cdot 7^k && \text{für } k \geq 0. \end{aligned}$$

Damit lassen sich die Möglichkeiten, in einem Z_n *irgendwohin* zur rechten Seite zu kommen, nun auch bestimmen: Um nach rechts zur Mitte zu kommen, gibt es M_n Möglichkeiten, und um nach rechts zum oberen oder unteren Baum zu kommen, gibt es $3 \cdot M_{n-1}$ Möglichkeiten, denn genau eine der 4 Möglichkeiten, die beiden rechten Seile zu hängen, führt nicht von dem vorletzten mittigen Baum aus weiter.
Insgesamt haben wir dabei genau 2 Möglichkeiten jeweils doppelt gezählt, nämlich dass man rechts sowohl am mittleren Baum als auch an einem seitlichen Baum ankommen kann: Da in jedem durchgehenden Seilpfad jeder zweite Baum ein mittlerer ist, berühren sich diese beiden Pfade nie und müssen somit auf der ganzen Strecke parallel verlaufen, hier ein Beispiel:



Die Wahrscheinlichkeit W_n, dass man in einem Wald Z_n von links nach rechts über einen Seilpfad durchkommt, ist also:

$$W_0 = 1$$

$$\begin{aligned} W_{2k+1} &= \frac{3 \cdot 7^k + 3 \cdot 7^k - 2}{4^{2k+1}} = \frac{6 \cdot 7^k - 2}{4^{2k+1}} \\ &= \frac{6}{\sqrt{7}} \cdot \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^{2k+1} - \frac{2}{4^{2k+1}} \\ &\approx 2{,}268 \cdot (0{,}661)^{2k+1} - \frac{2}{4^{2k+1}} \qquad \text{für } k \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{2k} &= \frac{7^k + 3 \cdot 3 \cdot 7^{k-1} - 2}{4^{2k}} = \frac{16 \cdot 7^{k-1} - 2}{16^k} \\ &= \frac{16}{7} \cdot \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^{2k} - \frac{2}{4^{2k}} \\ &\approx 2{,}286 \cdot (0{,}661)^{2k} - \frac{2}{4^{2k}} \qquad \text{für } k > 0 \end{aligned}$$

An der numerischen Darstellung erkennt man, dass die Wahrscheinlichkeit mit wachsender Waldgröße nicht ganz gleichmäßig abnimmt, sondern immer zu einem Wald Z_n mit ungerader Länge n hin ein wenig stärker abfällt als zu einem Z_n mit geradem n.