Mathematischer Korrespondenz-zirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Beispiellösungen zu Blatt 88

Aufgabe 1

Beim Applaus im Theater stehen am Ende sechs Schauspieler auf der Bühne nebeneinander, jeder immer an derselben Stelle. Sie treten dazu aber einzeln auf. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Reihenfolge des Auftretens, wenn vermieden werden soll, dass es zwischen den bereits aufgetretenen Schauspielern eine Lücke gibt?

Lösung:

Am raffiniertesten (vielen Dank für diesen Tipp an Einsender Horst W.!) betrachtet man das Problem rückwärts: Dann treten die Schauspieler nach und nach ab. Jedes Mal bis zur vorletzten Person kann dabei gewählt werden, ob es der Schauspieler am linken oder am rechten Ende der Reihe sein soll, der abtritt, und jede Wahlmöglichkeit erzeut offensichtlich eine andere Abtritts- (bzw. Auftritts-)Reihenfolge.
Daher gibt es $2^5 = 32$ Möglichkeiten für die Reihenfolge des Auftretens.

Aufgabe 2

Es gilt die hübsche Beziehung

$$88^2 = 7744.$$

Da drängt sich doch die Frage auf, ob es weitere Zahlen der Form $a \dots a$ mit $k \geq 2$ Ziffern gibt, deren Quadrat die Form $b \dots bc \dots c$ mit zwei Blöcken von k gleichen Ziffern hat.
Zeige, dass 88 die einzige Zahl im Dezimalsystem mit dieser Eigenschaft ist.
Zeige, dass es in jedem anderen Stellenwertsystem mit Basis größer oder gleich 5 mindestens eine Zahl mit dieser Eigenschaft gibt.

Lösung:

Sei angenommen, dass $a \dots a$ eine Zahl mit den gesuchten Eigenschaften ist. („…“ stehe immer für $k-2$ gleiche Ziffern.)
Dann gilt

$$\begin{aligned} & a \dots a^2 = b \dots bc \dots c \\ \Leftrightarrow \qquad & a \cdot a \dots a = b0 \dots 0 + c \qquad (1) \\ \Leftrightarrow \qquad & a \cdot a \dots a = b \cdot 9 \dots 9 + b + c \end{aligned}$$

Es folgt:

$$1 \dots 1 \text{ ist ein Teiler von } b + c.$$

Wegen $b + c < 111$ kann nur $k = 2$ gelten.

Die Gleichung (1) ist dann konkret

$$a^2 \cdot 10 + a^2 = a \cdot aa = b0c.$$

Damit kann a^2 nicht einstellig, sondern muss eine zweistellige Quadratzahl sein. Und die Ziffer Null auf der rechten Seite ergibt sich aus der Addition der beiden Ziffern von a^2, also hat a^2 die Quersumme 10. Leicht zu überprüfen ist, dass von 16, 25, 36, 49, 64 und 81 nur $64 = 8^2$ dies erfüllt.
Daher ist, wie es zu zeigen war, 88 die einzige Zahl im Dezimalsystem mit dieser Eigenschaft.

Im Stellenwertsystem zur Basis $b \geq 5$ quadrieren wir die Zahl $[(b-2)(b-2)]_b$:

$$\begin{aligned}
[(b-2)(b-2)]_b^2 &= ((b-2) \cdot b + (b-2))^2 \\
&= (b^2 - b - 2)^2 \\
&= b^4 - 2b^3 - 3b^2 + 4b + 4 \\
&= (b-3)b^3 + (b-3)b^2 + 4b + 4 \\
&= [(b-3)(b-3)44]_b
\end{aligned}$$

Wegen $b \geq 5$ sind $b-3$ und 4 tatsächlich Ziffern, also ist mit $[(b-2)(b-2)]_b$ eine Zahl mit der Eigenschaft gefunden.

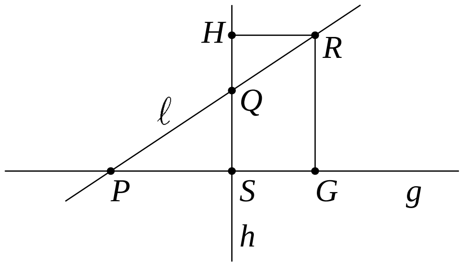
Bemerkungen. Für beliebige Stellenwertsysteme (also mit jeder Basis $b \geq 2$) kann der Beweis aus dem ersten Teil, dass Zahlen mit der beschriebenen Eigenschaft zweistellig sind, problemlos übertragen werden, indem 9 durch $b-1$ ersetzt wird.
Zu anderen Basen kann es jedoch mehr als eine solche Zahl geben. Die kleinste Basis, zu der es mehrere Zahlen gibt, ist 9: Es ist $[55]_9^2 = 50^2 = 2500 = [3377]_9$ und wie schon gezeigt $[77]_9^2 = [6644]_9$.
Wie man leicht von Hand prüfen kann, gibt es zu den Basen 2 bis 4 keine solche Zahlen.
Und schließlich: für die 88 ist nicht nur 10 eine passende Basis: $[88]_{22}^2 = [33(20)(20)]_{22}$.

