Beispiellösungen zu Blatt 86

Aufgabe 1

Ein gleichseitiges Dreieck wird in 25 kleine gleichseitige Dreiecke zerlegt, und auf die Felder werden insgesamt 25 Figuren gestellt. Diese sollen nun auf die Felder eines quadratischen 5×5-Feldes so gestellt werden, dass ehemalige „Nachbarn“ wieder „Nachbarn“ sind. Geht das? (Wir bezeichnen dabei die Figuren als „Nachbarn“, die auf Feldern mit gemeinsamer Kante stehen.)

Lösung:

Nein, dies ist nicht möglich. Zur Begründung verwenden wir ein Färbungsargument: Wir färben die 25 Dreiecke so in den Farben Schwarz und Weiß, dass keine zwei benachbarte Dreiecke dieselbe Farbe haben (dabei werden Dreiecke als benachbart bezeichnet, wenn sie eine gemeinsame Kante haben). Man erkennt schnell, dass man dann 15 Dreiecke in der einen Farbe (sagen wir Schwarz) und 10 Dreiecke in der anderen Farbe (also Weiß) färben muss.

Beim Übergang zum quadratischen 5×5-Feld überträgt sich die Färbung natürlich, indem jede Figur die Farbe seines Feldes „mitnimmt“.
Wäre es möglich, die 25 Figuren so zu stellen wie verlangt, dann könnten auf dem quadratischen Feld keine zwei benachbarten Felder die gleiche Farbe tragen. Denn selbst wenn die beiden daraufgestellten Figuren im Dreieck nicht direkt benachbart waren, so waren sie im Dreieck über eine Kette von Nachbarschaftsbeziehungen verbunden. Eine solche Kette muss auf dem quadratischen Feld offensichtlich eine ungerade Länge haben, daher müssen die Figuren auf unterschiedlich gefärbten Feldern stehen.
Damit ergibt sich für das quadratische Feld eine schachbrettartige Färbung. In ihr gibt es jedoch von einer Farbe 12 und von der anderen Farbe 13 Felder – im Widerspruch zu den Anzahlen, die wir für den Dreiecksfall oben festgestellt haben.

Aufgabe 2

Für welche positive ganzzahlige n ist $8^n + n$ ein Vielfaches von $2^n + n$?

Lösung:

Für $n \in \{1, 2, 4, 6\}$ ist $8^n + n$ ein Vielfaches von $2^n + n$, für alle anderen positiven ganzzahligen n hingegen nicht.

Zuerst führen wir eine Art Division mit Rest von $8^n + n$ durch $2^n + n$ durch (dafür können wir uns 2^n als Variable einer Polynomdivision vorstellen). Diese ergibt

$$8^n + n = 2^{3n} + n = (2^n + n)(2^{2n} - 2^n n + n^2) - (n^3 - n)\,,$$

woraus wir die Äquivalenz

$$2^n + n \mid 8^n + n \iff 2^n + n \mid n^3 - n$$

erhalten. Diese zweite Teilbarkeitsfrage lässt sich leichter beantworten. Für $n \geq 10$ ist $2^n + n > n^3 - n$, wie wir unten beweisen werden, und somit kann die größere Zahl $2^n + n$ kein Teiler von $n^3 - n \neq 0$ und wegen der obigen Äquivalenz damit auch nicht von $8^n + n$ sein.
Für die restlichen Werte $n < 10$ rechnen wir die beiden Terme aus:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$2^n + n$	3	6	11	20	37	70	135	264	521
$n^3 - n$	0	6	24	60	120	210	336	504	720

Für $n < 10$ ist, wie behauptet, $2^n + n$ genau für $n \in \{1, 2, 4, 6\}$ ein Teiler von $n^3 - n$ und damit auch von $8^n + n$.

Behauptung: Für alle ganzzahligen $n \geq 10$ gilt $2^n > n^3$.

Beweis: Für $n \geq 4$ gilt

$$\begin{aligned} n^3 &= n^2(3 + (n-3)) = 3n^2 + (n-3) \cdot n \cdot n \\ &\geq 3n^2 + 1 \cdot 4 \cdot n && \text{(da } n \geq 4\text{)} \\ &= 3n^2 + 3n + n > 3n^2 + 3n + 1\,. && (1) \end{aligned}$$

Um die Behauptung zu beweisen, nutzen wir vollständige Induktion nach n für $n \geq 10$.

Den Induktionsanfang berechnen wir für $n = 10$; in der Tat ist $2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3$.

Als Induktionsvoraussetzung (Ind.-Vor.) sei für ein n bereits $2^n > n^3$ bewiesen, dann gilt für $n + 1$:

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n^3 = n^3 + n^3 && \text{(nach Ind.-Vor.)} \\ &> n^3 + 3n^2 + 3n + 1 && \text{(nach Gleichung (1))} \\ &= (n+1)^3\,. \end{aligned}$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt daher, dass $2^n > n^3$ für alle ganzzahligen $n \geq 10$ gilt.

Offenbar ist dann aber auch die benötigte Ungleichung $2^n + n > n^3 - n$ für alle ganzzahligen $n \geq 10$ wahr.

Aufgabe 3

Auf wie viele verschiedene Arten kann man 2^{2010} als Summe von vier Quadratzahlen darstellen? (Dabei ist natürlich auch $0 = 0^2$ eine Quadratzahl.)

