Mathematischer Korrespondenz-zirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Beispiellösungen zu Blatt 89

Aufgabe 1 Für welche ganzen Zahlen n ist

$$\frac{3n^2-3n-6}{n^2-8n-9}$$

eine ganze Zahl?

Lösung:

Es ist

$$z := \frac{3n^2-3n-6}{n^2-8n-9} = \frac{(n+1)(3n-6)}{(n+1)(n-9)}$$

und für $n \neq -1$

$$= \frac{3n-6}{n-9} = \frac{3(n-9)+21}{n-9} = 3 + \frac{21}{n-9}\,.$$

Eine ganze Zahl erhalten wir genau dann, wenn $n-9$ ein Teiler von 21 ist, d. h. genau für

$$(n-9) \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 7, \pm 21\}\,.$$

Da die beiden Nullstellen des Nenners von z, nämlich $n=-1$ und $n=9$, nicht in der Lösungsmenge enthalten sind, ist z also genau dann eine ganze Zahl, wenn gilt

$$n \in \{9 \pm 1, 9 \pm 3, 9 \pm 7, 9 \pm 21\} = \{-12, 2, 6, 8, 10, 12, 16, 30\}\,.$$

Aufgabe 2

Wie viele Zahlen kann eine Teilmenge von $\{1, 2, 3, \ldots, 2010\}$ maximal enthalten, wenn in ihr keine Zahl doppelt so groß wie eine andere sein soll?

Lösung:

Zentrale Idee dieser Lösung ist es, die natürlichen Zahlen in gewisse Teilmengen aufzuteilen, und zwar derart, dass alle Zahlen einer solchen Teilmenge dieselbe Zweierpotenz in ihrer Primfaktorzerlegung haben.
Für eine beliebige Menge M von natürlichen Zahlen bezeichnen wir mit M_{2^i}, $i = 0, 1, 2, \ldots$, diejenigen Zahlen aus M, in deren Primfaktorzerlegung die 2 in der i-ten Potenz vorkommt. M_{2^0} ist zum Beispiel die Menge aller ungeraden Zahlen in M.
Mit dieser Notation gilt offenbar $M = M_{2^0} \cup M_{2^1} \cup M_{2^2} \cup \ldots$ und die Mengen M_{2^i} sind paarweise disjunkt.

Nun wenden wir diese Idee auf die Menge $M = \{1, 2, \ldots, 2010\}$ an und konstruieren eine maximal große Teilmenge T, die die Forderung in der Aufgabenstellung erfüllt:
Zunächst stellen wir fest, dass T eventuell Elemente $2k$ aus M_{2^1} enthalten könnte. Dann gehören die dazu gehörenden Elemente $k \in M_{2^0}$ nicht zu T. Man kann aber statt $2k$ genauso gut auch k in T aufnehmen, weil dabei keine weitere Verdopplungsbeziehung zu beachten ist.
Wir können also mit der Menge M_{2^0} starten und hiervon ausgehend T konstruieren. Aus M_{2^1} können wir kein Element hinzufügen, da dies genau die Doppelten der ersten Hälfte der Elemente aus M_{2^0} sind. Da M_{2^2} nur Vierfache von Elementen aus M_{2^0} enthält, können wir diese Teilmenge vollständig hinzufügen. Mit demselben Argument wie oben kann man begründen, dass es auch keine bessere Alternative gibt. (Elemente aus M_{2^3} können ohne Verlust vollständig durch Elemente aus M_{2^2} ersetzt werden.)
Dieses Argument setzen wir fort: M_{2^3} müssen wir wieder „auslassen“, M_{2^4} fügen wir hinzu usw. Wegen $2^{11} = 2048 > 2010$ ist die letzte Teilmenge M_{2^i}, die wir hinzufügen, die Menge $M_{2^{10}} = \{1024\}$.