Aufgabe 3

Gegeben seien zwei Geraden g und h, die senkrecht zueinander in der Ebene liegen. Eine weitere Gerade ℓ werde so in der Ebene bewegt, dass es zwei auf ihr fixierte Punkte P und Q so gibt, dass sich P auf g und Q auf h bewegt. Zeige, dass sich die übrigen Punkte von ℓ auf Ellipsenbahnen bewegen.

Lösung:

Es sei S der Schnittpunkt von g und h und R ein Punkt auf ℓ, der nicht mit P oder Q zusammenfällt. Zudem sei G der Fußpunkt des Lotes von R auf g und H der Fußpunkt des Lotes von R auf h. Nach Strahlensatz gilt dann:



$$\frac{|RG|}{|RP|} = \frac{|QS|}{|QP|}$$

und

$$\frac{|RH|}{|RQ|} = \frac{|PS|}{|PQ|}\,.$$

Nach Pythagoras gilt offensichtlich

$$|PS|^2 + |QS|^2 = |PQ|^2\,,$$

so dass sich durch Einsetzen

$$\frac{|RH|^2}{|RQ|^2} + \frac{|RG|^2}{|RP|^2} = 1$$

ergibt. Diese Gleichung besagt aber nichts anderes, als dass sich R auf einer Ellipse mit Mittpelpunkt S und Halbachsen der Längen $|RQ|$ auf g und $|RP|$ auf h bewegt.
Dass von dieser Ellipse auch jeder Punkt angenommen wird, ist aufgrund der Bewegungsmöglichkeiten von ℓ klar.

Aufgabe 4

Für welche Dreiecke mit den Seitenlängen a, b und c gibt es auch Dreiecke mit den Seitenlängen a^n, b^n und c^n für

a) $n = 2$

b) $n = 2, 3, 4, \ldots$?

Lösung:

Zu drei positiven reellen Zahlen x, y, z bezeichnen wir mit Δ_{xyz} das Dreieck mit den Seitenlängen x, y und z. Dabei gibt es genau dann ein solches Dreieck, wenn die Zahlen die Dreiecksungleichungen

$$x + y > z, \tag{2}$$
$$x + z > y, \tag{3}$$
$$y + z > x \tag{4}$$

erfüllen. Nimmt man ohne Einschränkung an, dass $x \leq y \leq z$ gilt, so sind (3) und (4) automatisch erfüllt und es beschreibt Bedingung (2) die Fälle, in denen x, y, z ein Dreieck bilden.
Da außerdem eine zentrische Streckung des Ausgangsdreiecks zu einer ebensolchen im Dreieck mit potenzierten Seitenlängen führt – sofern es denn existiert –, nehmen wir im Folgenden ohne Einschränkung an, dass $a \leq b \leq c = 1$ gilt.

Betrachten wir zunächst den Fall $n = 2$:
Hier ist $a^2 + b^2 > c^2 = 1$ zu erfüllen. Offenbar ist Gleichheit der beiden Terme genau dann gegeben, wenn das Dreieck Δ_{abc} rechtwinklig ist. Zu einem Dreieck mit einem stumpfen Winkel zwischen a und b gibt es immer ein rechtwinkliges Dreieck $\Delta_{\tilde{a}\tilde{b}c}$ mit $\tilde{a} > a$ und $\tilde{b} > b$. Daher gilt in diesem Fall $a^2 + b^2 < \tilde{a}^2 + \tilde{b}^2 = c^2 = 1$. Stumpf- und rechtwinklige Dreiecke haben die geforderte Eigenschaft also nicht.
Analog lässt sich für ein spitzwinkliges Dreieck Δ_{abc} aber immer ein rechtwinkliges Dreieck $\Delta_{\tilde{a}\tilde{b}c}$ finden mit $\tilde{a} < a$ und $\tilde{b} < b$ und also $a^2+b^2 > \tilde{a}^2+\tilde{b}^2 = c^2 = 1$. Also erfüllen genau alle spitzwinkligen Dreiecke die Eigenschaft für $n = 2$.

Im zweiten Teil der Aufgabe sind alle Dreiecke Δ_{abc} gesucht, für die *gleichzeitig* $a^n + b^n > c^n = 1^n = 1$ für alle natürlichen Zahlen n erfüllt ist.
Wir verwenden im Folgenden, dass für jede beliebige Zahl x mit $0 < x < 1$ die Potenz x^n gegen 0 strebt, wenn n groß wird.
Wären nun a und b echt kleiner als $c = 1$, so könnten wir n so groß wählen, dass sowohl a^n als auch b^n kleiner als $1/2$ und somit $a^n + b^n \leq 1$ wären. Also ist – wegen unserer Wahl $a \leq b$ – eine notwendige Bedingung durch $a \leq b = 1$ gegeben. Da dann offenbar $a^n + b^n = a^n + 1 > 1$ erfüllt ist, ist die notwendige Bedingung gleichzeitig hinreichend und die Antwort lautet:
Genau die gleichschenkligen Dreiecke, bei denen die Basis nicht länger als jeder der beiden Schenkel ist, erfüllen die geforderte Eigenschaft.