Lösung:

Zunächst halten wir fest, dass Quadrate ungerader Zahlen immer Rest 1 bei Division durch 8 lassen, während Quadrate gerader Zahlen immer Rest 0 oder 4 haben.
Angenommen, wir haben nun eine Darstellung $2^{2010} = a^2+b^2+c^2+d^2$, bei der mindestens eine der Zahlen a, b, c, d ungerade ist. Dann lässt die rechte Seite obiger Gleichung einen Rest ungleich 0 bei Division durch 8 – im Widerspruch dazu, dass 2^{2010} durch $8 = 2^3$ teilbar ist. Also war die Annahme falsch und alle vier Zahlen a, b, c, d sind gerade. Wir können also jeweils einen Faktor 2 ausklammern und erhalten

$$\begin{aligned} & 2^{2010} = (2a_1)^2 + (2b_1)^2 + (2c_1)^2 + (2d_1)^2 \\ \iff\ & 2^{2008} = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 \end{aligned}$$

mit ganzen Zahlen a_1, b_1, c_1, d_1. Obiges Argument können wir nun erneut auf die untere Gleichung anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} & 2^{2008} = (2a_2)^2 + (2b_2)^2 + (2c_2)^2 + (2d_2)^2 \\ \iff\ & 2^{2006} = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2. \end{aligned}$$

Dies wiederholen wir so lange, bis auf der linken Seite der Gleichung eine Zweierpotenz steht, die nicht mehr durch 8 teilbar ist. Nach insgesamt 1004 Durchläufen erhalten wir schließlich $2^2 = a_{1004}^2 + b_{1004}^2 + c_{1004}^2 + d_{1004}^2$.
Für diese Gleichung kann man die möglichen Lösungen leicht ersehen: Bis auf Vertauschung der vier Variablen gibt es genau die beiden Lösungen

$$\begin{aligned} & a_{1004} = 2, \quad b_{1004} = c_{1004} = d_{1004} = 0 \text{ und} \\ & a_{1004} = b_{1004} = c_{1004} = d_{1004} = 1. \end{aligned}$$

Wegen $a = 2a_1 = 4a_2 = \ldots = 2^{1004}a_{1004}$ (und analog für b, c und d) gibt es für die ursprüngliche Gleichung auch nur die beiden Lösungen

$$\begin{aligned} & a = 2^{1004} \cdot 2 = 2^{1005}, \quad b = c = d = 0 \text{ und} \\ & a = b = c = d = 2^{1004} \cdot 1 = 2^{1004}. \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Beim „1. Göttinger Mathespielfest“ am 8. Mai dieses Jahres sind die 16 Ländermannschaften der Bundesrunde der Mathematik-Olympiade an 8 Stationen im 30-Minuten-Takt gegeneinander angetreten. An jeder Station konnten sich nur zwei Mannschaften gleichzeitig aufhalten, d. h. jede Mannschaft musste nach einem vorgegebenen Laufplan von Station zu Station laufen.

Dabei ist ein Laufplan eine Anordnung der 8 Stationsnummern im Uhrzeigersinn in einem Kreis. Jede Mannschaft bekommt für ihren Laufplan dann noch eine der Stationen als Startpunkt zugeordnet.
Ist es möglich, die 16 Ländermannschaften beim Stadtfest mit nur zwei verschiedenen Laufplänen auszustatten und dabei gleichzeitig zu erreichen, dass keine zwei Mannschaften mehr als einmal aufeinandertreffen?

Lösung:

Nein, es ist nicht möglich, mit nur zwei Laufplänen ein mehrfaches Aufeinandertreffen zweier Mannschaften zu verhindern.

Beweis:
Wir können annehmen, indem wir ggf. die Bezeichnungen tauschen, dass Mannschaft 1 die Stationen 1 bis 8 in dieser Reihenfolge durchläuft und dass Mannschaft 2 bei Station 2 startet, bis Station 8 weitergeht und bei Station 1 endet, dass Mannschaft 3 bei Station 3 startet usw.
Aus praktischen Gründen nummerieren wir die Zeitpunkte des 30-Minuten-Taktes, in dem an den Stationen gestartet wird, von 0 bis 7 durch.
Die Frage ist nun, ob es für Mannschaft 9 einen Laufplan für die acht Stationen gibt, bei dem sie gegen jede der Mannschaften 1 bis 8 genau einmal antritt – ein Aufeinandertreffen mit den Mannschaften 10 bis 16 ist bereits ausgeschlossen, da nach der gewählten Nummerierung die Mannschaften 1 bis 8 die Spielpartner sein müssen. Wir nehmen an, es gäbe einen solchen Laufplan für Mannschaft 9. In ihrem Laufplan wäre Mannschaft 9 dann zum Zeitpunkt i an einer Station s_i.
Mit welcher Mannschaft sie an einer Station zusammentrifft, ergibt sich aus dem Wert $s_i - i$ modulo 8, denn die Differenz $s_i - i$ ist modulo 8 für jede der ersten acht Mannschaften konstant gleich ihrer Nummer.
Das bedeutet, dass

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{7}(s_i - i) &= 1 + 2 + \ldots + 8 = 36 \\ &\equiv 4 \mod 8\end{aligned}$$

wäre. Jedoch durchläuft s_i die Zahlen von 1 bis 8 in irgendeiner Reihenfolge; daher ist

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{7}(s_i - i) &= 1 + 2 + \ldots + 8 - (0 + 1 + \ldots + 7) = 8 \\ &\equiv 0 \mod 8\end{aligned}$$

Das ergibt einen Widerspruch, weswegen unsere Annahme falsch sein muss.