Mathematischer Korrespondenzzirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Beispiellösungen zu Blatt 87

Aufgabe 1

Wandertag! Felix ist etwas hinter Sebastian zurückgeblieben, holt nun aber auf. Zum Zeitpunkt t_0 merkt er sich die Position P_0 von Sebastian und zählt die Schritte, die er bis dorthin braucht. Das sind 60 Stück. Bei P_0 angekommen, merkt Felix sich erneut die dann aktuelle Position P_1 von Sebastian; bis zu ihr braucht er 50 Schritte.
Wie viele Schritte braucht Felix, vom Zeitpunkt t_0 an gerechnet, um Sebastian einzuholen?

Lösung:

Wir gehen im Folgenden davon aus, dass Felix und Sebastian die gleiche, konstante Schrittlänge haben.
In der Zeit, die Felix von seiner Startposition S_0 bis zu Sebastians 60 Schritte entfernter Startposition P_0 benötigt hat, hat Sebastian nur 50 Schritte geschafft, d. h. Felix läuft $60/50 = 6/5$-mal so schnell wie Sebastian. Insbesondere wird er ihn daher in endlicher Zeit eingeholt haben.
Nun gibt es verschiedene Möglichkeiten, fortzufahren.

Variante 1:
Zu dem Zeitpunkt, zu dem sich die beiden treffen, wird Felix also genau 60 Schritte mehr zurückgelegt haben als Sebastian. Seien s_S bzw. s_F die Anzahlen der Schritte, die Sebastian bzw. Felix dann gemacht haben, und seien v_S bzw. v_F ihre Geschwindigkeiten (gemessen in Schritten pro Zeiteinheit). Sei t die Anzahl der Zeiteinheiten, nach denen sie sich treffen. Unter Verwendung der Formel „Weg = Geschwindigkeit mal Zeit“ erhalten wir:

$$\begin{aligned} & s_\mathrm{F} = s_\mathrm{S} + 60 \\ \iff & v_\mathrm{F} t = v_\mathrm{S} t + 60 \\ \iff & \frac{6}{5} v_\mathrm{S} t = v_\mathrm{S} t + 60 \\ \iff & \frac{1}{5} v_\mathrm{S} t = 60 \\ \iff & s_\mathrm{S} = v_\mathrm{S} t = 300 \end{aligned}$$

Also braucht Felix genau $s_\mathrm{F} = s_\mathrm{S} + 60 = 360$ Schritte, um Sebastian einzuholen.

Variante 2:
In dieser Lösungsvariante verwenden wir die Formel für die sogenannte unendliche geometrische Reihe, welche besagt, dass die Summe über alle nichtnegativ-ganzzahligen Potenzen einer Zahl p zwischen 0 und 1 gleich dem

Kehrwert von $1-p$ ist. Per Formel ausgedrückt heißt das:

$$1 + p + p^2 + p^3 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} p^i = \frac{1}{1-p}\,.$$

Die Beschreibung in der Aufgabenstellung fortsetzend definieren wir zusätzlich Positionen P_i, $i \geq 2$, an denen sich Sebastian jeweils befindet, wenn Felix die Position P_{i-1} erreicht hat. Nun kann man die Anzahlen der Schritte aufsummieren, die zwischen allen diesen Positionen liegen:
Bis P_0 sind es nach Voraussetzung 60 Schritte. Felix läuft 6/5-mal so schnell wie Sebastian – also läuft umgekehrt Sebastian nur 5/6-mal so schnell wie Felix. Daher schafft er in der Zeit, in der Felix das Intervall $[P_{i-1}, P_i]$ abgeht, nur $5/6 \cdot (P_i - P_{i-1})$ Schritte, d. h. die Intervalle verkürzen sich immer um den Faktor 5/6. Nun kommt die unendliche geometrische Reihe ins Spiel. Die Gesamtzahl von Felix' Schritten beträgt

$$\begin{aligned} &60 + \frac{5}{6}60 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 60 + \left(\frac{5}{6}\right)^3 60 + \ldots \\ &= 60\left(1 + \left(\frac{5}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \ldots\right) \\ &= 60\frac{1}{1-\frac{5}{6}} = 60 \cdot 6 = 360. \end{aligned}$$

In dieser Darstellungsweise des Problems muss man zwar unendlich viele Zahlen aufsummieren, da der Faktor 5/6 allerdings kleiner ist als 1, konvergiert diese Summe auch wirklich gegen eine feste Zahl.

