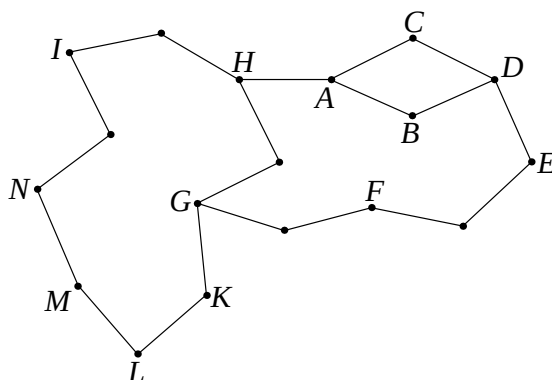


Beispiellösungen zu Blatt 92

Aufgabe 1

Betrachte den unten abgebildeten Graphen. Sämtliche Kanten zwischen zwei Ecken haben die Länge 1. Rainer hat (nicht unterscheidbare) Bindfäden der Länge 5. Wie viele Möglichkeiten hat er, vier Bindfäden so auf den Graphen zu legen, dass er vollständig abgedeckt wird?



Lösung:

Wir haben in der Skizze der Aufgabenstellung gleich einige Punkte mit Buchstaben markiert.

Im Punkt A muss mindestens ein Bindfaden anfangen. Wir machen eine Fallunterscheidung danach, wie dieser Bindfaden auf dem Graphen liegt.

Fall 1 Faden 1 beginnt in A und geht über B , D und E bis F .

Dann muss in D ein Faden 2 beginnen, der über C und H bis I oder G geht, und in F beginnt ein dritter Faden.

Fall 1.1 Faden 2 geht von D bis I .

Dann muss in H ein Faden 4 beginnen, denn von H bis F sind es nur 4 Streckenabschnitte, so dass Faden 3 nicht dort enden kann. Damit müssten aber die Fäden 3 und 4 beide von G in Richtung K weiterführen, und das geht nicht. Dieser Fall ist also unmöglich.

Fall 1.2 Faden 2 geht von D bis G .

Dann geht Faden 3 von F bis M . Es bleibt genau eine Möglichkeit für Faden 4, nämlich dass er von M über I bis H geht. Dieser Fall liefert daher genau eine Möglichkeit.

Der gesamte Fall 1 liefert also genau eine Möglichkeit.

Fall 2 Faden 1 beginnt in A und geht über C , D und E bis F .

Dieser Fall ist äquivalent zu Fall 1 – man vertausche dazu die Bezeichnungen B und C .

Daher ergibt sich hier ebenso genau eine Möglichkeit.

Fall 3 Faden 1 beginnt in A und geht über H und G bis F .

Dann sind im abgetrennten Bereich rechts (von A über D bis F) 7 Strecken. Diese kann man nicht wie gefordert abdecken.

Fall 4 Faden 1 beginnt in A und geht über H und G bis L .

Dann sind im abgetrennten Bereich rechts (von A über D bis G) 9 Strecken. Diese kann man nicht wie gefordert abdecken.

Fall 5 Faden 1 beginnt in A und geht über H und I bis N . Dann muss in H ein weiterer Faden beginnen. Er kann nicht bis M gehen, weil dann die Strecke von N nach M nicht abgedeckt werden kann. Genausowenig kann er aber von G aus in Richtung F weitergehen, weil dann der Abschnitt von G nach N nur eine Länge 4 hat und ebenfalls nicht abgedeckt werden kann.

Fall 6 Faden 1 beginnt in A und geht über B , D , C und A bis H .

Dann muss in D ein zweiter Faden beginnen, der bis G reicht.

Der jetzt noch nicht abgedeckte Bereich ist ein Kreis aus 10 Streckenabschnitten. Man hat genau 5 Möglichkeiten, diesen Kreis mit zwei Fäden abzudecken.

Fall 7 Faden 1 beginnt in A und geht über C , D , B und A bis H .

Dieser Fall ist zu Fall 6 äquivalent, indem man erneut die Bezeichnungen B und C vertauscht. Es gibt also ebenfalls 5 Möglichkeiten zur Abdeckung.