Nun müssen wir nur noch zählen, wie viele Zahlen in $M_{2^0} \cup M_{2^2} \cup M_{2^4} \cup M_{2^6} \cup M_{2^8} \cup M_{2^{10}}$ liegen: In M gibt es 1005 ungerade Zahlen, also ist $|M_{2^0}| = 1005$; es gibt $502 - 251$ durch 4 teilbare Zahlen, die nicht durch 8 teilbar sind, also ist $|M_{2^2}| = 251$; es gibt $125 - 62$ durch 16 teilbare Zahlen, die nicht durch 32 teilbar sind, also ist $|M_{2^4}| = 63$; und weiter erhalten wir $|M_{2^6}| = 31 - 15 = 16$, $|M_{2^8}| = 7 - 3 = 4$ sowie $|M_{2^{10}}| = 1$.
Somit hat eine maximal große Teilmenge genau $1005 + 251 + 63 + 16 + 4 + 1 = 1340$ Elemente.

Bemerkungen. Manche Einsender haben sinngemäß behauptet, man „*müsse* die Menge M_{2^0} zu T nehmen“. Das ist falsch oder falsch formuliert, denn man kann zum Beispiel 999 durch 1998 ersetzen.
Ganz allgemein braucht man für die Bildung einer maximalen Menge T eigentlich nur diejenigen Teilmengen von M zu betrachten, die aus genau einer ungeraden Zahl u und allen ihren 2^i-fachen bestehen. Sie seien *Klassen* genannt. Das Bilden einer maximalen Auswahl gemäß der Bedingung aus einer solchen Klasse geschieht völlig unabhängig von allen anderen Wahlen. Hat eine Klasse eine ungerade Anzahl an Elementen, so hat man nur eine Möglichkeit einer maximalen Auswahl, nämlich die Zahlen u, $4u$, $16u$, … Hat sie eine gerade Anzahl an Elementen, gibt es mehrere Möglichkeiten.
Sozusagen die maximal gegenteilige Auswahl der oben angegebenen – das soll heißen, dass man bei Klassen mit gerader Elementanzahl die größten und nicht die kleinsten Elemente auswählt – erhält man, wenn man die Menge

$$\{1\} \cup \{4, 5, 6, 7\} \cup \{16, 17, \ldots, 31\} \cup \{63, 64, \ldots, 125\} \cup$$

$$\{252, 253, \ldots, 502\} \cup \{1006, 1007, \ldots, 2010\}$$

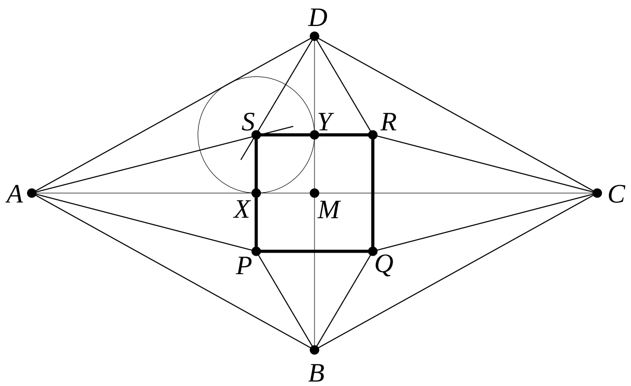
auswählt.

Aufgabe 3

In einer Raute $ABCD$ sind die Winkelvierteilenden der Innenwinkel eingezeichnet. Der Schnittpunkt der Winkelvierteilenden, die mit der Seite AB bei A bzw. bei B den Viertelwinkel einschließen, sei P. Die entsprechenden Schnittpunkte bezüglich der anderen Seiten seien (gegen den Uhrzeigersinn) bezeichnet mit Q, R und S.
Welche Gestalt hat das Viereck $PQRS$?

Lösung:

Das Viereck $PQRS$ ist ein Quadrat.



Da in einer Raute $ABCD$ alle vier Seiten gleich lang sind, stehen die beiden Diagonalen AC und BD senkrecht aufeinander und sie sind Symmetrieachsen (d. h. Spiegelachsen) der Raute. Folglich liegen die beiden Winkelvierteilenden AP und AS spiegelbildlich bezüglich der Diagonalen AC zueinander, ebenso die beiden Winkelvierteilenden BP und DS. Daher tun das auch die beiden Schnittpunkte P und S, die Gerade PS steht also senkrecht auf AC. Analog folgt, dass auch RQ senkrecht auf AC steht, und PQ und RS stehen senkrecht auf der anderen Diagonalen BD. Das Viereck $PQRS$ ist also ein Rechteck.