Eine approximative Lösung erhält man auch ohne Verwendung der Formel für die geometrische Reihe, indem man einfach genügend viele einzelne Summanden addiert. Wenn p nahe bei 1 ist, ist es jedoch schwierig, hinreichend genau abzuschätzen, wann der Fehler klein genug ist. Im vorliegenden Fall muss man 37 Zahlen aufaddieren, damit der Fehler kleiner als einen halben Schritt wird. Felix ist dann nur noch knapp einen Zwölftelschritt hinter Sebastian.

Aufgabe 2

Jemand multipliziert $(2+\sqrt{3})^{2010}$ aus. Dabei erhält er eine Zahl der Form $a + b \cdot \sqrt{3}$ mit ganzzahligen a und b. Zeige: a und b sind teilerfremd.

Lösung:

Variante 1:
Genauso wie beim Ausmultiplizieren von $(2+\sqrt{3})^{2010}$ erhält man beim Ausmultiplizieren von $(2-\sqrt{3})^{2010}$ eine Zahl der Form $c + d \cdot \sqrt{3}$ mit ganzzahligen c und d. Außerdem gilt für das Produkt der beiden Potenzen $(2+\sqrt{3})^{2010} \cdot (2-\sqrt{3})^{2010} = ((2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}))^{2010} = 1^{2010} = 1$. Also ist auch $1 = (a+b\cdot\sqrt{3})(c+d\cdot\sqrt{3}) = ac+3bd+(ad+bc)\sqrt{3}$. Da $\sqrt{3}$ eine irrationale Zahl

ist, müssen $ad+bc=0$ und $ac+3bd=1$ gelten. Wäre nun $g=\text{ggT}(a,b)\neq 1$, so wäre $ac+3bd=g\cdot(\tilde{a}c+3\tilde{b}d)$ mit einem ganzzahligen Teil $\tilde{a}c+3\tilde{b}d$ und könnte somit nicht gleich 1 sein. Also war die Annahme $\text{ggT}(a,b)\neq 1$ falsch. Übrigens ist $(2-\sqrt{3})^{2010}=a-b\sqrt{3}$, und diese Darstellung ist eindeutig, worin die Irrationalität von $\sqrt{3}$ eingeht.

Variante 2:
Hier verwenden wir ein Induktionsargument und die Tatsache, dass für ganze Zahlen a und b mit $a\neq b$ und $a,b\neq 0$ gilt, dass $\text{ggT}(a,b)=\text{ggT}(a,b-a)$ ist. Induktionsanfang: Für $n=1$ erfüllt $(2+\sqrt{3})^n$ offenbar die Eigenschaft $\text{ggT}(a,b)=1$, da $b=1$ gilt. Angenommen, diese Eigenschaft sei bereits für alle Zahlen bis zu einer beliebigen natürlichen Zahl n gezeigt. Dann gilt

$$\begin{aligned}(2+\sqrt{3})^{n+1}&=(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n\\&=(2+\sqrt{3})(a+b\sqrt{3})\qquad\text{mit ggT}(a,b)\text{=}1\\&=(2a+3b)+(a+2b)\sqrt{3}\,.\end{aligned}$$

Nun erhält man

$$\begin{aligned}\text{ggT}(2a+3b,a+2b)&=\text{ggT}((2a+3b)-(a+2b),a+2b)\\&=\text{ggT}(a+b,a+2b)\\&=\text{ggT}(a+b,(a+2b)-(a+b))\\&=\text{ggT}(a+b,b)=\text{ggT}(a,b)=1\,,\end{aligned}$$

d. h. $(2+\sqrt{3})^{n+1}=\tilde{a}+\tilde{b}\sqrt{3}$ mit $\text{ggT}(\tilde{a},\tilde{b})=1$. Also gilt die Eigenschaft auch für $n+1$ und somit für alle natürlichen Zahlen.

