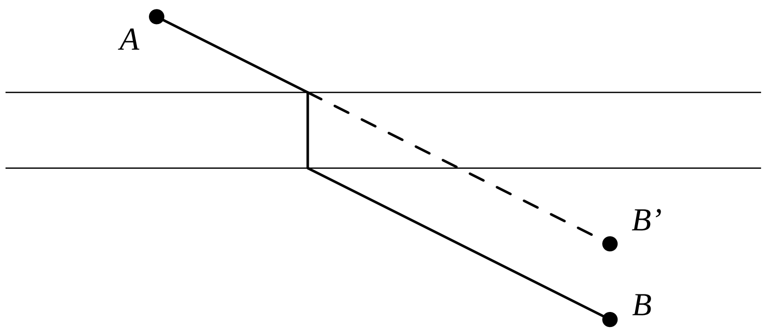
# Beispiellösungen zu Blatt 90

## Aufgabe 1

Die Werkstätten der beiden Weihnachtswichtel Anonymus und Beschenkibus liegen auf verschiedenen Seiten des Adventflusses im Weihnachtswichtelgeschenkewald. Über diesen 10 m breiten Fluss, der innerhalb des Waldes völlig geradlinig verläuft, soll senkrecht zur Flussrichtung eine Brücke so gebaut werden, dass die Wichtel auf kürzestem Weg von der einen Werkstatt über die Brücke zu der anderen Werkstatt gelangen können. Wo muss sie gebaut werden?

**Lösung:**

Wir bezeichnen die beiden Werkstätten mit $A$ und $B$, und ebenso die zugehörigen Seiten des Flusses. Da die Brücke senkrecht zur Flussrichtung gebaut werden soll, ist der Fußweg „über Wasser“ bereits auf 10 Meter festgelegt.
Verschieben wir in Gedanken nun die komplette Landschaft auf Seite $B$ senkrecht zur Flussrichtung in Richtung der Seite $A$, und zwar um genau 10 Meter, dann landet $B$ auf einem Punkt $B'$, der Fluss hat keine echte Breite mehr und die Frage nach dem kürzesten Weg von $A$ nach $B'$ ist schnell beantwortet: Er ist natürlich durch die Gerade durch $A$ und $B'$ gegeben.




In Gedanken markieren wir diesen Weg und schieben dann das Ufer $B$ wieder an seine Position zurück. Die Brücke muss offenbar genau dort gebaut werden, wo die nun auseinandergerissenen Wegteile auf den Fluss treffen.

## Aufgabe 2

Knecht Ruprecht soll bei seiner ersten Fuhre 50 Geschenke ausfahren. Er bekommt die Information, dass alle ein durch 10 Gramm teilbares Gewicht haben, alle verschieden viel wiegen und keines mehr als 990 g wiegt. Außerdem wiegen keine zwei Geschenke zusammen 990 g und keine zwei wiegen zusammen 1000 g. Wie viel wiegen die einzelnen Geschenke?

**Lösung:**

Da die Gewichte Vielfache von 10 sind, können wir alle Zahlen durch 10 teilen und Knecht Ruprechts Frage reduziert sich auf das Problem, 50 Zahlen zwischen 1 und 99 so zu finden, dass keine zwei Zahlen in Summe 99 oder 100 ergeben.
Zunächst stellen wir fest, dass die Vorschrift $100 - i$ die Menge der Zahlen 1 bis 99 eineindeutig auf sich selbst abbildet, d. h. für jede Zahl $j$ in $\{1, \ldots, 99\}$ gibt es genau eine Zahl $i$ aus selbiger Menge so, dass $j = 100 - i$ gilt. Einzig im Fall $j = 50$ stimmen $i$ und $j$ überein. Wenn man nun die Vorgabe betrachtet, dass keine zwei der 50 Zahlen in Summe 100 ergeben dürfen, so folgt, dass aus jeder der 50 Mengen