Wir betrachten die beiden Vierecksseiten SP und SR: Es seien X bzw. Y die Schnittpunkte dieser beiden Seiten mit den beiden Rautendiagonalen AC bzw. BD. Außerdem sei M der Diagonalenschnittpunkt und somit der Mittelpunkt der Raute. Dann sind die beiden Winkelvierteilenden AS und DS zugleich Winkelhalbierende im Dreieck AMD. Ihr Schnittpunkt S ist also der Inkreismittelpunkt des Dreiecks AMD. Wegen der Orthogonalität von SX bzw. SY zu den jeweiligen Dreiecksseiten sind X und Y die Berührpunkte des Inkreises, sie haben somit denselben Abstand zu S.
Da die beiden Diagonalen nach wie vor Symmetrieachsen der gesamten Figur sind, folgt, dass die beiden Vierecksseiten $|SP| = 2|SX|$ und $|RS| = 2|SY|$ ebenfalls gleich lang sind, und es ergibt sich abschließend, dass das Rechteck $PQRS$ tatsächlich ein Quadrat ist.

Aufgabe 4

Die Zahl 89 hat eine interessante Eigenschaft, die sie mit der Fibonacci-Folge in Verbindung bringt, abgesehen davon, dass sie selbst eine Fibonacci-Zahl ist:
Sei (F_n) die Fibonacci-Folge mit $F_1 = 0$, $F_2 = 1$, und für $i \geq 3$ sei $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$.
Man summiere dann die Fibonacci-Zahlen in einer bestimmten Weise auf, und zwar immer um eine weitere Stelle versetzt hinter dem Komma, das heißt so:

$$\begin{array}{l}
S := 0, \\
\hphantom{S := 0,}0 \\
\hphantom{S := 0,0}1 \\
\hphantom{S := 0,00}1 \\
\hphantom{S := 0,000}2 \\
\hphantom{S := 0,0000}3 \\
\hphantom{S := 0,00000}5 \\
\hphantom{S := 0,000000}8 \\
\hphantom{S := 0,000000}13 \\
\hphantom{S := 0,0000000}21 \\
\hphantom{S := 0,00000000}34 \\
\hphantom{S := 0,000000000}55 \\
\hphantom{S := 0,0000000000}89 \\
\hphantom{S := 0,00000000000}\ldots,
\end{array}$$

$$\text{also } S = 0{,}0112359550\ldots$$

Dann gilt – behaupten wir –

$$S = \frac{1}{89}\,.$$

Zeige, dass das stimmt! (Tipp: Bilde die Summe $10S + S$.)
Kannst du dieses Prinzip verallgemeinern?

Lösung:

Nach Vorgabe ist

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} 10^{-i} F_i\,.$$

(Ein kleines Detail für Fortgeschrittene: Diese Summe konvergiert nach dem Quotientenkriterium, denn offensichtlich gilt $F_{i+1} \leq 2F_i$ und somit ist $\frac{10^{-(i+1)}F_{i+1}}{10^{-i}F_i} \leq \frac{2}{10} < 1$ für alle i. Wegen der Konvergenz sind die folgenden Umformungsschritte erlaubt.)
Nun formen wir um – man beachte, dass in der Rechnung mehrfach $F_1 = 0$ benutzt wird:

$$\begin{aligned}
10S + S &= \sum_{i=2}^{\infty} 10^{-i+1} F_i + \sum_{i=1}^{\infty} 10^{-i} F_i \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k} (F_{k+1} + F_k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k} F_{k+2}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} 10^{-j+2} F_j - F_2$$
$$= 100S - F_2\,.$$