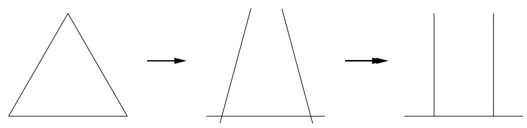
Aufgabe 3

Eine Verallgemeinerung der ersten Aufgabe von Blatt 86:
Eine zweidimensionale Ebene werde regelmäßig mit gleichseitigen Dreiecken gepflastert. Auf die Felder werden Figuren gestellt.
Eine weitere Ebene werde regelmäßig mit Quadraten gepflastert. Ist es jetzt möglich (immerhin funktioniert das Färbeargument vom vorigen Blatt nicht mehr), die Figuren von der Dreiecksebene so auf die Quadratebene umzustellen, dass ehemalige „Nachbarn“ wieder „Nachbarn“ sind?

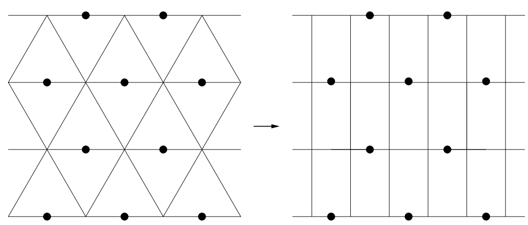
Lösung:

Ja, es ist möglich, die Figuren so auf die quadratisch gepflasterte Ebene zu stellen, dass alle Nachbarschaftsbeziehungen erhalten bleiben. Natürlich entstehen dabei aber zusätzliche Nachbarschaften.
Wir geben ein Verfahren an, aus der dreieckig gepflasterten Ebene eine quadratisch gepflasterte zu erzeugen:
Zunächst drehen wir die Ausgangsebene so, dass alle Dreiecke mit der Spitze genau nach oben oder nach unten zeigen. Die zur Spitze gehörenden Dreiecksseiten nennen wir Schenkel, die dritte Seite Grundseite. Nun drehen wir alle Schenkel um 30° um ihren Seitenmittelpunkt, und zwar immer in die so

gewählte Richtung, dass sie anschließend senkrecht auf der Grundseite stehen. Gleichzeitig verkürzen wir die Schenkel dabei so, dass ihre Länge der Höhe der ursprünglichen Dreiecke gleicht.



Dies erzeugt ein Rechteckschema, bei dem alle bisherigen Nachbarschaftsbeziehungen offensichtlich erhalten geblieben sind. Zusätzlich wurden Nachbarschaften zwischen Dreiecken eingeführt, die mit ihren Spitzen aufeinander standen. (Die Punkte in der Skizze stehen für waagerechte Nachbarschaftsbeziehungen, die bereits in der Dreieckspflasterung vorhanden waren.)



Nun muss man das Muster nur noch um einen geeigneten Faktor in der Waagerechten strecken und man erhält eine quadratisch gepflasterte Ebene wie gefordert.

Bemerkung: Diese Lösung ist nicht eindeutig. Zum einen erhält man durch eine andere Wahl der zu drehenden Seiten weitere Lösungen, zum anderen kann man das wie beschrieben erhaltene Quadratmuster modifizieren, indem man es entlang einer diagonalen Zick-Zack-Linie aufschneidet, die keinen waagerechten Kantenabschnitt mit Punkt enthält, und die eine Hälfte dann um eine Quadrateinheit (in die richtige Richtung) diagonal verschiebt. Dies ist möglich, da nur jede zweite waagerechte Kante im Quadratmuster einer Nachbarschaftsbeziehung in der Dreieckspflasterung entspricht.