Insgesamt ergeben sich aus den Fällen 1, 2, 6 und 7 genau

12 Möglichkeiten,

den Graphen mit Bindfäden der Länge 5 abzudecken.

Aufgabe 2

Finde alle Lösungen der Gleichung

$$n! + 3 = m^k$$

mit positiven, ganzzahligen n , m und k und mit $k \geq 2$.

Lösung:

Es gibt genau drei Lösungen, nämlich für $n = 1, m = k = 2$, für $n = 3, m = 3, k = 2$ und für $n = 4, m = k = 3$.

Zuerst rechnen wir die linke Seite für kleine n aus:

$$1! + 3 = 1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$2! + 3 = 2 + 3 = 5$$

$$3! + 3 = 6 + 3 = 9 = 3^2$$

$$4! + 3 = 24 + 3 = 27 = 3^3$$

$$5! + 3 = 120 + 3 = 123 = 3 \cdot 41.$$

Hier sehen wir direkt, dass sich für $n \in \{1, 3, 4\}$ tatsächlich wie behauptet Lösungen ergeben. Außerdem lassen sich 5 als Primzahl und 123 als Produkt zweier verschiedener Primzahlen nicht als Potenzen m^k mit einem $k \geq 2$ schreiben.

Für $n \geq 6$ können wir allgemein vorgehen und zeigen, dass es keine weiteren Lösungen gibt.

Für $n \geq 6$ kommen in $n!$ mindestens die beiden Faktoren 3 und 6 vor, die Zahl $n!$ ist also durch $3 \cdot 6 = 18$ und damit insbesondere durch 9 und durch 3 teilbar. Die gesamte linke Seite $n! + 3$ ist dann durch 3, aber nicht durch 9 teilbar.

Hätten wir eine Lösung $n! + 3 = m^k$, dann muss mit der linken Seite auch die rechte Seite m^k durch 3 teilbar sein. Da 3 eine Primzahl ist, folgt dann, dass auch m selbst durch 3 teilbar ist. Ist dann $k \geq 2$, so ist $m^k = m^2 \cdot m^{k-2}$ durch 9 teilbar im Widerspruch dazu, dass die linke Seite $n! + 3$ nicht durch 9 teilbar ist.

Für $n \geq 6$ lässt sich $n! + 3$ also nicht als Potenz m^k mit einem $k \geq 2$ darstellen.

Aufgabe 3

Bestimme alle Lösungen $(x; y)$ des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x &= y^2 - 2 \\ y &= x^2 - 2. \end{aligned}$$

Lösung:

Es sind genau $(-1; -1)$, $(2; 2)$, $(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2})$ und $(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2})$ die vier Lösungen des Gleichungssystems.

Sie sind in der Zeichnung als Schnittpunkte der beiden Parabeln dargestellt, die durch die beiden Gleichungen definiert werden.

Sei $(x; y)$ eine Lösung. Dann können wir die beiden Gleichungen voneinander abziehen und erhalten

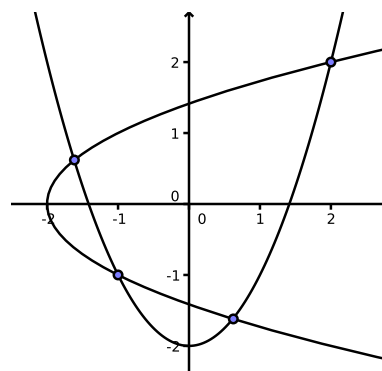
$$x - y = y^2 - 2 - x^2 + 2 = y^2 - x^2 = (y - x)(y + x).$$

Dann ist entweder $x = y$ oder wir können durch $y - x$ teilen und erhalten somit die beiden Möglichkeiten

$$x = y \quad \text{oder} \quad -1 = y + x.$$

Im Fall $x = y$ können wir mit der zweiten Gleichung $y = x^2 - 2$ weiter folgern

$$\begin{aligned} x &= x^2 - 2 \\ \iff 0 &= x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2) \\ \iff x &= -1 \text{ oder } x = 2. \end{aligned}$$



Einsetzen von $y = x$ ergibt die beiden möglichen Lösungspaare $(-1; -1)$ und $(2; 2)$.