$$\{1, 99\}, \{2, 98\}, \ldots, \{48, 52\}, \{49, 51\}, \{50\}$$

genau eine Zahl als Geschenkgewicht vorkommen muss.
Nehmen wir nun an, dass eine Zahl $i$, die kleiner als 99 ist, vorkommt: Da auch keine zwei Zahlen in Summe 99 ergeben dürfen, ist $99 - i$ ausgeschlossen. Nach obiger Paarbildung muss dann aber $100 - (99 - i) = i + 1$ als Gewicht vorkommen. Im Fall $i = 49$ ergibt sich ein Widerspruch (da dann $99 - i = i + 1$ ist), andernfalls folgt durch Iteration dieses Arguments, dass alle Zahlen größer $i$ ebenfalls als Gewichte vorkommen müssen. Wäre $i$ nun kleiner als 49, so würde dies ebenfalls zu obigem Widerspruch führen.
Also kommen nur die Zahlen $\{50, 51, \ldots, 99\}$ in Frage, d. h. die Päckchen haben die Gewichte $500, 510, \ldots, 990$ Gramm.

**Aufgabe 3**

Auf des Oberwichtels Wanderstock der Länge 15 cm sollen die vier Kerzen einer (kurzen) Lichterkette so angebracht werden, dass der Stock in 5 Teile geteilt wird. Die fünf Teile sollen die Längen 1, 2, 3, 4 und 5 cm haben (nicht unbedingt in dieser Reihenfolge). Der Stock soll danach als „leuchtendes Lineal“ dienen, auf dem jede Länge von 1 bis 15 cm (ganzzahlig) als Abstand zweier Kerzen oder Enden vorkommt. Geht das oder muss man noch eine weitere Kerze anbringen?

**Lösung:**

Die Antwort lautet: Man muss noch mindestens eine weitere Kerze anbringen.

Um den Abstand 14 cm zu erhalten, muss offenbar das Stück der Länge 1 cm am Rand des Stockes liegen. Gleiches gilt für das Stück der Länge 2 cm, da man auch 13 cm messen können soll. Um 6 cm ablesen zu können, müssen außerdem entweder die beiden Stücke von 1 cm und 5 cm nebeneinanderliegen (Fall 1) oder die beiden Teile 2 cm und 4 cm (Fall 2). Die Länge 10 cm erhält man nur durch einen Dreierblock, der entweder aus den Stücken 1 cm, 4 cm, 5 cm oder 2 cm, 3 cm, 5 cm besteht – jeweils natürlich in beliebiger Reihenfolge.
In Fall 1 ist damit ist die Position der Kerzen bis auf Umkehrung der Reihenfolge eindeutig bestimmt und lautet 1 cm, 5 cm, 4 cm, 3 cm, 2 cm. Nun ist aber

zum Beispiel die Länge 11 cm nicht als Abstand zweier Kerzen oder Ränder vorhanden.
In Fall 2 ist bereits die Forderung für die Länge 10 cm nicht erfüllbar, denn es lässt sich keiner der beiden Dreierblöcke in dem bereits gegebenen Gerüst 1 cm, $x$ cm, $y$ cm, 4 cm, 2 cm unterbringen.
Es müssen also noch weitere Kerzen angebracht werden, um alle Längen zwischen 1 cm und 15 cm direkt ablesen zu können. Eine Möglichkeit, dies durch Hinzunahme von nur einer weiteren Kerze zu realisieren, ist die Folgende: Man ordne die 5 Kerzen so an, dass man von links nach rechts (oder umgekehrt) die Abstände 1 cm, 1 cm, 1 cm, 5 cm, 4 cm, 3 cm erhält.

*Bemerkung.* Eine eingesandte Lösung unseres Teilnehmers Horst hat uns darauf gebracht, dass man gar nicht zu fordern braucht, dass die 5 Teile des Stocks die Längen 1 bis 5 cm haben sollen. Denn da es genau $\binom{6}{2} = 15$ Möglichkeiten gibt, unter den zwei Endpunkten und vier Kerzen die zwei Endpunkte eines Abstandes auszuwählen, heißt das, dass kein Abstand doppelt vorkommen darf, wenn jeder Abstand mindestens einmal vorkommen soll. Da schon die Summe der kleinsten Abstände 1 bis 5 cm die Stocklänge von 15 cm ergibt, müssen dies die Längen der 5 Teile sein.
Man kann dann in dieser Art weiterargumentieren: Es gibt 4 Möglichkeiten, einen Abstand durch zwei Teile des Stockes darzustellen. Diese Abstände müssen also die Werte 6 bis 9 cm oder größer haben, ihre Summe ist also mindestens $(6 + 7 + 8 + 9)\,\text{cm} = 30\,\text{cm}$. Andererseits kommt jeder Teil des Stockes in höchstens zwei solchen Abständen vor, genauer gesagt werden zwei Teile nur in je einem solchen Abstand verwendet. Die Summe dieser vier Abstände ist also echt kleiner als $2 \cdot 15\,\text{cm} = 30\,\text{cm}$. Damit ergibt sich ein Widerspruch. Vier Kerzen reichen nicht.