Aufgabe 4

Gegeben sei eine Folge reeller Zahlen mit 4 Startwerten a_1, a_2, a_3 und a_4, deren weitere Folgenglieder rekursiv durch

$$a_{n+4} = \frac{a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}}{4}$$

für $n \geq 1$ definiert sind.
Es darf angenommen werden, dass die Folge *konvergiert*, das heißt etwas anschaulich ausgedrückt, dass die Folgenglieder einem *Grenzwert* im Ganzen gesehen immer näher kommen. (Für eine genaue, streng mathematisch brauchbare Definition verweisen wir bei Interesse auf die Literatur, falls sie noch nicht aus der Oberstufe bekannt ist; für die Aufgabe sollte die anschauliche Beschreibung reichen.)

Man kann sich klarmachen, dass sich der Grenzwert g als Linearkombination

$$g = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4$$

darstellen lässt.
Aufgabe: Bestimme $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und λ_4.

Für das Ferienblatt erweitern wir diese Aufgabe zu einer **Experimentieraufgabe** – mit einer ganz einfachen, offenen Aufgabenstellung:
Versuche, die Aufgabenstellung sinnvoll zu verallgemeinern und sie dann zu lösen. Der Fantasie sind dabei keine Grenzen gesetzt!

Lösung:

Zunächst zur konkret gestellten Aufgabe:
Eine Folge mit den Startwerten 0, 0, 0, 1 ergibt als nächsten Wert $\frac{1}{4}$. Damit hat die Folge mit den Startwerten 0, 0, 1, $\frac{1}{4}$ denselben Grenzwert wie die erstgenannte Folge. Da die Koeffizienten λ_i unabhängig von den Startwerten sind, ergibt sich, dass $\lambda_4 \cdot 1 = \lambda_3 \cdot 1 + \lambda_4 \cdot \frac{1}{4}$, also

$$\lambda_3 = \frac{3}{4}\lambda_4 \tag{1}$$

ist.
Wenn man mit den Startwerten 0, 0, 1, 0 startet, ergibt sich als nächster Wert ebenso $\frac{1}{4}$. Damit hat die Folge mit den Startwerten 0, 1, 0, $\frac{1}{4}$ denselben Grenzwert wie die Folge, die mit 0, 0, 1, 0 beginnt. Es ergibt sich $\lambda_3 \cdot 1 = \lambda_2 \cdot 1 + \lambda_4 \cdot \frac{1}{4}$, also

$$\lambda_2 = \lambda_3 - \frac{1}{4}\lambda_4,$$

mit (1) also

$$\lambda_2 = \frac{2}{4}\lambda_4\,. \tag{2}$$

Auf gleiche Weise ergibt sich $\lambda_2 \cdot 1 = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_4 \cdot \frac{1}{4}$, also

$$\lambda_1 = \lambda_2 - \frac{1}{4}\lambda_4$$

und mit (2) daher

$$\lambda_1 = \frac{1}{4}\lambda_4\,. \tag{3}$$

Ein Start mit 1, 0, 0, 0 führt zum Ergebnis, dass der Start mit 0, 0, 0, $\frac{1}{4}$ denselben Grenzwert liefert, und dies ergibt – sozusagen als Probe – unmittelbar $\lambda_1 = \frac{1}{4}\lambda_4$, was (3) bestätigt.