Dies bedeutet

$$89S = F_2 \qquad \text{bzw.} \qquad S = \frac{1}{89}\,.$$

Eine Möglichkeit zur **Verallgemeinerung der Aufgabenstellung** ist die folgende: Sei $r \geq 1$ eine ganze Zahl, seien $a_0, \ldots, a_{r-1}$ ganze Zahlen mit $0 \leq a_i \leq 9$. Sei schließlich (G_n) eine Folge mit $G_1 = G_2 = \ldots = G_{r-1} = 0$ und $G_r \in \{1, \ldots, 9\}$, und für $i \geq 1$ sei

$$G_{i+r} = a_{r-1}G_{i+r-1} + a_{r-2}G_{i+r-2} + \ldots + a_0 G_i\,.$$

Was ist der Wert der Summe

$$S := \sum_{i=1}^{\infty} 10^{-i} G_i\,?$$

Wir formen wie oben um und nutzen wieder aus, dass die ersten Folgenglieder null sind:

$$\begin{aligned}
&a_{r-1} \cdot 10^{r-1} S + a_{r-2} \cdot 10^{r-2} S + \ldots + a_1 \cdot 10 S + a_0 S \\
&= a_{r-1} \sum_{i=r}^{\infty} 10^{-i+r-1} G_i + a_{r-2} \sum_{i=r-1}^{\infty} 10^{-i+r-2} G_i + \ldots + a_0 \sum_{i=1}^{\infty} 10^{-i} G_i \qquad (1) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k} (a_{r-1}G_{k+r-1} + a_{r-2}G_{k+r-2} + \ldots + a_0 G_k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k} G_{k+r} \\
&= \sum_{j=r+1}^{\infty} 10^{-j+r} G_j \\
&= \sum_{j=r}^{\infty} 10^{-j+r} G_j - G_r \\
&= 10^r \sum_{j=r}^{\infty} 10^{-j} G_j - G_r \\
&= 10^r S - G_r \qquad (2)
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$S = \frac{G_r}{10^r - a_{r-1} \cdot 10^{r-1} - a_{r-2} \cdot 10^{r-2} - \ldots - a_1 \cdot 10 - a_0}\,. \qquad (3)$$

Hinter dieser Formel verbirgt sich eine einfachere Beschreibung: Aus den Koeffizienten a_i für die Rekursion, die ja Ziffern sein sollen, setze man eine Zahl durch Hintereinanderschreiben der Koeffizienten zusammen:

$$K := [a_{r-1}a_{r-2}\dots a_1a_0]\,.$$

Dann ist

$$S = \frac{G_r}{10^r - K}\,.$$

Beispiele:
Aus der sehr einfachen Folge $G_i = 2^{i-1}$ (mit $r = 1$, $G_1 = 1$ und der Rekursion $G_{i+1} = 2G_i$) bildet man nach dem allgemeinen Prinzip der Aufgabenstellung

$$\begin{array}{l}
S = 0,\\
1\\
2\\
4\\
8\\
16\\
32\\
64\\
128\\
256\\
\dots,\\
\text{also } S = 0{,}124999\dots
\end{array}$$

Die gefundene Formel bestätigt: $S = \frac{1}{10-2} = \frac{1}{8}$.

Aus einer komplizierteren Rekursion, zum Beispiel mit $r = 3$, dazu $G_3 = 9$ und $G_{i+3} = G_{i+2} + G_{i+1} + 8G_i$, erhält man:

$$\begin{array}{l}
S = 0,\\
0\\
0\\
9\\
9\\
18\\
99\\
189\\
432\\
1413\\
3357\\
8226\\
22887\\
57969\\
146664\\
387729\\
\dots,\\
\text{also } S = 0{,}010204081\dots
\end{array}$$

Die Formel liefert $S = \frac{9}{1000-118} = \frac{9}{882} = \frac{1}{98}$.

Diesen Wert erhält man, wie man beim Draufschauen leicht glauben mag, auch mit $r = 2$, $G_2 = 1$ und der Rekursion $G_{i+2} = 2G_i$:

$$\begin{array}{l}
S = 0,\\
\hphantom{S = 0,}0\\
\hphantom{S = 0,0}1\\
\hphantom{S = 0,01}0\\
\hphantom{S = 0,010}2\\
\hphantom{S = 0,0102}0\\
\hphantom{S = 0,01020}4\\
\hphantom{S = 0,010204}0\\
\hphantom{S = 0,0102040}8\\
\hphantom{S = 0,01020408}0\\
\hphantom{S = 0,010204080}16\\
\hphantom{S = 0,01020408016}0\\
\hphantom{S = 0,01020408016}32\\
\hphantom{S = 0,01020408016}\ldots,\\
\text{also } S = 0{,}010204081632\ldots
\end{array}$$

Zur Bestätigung liefert die Formel $S = \frac{1}{100-02} = \frac{1}{98}$.