## Aufgabe 4

Es ist Arbeitspause im Weihnachtswichtelgeschenkewald, und so spielen der Weihnachtsmann und das Christkind ein Spiel: Auf dem Tisch liegt ein Haufen Streichhölzer. Die Regeln sind: Es wird abwechselnd gezogen. Hat ein Spieler $k$ Hölzer genommen, darf der andere Spieler anschließend $k-1$ oder $k+1$ Hölzer ziehen. Gar kein Holz zu nehmen, ist allerdings nicht erlaubt. Es verliert, wer keinen Zug mehr ausführen kann. Der Startspieler darf sich aussuchen, ob er zu Beginn 1, 2, 3 oder 4 Hölzer nimmt. Der Weihnachtsmann lässt großzügig das Christkind anfangen.

a) Zeige, dass das Christkind immer gewinnen kann.

Schließlich wollen die beiden das Spiel ganz genau unter die Lupe nehmen:

b) Untersuche, bei welchen Anfangsbeständen an Hölzern (1 bis 100 Stück) welcher erste Zug (1, 2, 3 oder 4 Hölzer entfernen) bei optimalem Spiel zum Sieg führt!

**Lösung:** *Teil a)* Wenn das Christkind damit beginnt, ein Holz zu nehmen, muss der Weihnachtsmann in seinem Zug zwei Hölzer nehmen. Dann kann das Christkind wieder ein Holz nehmen usw. Dies macht es, bis es nur noch 1, 2 oder 3 Hölzer vorfindet. Bei 3 Hölzern kann es dann einfach alle 3 nehmen und hat gewonnen. Bei 1 Holz hat es natürlich auch gewonnen, wenn es das eine Holz entfernt. Und bei 2 Hölzern hat es auch gewonnen, wenn es 1 Holz entfernt, denn der Weihnachtsmann darf in seinem Zug nicht nur 1 Holz nehmen.
Die Strategie des Christkindes, um zu gewinnen, ist also, immer nur 1 Holz zu nehmen, es sei denn, dass es 3 Hölzer vorfindet, in welchem Fall es alle 3 Hölzer nimmt.

*Teil b)* Um das Spiel umfassend zu untersuchen, machen wir am besten eine Tabelle, in der wir eintragen, ob man einen Sieg erzwingen kann (+) oder nicht (−), wenn man $n$ Hölzer vorfindet und anschließend $k$ Hölzer entfernt. Das Ausfüllen der Tabelle ist durch die folgenden Gesetzmäßigkeiten bestimmt:

- Felder mit $n < k$ bekommen ein Minus – der Zug ist nicht ausführbar.
- Felder mit $n = k$ bekommen ein Plus. (Der Sieg ist offensichtlich.)
- Wenn für ein Feld $(n; k)$ mit $n > k$ eines der Felder $(n - k; k + 1)$ oder $(n - k; k - 1)$ ein Plus enthält (wenn $k = 1$ ist, wird nur das Feld $(n - k; k + 1)$ betrachtet), kann man mit dem Zug $(n; k)$ keinen Sieg erzwingen; daher bekommt das Feld ein Minus.
- Wenn umgekehrt für ein Feld $(n; k)$ mit $n > k$ beide Felder $(n-k; k+1)$ und $(n - k; k - 1)$ ein Minus enthalten – bzw. nur das Feld $(n - k; k + 1)$, wenn $k = 1$ ist –, dann kann man mit dem Zug $(n; k)$ einen Sieg erzwingen und das Feld wird mit einem Plus versehen.