Da die Folge, die mit 1, 1, 1, 1 startet, offensichtlich konstant bleibt, müssen sich die λ_i zu 1 summieren. Daher gilt

$$\lambda_1 = \frac{1}{10}\,, \qquad \lambda_2 = \frac{2}{10}\,, \qquad \lambda_3 = \frac{3}{10}\,, \qquad \lambda_4 = \frac{4}{10}\,.$$

Verallgemeinerungen. **I.** Es liegt nahe, rekursiv definierte Folgen $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ zu betrachten, bei denen nicht nur das arithmetische Mittel der vorigen vier Folgenglieder gebildet wird, sondern das von k vorigen Gliedern. Wiederum werde Konvergenz vorausgesetzt, ebenso die Erkenntnis, dass sich der Grenzwert als Linearkombination

$$g = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k$$

darstellen lässt.
Auf die gleiche Weise wie oben – Ausführen eines Rekursionsschrittes für die Anfangswerte 0, …, 0, 1, 0, …, 0 und Verwenden, dass der sich aus den ersten k Gliedern ergebende Grenzwert derselbe sein muss wie der sich aus den Gliedern 2 bis $k+1$ ergebende – erhält man für $1 \le i \le k-1$ die Beziehung

$$\lambda_i = \lambda_{i+1} - \frac{1}{k}\lambda_k\,.$$

Damit verhalten sich $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ wie $1 : 2 : 3 : \ldots : k$. Da außerdem die Startwerte 1, 1, …, 1 offensichtlich eine konstante Folge liefern, müssen sich die Koeffizienten λ_i zu 1 summieren. Wegen $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$ ergibt sich somit

$$\lambda_i = \frac{2\cdot i}{k(k+1)}\,.$$

II. Als Nächstes kann man zum Beispiel rekursiv definierte Folgen $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ betrachten, bei denen in der Rekursion verschieden große reelle Koeffizienten vorkommen. Wir betrachten Rekursionen, die über

$$a_k = \sum_{j=1}^{k} \gamma_j a_{k-j}$$

definiert sind, wobei $\gamma_j > 0$ gelte.
Das Verfahren von oben zur Bestimmung der Koeffizienten λ_i für die Linearkombination des Grenzwertes – so er denn existiert – kann man im Prinzip vollständig übernehmen. Es wirkt sich nun nur aus, dass die γ_j nicht mehr gleich groß sind. Man erhält für $1 \le i \le k-1$ die Beziehung

$$\lambda_i = \lambda_{i+1} - \gamma_{k-i}\lambda_k\,.$$

Insbesondere ist $\lambda_1 = (1-\sum_{\ell=1}^{k-1}\gamma_\ell)\lambda_k$. Ein Start der Folge mit den Werten 1, 0, …, 0 ergibt unter der Annahme von Konvergenz die Beziehung $\lambda_1 = \gamma_k\lambda_k$. Um keinen Widerspruch zu erhalten, muss also für Konvergenz notwendig entweder $\lambda_k = 0$ sein (und damit wären alle $\lambda_i = 0$) oder es muss

$$\sum_{\ell=1}^{k} \gamma_\ell = 1$$

sein. Dies entspricht der Beobachtung, dass, wenn sich ein Grenzwert bestimmen lässt, der im Allgemeinen ungleich null ist, eine Folge mit konstanten Anfangswerten auch konstant bleiben muss.
Wenn $\sum_{\ell=1}^{k} \gamma_\ell = 1$ ist, gilt für die Darstellung des Grenzwerts als $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i$ damit

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \frac{1 - \sum_{\ell=i+1}^{k} \gamma_{k+1-\ell}}{k - \sum_{\ell=2}^{k} (\ell-1) \cdot \gamma_{k+1-\ell}} \\ &= \frac{\sum_{j=k-i+1}^{k} \gamma_j}{\sum_{\ell=1}^{k} \ell \cdot \gamma_\ell} \,. \end{aligned}$$