Im anderen Fall ist $y = -1 - x$ und wir erhalten mit der zweiten Gleichung und der p - q -Formel

$$\begin{aligned} -1 - x &= x^2 - 2 \\ \iff 0 &= x^2 + x - 1 \\ \iff x &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{oder} \\ x &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Einsetzen von $y = -1 - x$ ergibt die beiden möglichen Paare

$$\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

Zur Probe setzen wir noch alle vier möglichen Paare in die beiden Ursprungsgleichungen ein und testen, ob sie erfüllt sind. Für $x = y = -1$ gilt $(-1)^2 - 2 = 1 - 2 = -1$, die beiden Gleichungen sind also erfüllt. Ebenso gilt $2^2 - 2 = 4 - 2 = 2$ für $x = y = 2$.

Für die anderen beiden Paare berechnen wir

$$\left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^2 - 2 = \frac{1 - 2(\pm\sqrt{5}) + 5}{4} - 2 = \frac{3 \mp \sqrt{5}}{2} - 2 = \frac{-1 \mp \sqrt{5}}{2},$$

die Gleichungen sind also ebenfalls erfüllt.

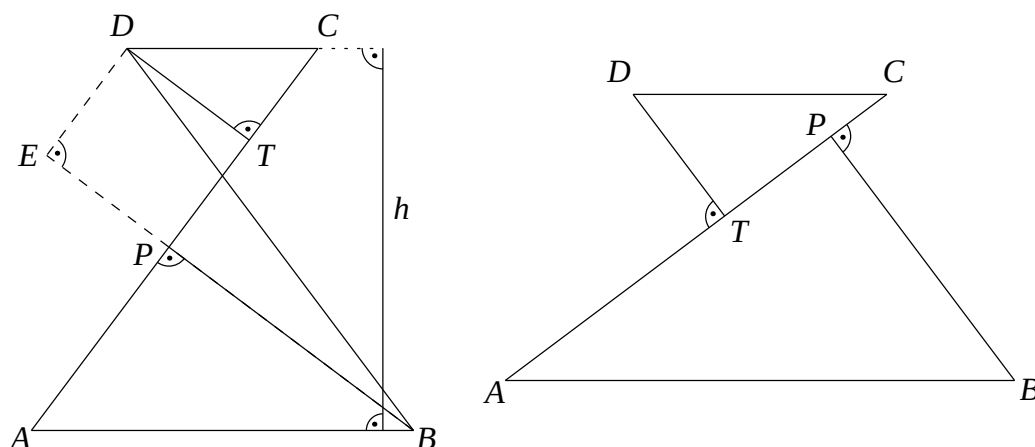
Aufgabe 4

Bestimme die Gestalt aller symmetrischen Trapeze $ABCD$, deren Diagonale AC die Länge 75 cm hat, in denen die Höhe von B auf (AC) die Länge 48 cm und in denen die Höhe von D auf (AC) die Länge 24 cm hat.

Lösung:

Zunächst betrachten wir ein allgemeines symmetrisches Trapez und führen weitere Punkte ein: Der Fußpunkt des Lotes von B auf (AC) heiße P ; der Fußpunkt des Lotes von D auf (AC) heiße T . Schließlich sei E der Fußpunkt des Lotes von D auf (BP) .

Die Diagonale BD des Trapezes ist auch die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks DEB .



Im konkreten Fall sind folgende Längen gegeben, wobei wir die Einheiten weglassen:

$$|AC| = 75, \quad |BP| = 48, \quad |DT| = 24.$$

Wegen $|BD| = |AC|$ (Symmetrie) ergibt sich:

$$\begin{aligned} |PT|^2 &= |BD|^2 - (|BP| + |DT|)^2 \\ \Rightarrow |PT|^2 &= 75^2 - 72^2 = (75 + 72) \cdot (75 - 72) = 3 \cdot (25 + 24) \cdot 3 = 3^2 \cdot 7^2 \\ \Rightarrow |PT| &= 21. \end{aligned}$$

Die Dreiecke ABP und CDT sind offensichtlich ähnlich zueinander. Damit folgt

$$\frac{|AP|}{|CT|} = \frac{|BP|}{|DT|} = \frac{48}{24} = 2.$$

Nun gibt es zwei Fälle zu unterscheiden.