Auf diese Weise kann man Zeile für Zeile ausfüllen. Für den Anfang der Tabelle benötigen wir teilweise noch Einträge in den Spalten $k = 5$ und $k = 6$. Wir füllen dabei nur die Felder aus, die nötig sind.

| $n \setminus k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | + | − | − | − | − | |
| 2 | + | + | − | − | − | − |
| 3 | − | − | + | − | | − |
| 4 | + | − | + | + | | |
| 5 | + | − | − | + | + | |
| 6 | + | − | + | + | | |
| 7 | + | − | − | − | + | |
| 8 | + | − | − | − | + | |
| 9 | + | − | − | − | − | |
| 10 | + | − | + | − | | |
| 11 | + | − | + | − | | − |
| 12 | + | − | + | − | | |
| 13 | + | − | + | + | | |
| 14 | + | − | + | − | | |
| 15 | + | − | + | − | | |
| 16 | + | − | − | − | + | |
| 17 | + | − | + | − | | |
| 18 | + | − | + | − | | |
| 19 | + | − | + | − | | |
| 20 | + | − | + | − | | |
| 21 | + | − | + | − | | |
| 22 | + | − | + | − | | |
| 23 | + | − | + | − | | |

Um den Rest der Tabelle auszufüllen, beweisen wir einen *Hilfssatz: Wenn in einer Spalte zum Wert $k_0$ irgendwo $2k_0+1$ Plus-Zeichen untereinanderstehen, dann stehen darunter in der gesamten Spalte nur noch Pluszeichen, und in den beiden benachbarten Spalten stehen darunter nur noch Minuszeichen.*
Beweis: Aus einem Plus an den Stellen $(n_0; k_0)$ bis $(n_0 + x; k_0)$ folgt, dass an den Stellen $(n_0+k_0-1; k_0-1)$ bis $(n_0+x+k_0-1; k_0-1)$ und $(n_0+k_0+1; k_0+1)$ bis $(n_0 + x + k_0 + 1; k_0 + 1)$ Minuszeichen stehen müssen. Da dann in den Zeilen $n_0 + k_0 + 1$ bis $n_0 + x + k_0 - 1$ zwei Minuszeichen um die $k_0$-te Spalte herum stehen, folgt daraus wiederum, dass an den Stellen $(n_0 + 2k_0 + 1; k_0)$ bis $(n_0 + x + 2k_0 - 1; k_0)$ Pluszeichen stehen müssen. Für $x \geq 2k_0$ fügt sich dieser Bereich unmittelbar an den ersten Bereich mit Pluszeichen an. Diese Argumentation setzt sich nun immer so fort. □

Aus der gezeigten Tabelle und aus dem Hilfssatz folgt: Zum Sieg führen bei optimalem Spiel beider Parteien genau folgende erste Spielzüge:

- Man entfernt 1 Holz, wenn nicht 3 Hölzer vor einem liegen.
- Man entfernt 2 Hölzer, wenn 2 Hölzer vor einem liegen.
- Man entfernt 3 Hölzer, wenn 3, 4, 6 oder mehr als 9, jedoch nicht 16 Hölzer vor einem liegen.

- Man entfernt 4 Hölzer, wenn 4, 5, 6 oder 13 Hölzer vor einem liegen.

*Bemerkung.* Weitet man die Betrachtung etwas aus, so entsteht schnell die Vermutung, dass bei hinreichend großem Starthaufen der Beginn mit einer ungeraden Anzahl zum Sieg führt und der Beginn mit einer geraden Zahl zur Niederlage. Das ist jedoch falsch: Eine Computerrechnung zeigt, dass es ab etwa $n = 11600$ immer zum Sieg führt, 56 oder 58 Hölzer zu nehmen. In den Spalten 1 bis 52 gibt es in jeder Spalte immer nur noch Plus- oder Minuszeichen, abwechselnd in der Spalte. In den Spalten 53 und 54 jedoch gibt es kein festes Zeichen ab einer bestimmen Zeile. Dieses Phänomen taucht später noch in weiteren Doppelspalten auf.