Weitere Verallgemeinerungen: Man kann natürlich auch die ersten Folgenglieder $G_1, G_2, \ldots, G_{r-1}$ mit nicht verschwindenden Startwerten belegen. Dies liefert an der Stelle (1) auf der rechten Seite der Gleichung die zusätzlichen Summanden

$$\begin{aligned}
&a_{r-1}\sum_{i=1}^{r-1} 10^{-i+r-1}G_i + a_{r-2}\sum_{i=1}^{r-2} 10^{-i+r-2}G_i + \ldots + a_1\sum_{i=1}^{1} 10^{-i+1}G_i\\
&= \sum_{k=1}^{r-1} a_k \sum_{i=1}^{k} 10^{-i+k}G_i\,.
\end{aligned}$$

Bei (2) kommen dann zusätzlich noch die Summanden

$$-10^r(10^{-1}G_1 + 10^{-2}G_2 + \ldots + 10^{-r+1}G_{r-1})$$

hinzu.

Bei der abschließenden Umformung bilden diese Summanden nach Vorzeichenwechsel zusammen mit G_r den Zähler des Ausdrucks für S (der Nenner bleibt wie in Formel (3)). Dieser ist also:

$$\begin{aligned}
&G_r + 10^r(10^{-1}G_1 + 10^{-2}G_2 + \ldots + 10^{-r+1}G_{r-1}) - \sum_{k=1}^{r-1} a_k \sum_{i=1}^{k} 10^{-i+k}G_i\\
&= 10^{r-1}G_1 + 10^{r-2}G_2 + \ldots + 10G_{r-1} + G_r - \sum_{i=1}^{r-1}\sum_{k=i}^{r-1} a_k 10^{-i+k}G_i\\
&= \sum_{i=1}^{r}\left(10^{r-i} - \sum_{k=i}^{r-1} a_k 10^{-i+k}\right)G_i\\
&= (10^{r-1} - [a_{r-1}a_{r-2}\ldots a_1])G_1 + (10^{r-2} - [a_{r-1}a_{r-2}\ldots a_2])G_2 +\\
&\qquad \ldots + (10 - a_{r-1})G_{r-1} + G_r\,,
\end{aligned}$$

so dass man insgesamt

$$S = \frac{(10^{r-1} - [a_{r-1}a_{r-2}\ldots a_1])G_1 + (10^{r-2} - [a_{r-1}a_{r-2}\ldots a_2])G_2 + \ldots}{10^r - [a_{r-1}a_{r-2}\ldots a_1 a_0]}$$

$$\underline{\ldots + (10 - a_{r-1})G_{r-1} + G_r}$$

erhält.

Außerdem kann man, wie unser Einsender Robin Fritsch hervorhob, das Prinzip problemlos auch auf andere Stellenwertsysteme ausdehnen. An keiner Stelle der Rechnungen wurde speziell benutzt, dass die Basis 10 ist; also ersetzen wir jede 10 durch eine neue Basis b und bekommen als Lösung:

$$S = \frac{(b^{r-1} - [a_{r-1}a_{r-2}\ldots a_1]_b)G_1 + (b^{r-2} - [a_{r-1}a_{r-2}\ldots a_2]_b)G_2 + \ldots}{b^r - [a_{r-1}a_{r-2}\ldots a_1 a_0]}$$

$$\underline{\ldots + (b - a_{r-1})G_{r-1} + G_r}\,.$$

Nimmt man die Basis $b = 8$ und wieder die Fibonacci-Folge, so erhält man

$$S = \frac{1}{[100]_8 - [11]_8} = \frac{1}{64 - 9} = \frac{1}{55}\,.$$

Dass 55 wie 89 eine Fibonacci-Zahl ist, scheint uns allerdings purer Zufall zu sein.