Fall 1: Auf der Geraden (AC) liegen die Punkte A und T von P aus gesehen auf verschiedenen Seiten.

Da von A aus gesehen die Punkte P und C und von C aus gesehen die Punkte T und A auf derselben Seite der Geraden (AC) liegen, liegen die Punkte A, P, T und C in dieser Reihenfolge auf der Geraden. (Siehe linke Zeichnung.) Daher gilt:

$$\begin{aligned} 75 &= |AC| = |AP| + |PT| + |CT| = 21 + 3|CT| \\ \Rightarrow |CT| &= 18 \\ \Rightarrow |AP| &= 2|CT| = 36. \end{aligned}$$

Nach Pythagoras ergibt sich für die Länge der Grundseite AB :

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= |AP|^2 + |BP|^2 = 1296 + 2304 = 3600 \\ \Rightarrow |AB| &= 60. \end{aligned}$$

Wegen der schon oben angesprochenen Ähnlichkeit der Dreiecke ABP und CDT ist

$$|CD| = \frac{|DT|}{|PB|} \cdot |AB| = \frac{|AB|}{2} = 30.$$

Die Höhe h des Trapezes ist gleich der Höhe des Dreiecks ABC zur Grundseite AB . Diese ergibt sich nach der Flächenformel zu

$$h = \frac{|AC| \cdot |BP|}{|AB|} = \frac{75 \cdot 48}{60} = 60.$$

In diesem Fall ist das Trapez $ABCD$ also ein symmetrisches Trapez mit den Grundseiten AB der Länge 60 und CD der Länge 30 und mit der Höhe 60.

Fall 2: Auf der Geraden (AC) liegen die Punkte A und T von P aus gesehen auf der gleichen Seite. (Siehe rechte Zeichnung.)

Unabhängig davon, wie etwa T bezüglich A liegt und P bezüglich C , gilt hier

$$\begin{aligned} 75 &= |AC| = |AP| - |PT| + |CT| = -21 + 3|CT| \\ \Rightarrow |CT| &= 32 \\ \Rightarrow |AP| &= 2|CT| = 64. \end{aligned}$$

Die weiteren Rechnungen sind nun sehr ähnlich wie im ersten Fall: Nach Pythagoras ergibt sich jetzt für die Länge der Grundseite AB :

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= |AP|^2 + |BP|^2 = 4096 + 2304 = 6400 \\ \Rightarrow |AB| &= 80. \end{aligned}$$

Und aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABP und CDT folgt

$$|CD| = \frac{|DT|}{|PB|} \cdot |AB| = \frac{|AB|}{2} = 40.$$

Die Höhe h des Trapezes ist gleich der Höhe des Dreiecks ABC zur Grundseite AB . Diese ergibt sich nach der Flächenformel zu

$$h = \frac{|AC| \cdot |BP|}{|AB|} = \frac{75 \cdot 48}{80} = 45.$$

In diesem zweiten Fall ist das Trapez $ABCD$ also ein symmetrisches Trapez mit den Grundseiten AB der Länge 80 und CD der Länge 40 und mit der Höhe 45.

Zur Probe, ob die bestimmten Gestalten der Trapeze den Bedingungen der Aufgabenstellung genügen, muss vor allem nachgerechnet werden, dass ein *symmetrisches* Trapez mit den genannten Seitenlängen der Grundseiten und der Höhe die angegebene Diagonalenlänge besitzt. Alles Weitere ergibt sich leicht, indem man auf der Diagonalen zwei Punkte P und T in den errechneten Lagen einzeichnet. Aus der Umkehrung des Satzes von Pythagoras

(mit den gleichen Rechnungen wie oben) ergibt sich dann, dass P und T tatsächlich die Fußpunkte der Lote sind.