III. Nun wollen wir uns einige Gedanken über die Konvergenz machen, da wir eben schon gesehen haben, dass eine notwendige Bedingung für allgemeine Konvergenz ist, dass sich die γ_j zu 1 summieren.
Wenn $(0 \le) s := \sum_{i=1}^{k} \gamma_i < 1$ ist, konvergiert die Folge gegen null. Beweis: Wir betrachten die Folge, deren Anfangswerte sämtlich 1 sind. Die Glieder a_{k+1} bis a_{2k} sind dann sämtlich kleiner oder gleich s. Die nächsten k Folgenglieder sind kleiner gleich s^2, die nächsten k kleiner gleich s^3 usw. Da außerdem immer noch alle Glieder nichtnegativ sind, folgt, dass die Folge gegen null konvergiert.
Wenn wir mit der Folge starten, deren Anfangswerte sämtlich -1 sind, erhalten wir ebenso, dass diese Folge gegen null konvergiert, nur wachsen ihre Folgenglieder.
Allgemeiner: Wenn wir mit einem beliebigen anderen Wert anfangen, ändert sich das Verhalten nur um einen entsprechenden Faktor.
Von einer beliebigen Menge von Startwerten bestimmen wir deren Minimum m und deren Maximum M. Nun betrachten wir drei Folgen: Erstens $(a_i)_i$, zweitens die Folge $(b_i)_i$ mit den Startwerten $m, \ldots, m$ und die Folge $(c_i)_i$ mit den Startwerten $M, \ldots, M$. Es ist klar, dass immer $b_i \le a_i \le c_i$ gilt. Da nach dem eben Gesagten die beiden äußeren Folgen gegen null konvergieren, muss auch $(a_i)_i$ gegen null gehen.

Wenn hingegen $s > 1$ ist, konvergiert die Folge *im Allgemeinen* nicht mehr. Dies zeigt man auf ähnliche Weise: Wenn alle Anfangsglieder positiv sind, sei m deren Minimum. Die Glieder a_{k+1} bis a_{2k} sind dann sämtlich größer gleich $s \cdot m$, die nächsten k Glieder größer gleich $s^2 m$ usw. Also geht hier die Folge ins Unendliche. Jedoch kann es auch hier dennoch konvergente Folgen geben, wenn man die richtigen Anfangswerte wählt: Beispielsweise sei die Rekursion gegeben durch

$$a_{n+1} = 0{,}6 a_{n-1} + 0{,}7 a_n \,.$$

Dann liefern die Startwerte $a_1 = 2$ und $a_2 = -1$ die Folge $a_i = \frac{2}{2^{i-1}}$, die gegen null strebt.
Die Konvergenz für Rekursionsvorschriften, bei denen die Summe der Rekursionskoeffizienten eins ist, zeigt man mit ähnlichen Methoden wie eben; die Details ersparen wir uns hier aber.

IV. Einen kleinen Blick wollen wir noch auf den Fall werfen, dass in der Rekursionsvorschrift auch Nullkoeffizienten zugelassen sind. Solange der ggT der Indizes j, für die $\gamma_j \neq 0$ ist, gleich eins ist, ändert sich nichts an den bisher gemachten Aussagen zur Konvergenz, nur muss man in dem Fall, dass die Summe der γ_j eins ist, noch weiter am Beweis feilen. Zur Ermittlung der λ_i kann man, wenn $\gamma_1 = 0$ ist, die Rekursionsvorschrift erweitern zu einer längeren Rekursion, bei der dann das neue γ_1 nicht null ist.
Wenn die Koeffizienten j mit $\gamma_j \neq 0$ einen ggT$\{\gamma_i\} =: t$ ungleich null haben, setzt sich die Folge $(a_n)_n$ aus t Teilfolgen zusammen, die – abhängig von den Startwerten – verschiedene Grenzwerte haben können. Im allgemeinen Fall erhält man daher eine Folge, die gegen eine periodische Folge mit Periodenlänge t strebt.

Dies soll hier an Verallgemeinerungen der Aufgabenstellung reichen, auch wenn wir den Fall negativer γ_i noch völlig ausgelassen haben.