Wir bestimmen also die Längen der Diagonalen. Allgemein gilt für die Länge der Diagonalen in einem symmetrischen Trapez $ABCD$:

$$|AC|^2 = \left(\frac{|AB| + |CD|}{2} \right)^2 + h^2.$$

Im Fall 1 sind die Grundseitenlängen 60 und 30 und die Höhe 60, das ergibt:

$$\begin{aligned} |AC|^2 &= 45^2 + 60^2 = 2025 + 3600 = 5625 \\ \Rightarrow |AC| &= 75. \end{aligned}$$

Im Fall 2 haben wir Grundseitenlängen 80 und 40 und die Höhe 45, womit wir berechnen:

$$\begin{aligned} |AC|^2 &= 60^2 + 45^2 = 3600 + 2025 = 5625 \\ \Rightarrow |AC| &= 75. \end{aligned}$$

Es gibt also genau zwei Trapeze mit den geforderten Eigenschaften.

Alternative Lösung: Wir zeigen, wie man die beiden symmetrischen Trapeze konstruieren kann (und warum es nur zwei Möglichkeiten gibt).

Wie in der ersten Variante nennen wir in einem symmetrischen Trapez die Lotfußpunkte von B bzw. D auf die Diagonale AC stets P und T . Und stellen mittels eines entsprechenden Hilfspunktes E fest, dass stets $|PT|^2 = |BD|^2 - (|BP| + |DT|)^2$ gilt.

Gibt es (überhaupt) ein symmetrisches Trapez mit den geforderten Eigenschaften, so muss also $|PT| = 21$ sein.

Erster Schritt: Wir beginnen damit, dass wir eine Strecke BP mit der gewünschten Länge $|BP| = 48$ zeichnen.

Zweiter Schritt: Da P der Lotfußpunkt auf der Diagonalen AC sein soll, muss AC auf der Senkrechten g zu BP durch P liegen. Diese konstruieren wir. Der Punkt T muss ebenfalls auf dieser Senkrechten g liegen und den Abstand $|PT| = 21$ zu P haben. Davon gibt es *zwei* Punkte auf g – in jede Richtung einen. Wir machen also zwei Zeichnungen und zeichnen jeweils eine der Möglichkeiten ein.

Dritter Schritt: Da T der Lotfußpunkt von D ist, muss D auf der Senkrechten f zu g durch D liegen. Diese Senkrechte konstruieren wir ebenfalls und zeichnen den Punkt D im Abstand $|DT| = 24$ auf f ein. Dabei müssen D und B auf verschiedenen Seiten der (noch nicht bestimmten) Diagonalen AC , die selbst auf g liegen wird, liegen. Die Lage von D ist also (je Zeichnung) eindeutig bestimmt.

Vierter Schritt: Als nächstes zeichnen wir die Strecke BD ein, also die andere Diagonale unseres symmetrischen Trapezes. Sei M der Schnittpunkt der Strecke BD mit der Geraden g (der existiert, weil B und D ja auf verschiedenen Seiten von g liegen).

Fünfter Schritt: Da unser Trapez symmetrisch sein soll, muss M nicht nur der Schnittpunkt der beiden Diagonalen sein, sondern sogar die Diagonalen auf die gleiche Art schneiden. Das heißt genauer, dass $|CM| = |DM|$ und $|AM| = |BM|$ gelten muss. Diese Längen haben wir zwar nicht ausgerechnet, aber wir können sie mit dem Zirkel abtragen und die Punkte C und A auf g konstruieren. Insbesondere sind beide Punkte eindeutig bestimmt, da ihre Richtung auf g jeweils durch die Orientierung der Punkte $ABCD$ des Trapezes festliegt. Durch die Konstruktion ist zugleich sichergestellt, dass $ABCD$ ein symmetrisches Trapez wird.

Insgesamt haben wir damit zwei Trapeze konstruiert, die die geforderten Eigenschaften besitzen und zugleich gezeigt, dass es keine anderen Lösungen gibt, selbst wenn wir mit dieser Lösungsmethode nicht berechnen, wie lang die Grundseiten oder die Höhe des Trapezes sind.

Die im dritten/vierten und fünften Schritt konstruierten Diagonalen haben dabei genau die richtige Länge, weil wir $|PT|$ entsprechend berechnet hatten – erneutes Anwenden von Pythagoras ergibt, dass ihre Längen genau 75 (Längeneinheiten) betragen.