Mathematischer Korrespondenz-zirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Beispiellösungen zu Blatt 93

Aufgabe 1

Nach einem kräftigen April-Schneefall (ja, das kann mal vorkommen!) muss Gustav die Einfahrt vor seinem Haus freischaufeln. Dafür benötigt er 60 Minuten. Wenn seine beiden Söhne Friedrich und Emil ihm dabei helfen würden, wären sie zusammen bereits nach 20 Minuten fertig.
Wie lange würde jeder der beiden Söhne alleine für die Arbeit benötigen, wenn Friedrich doppelt so schnell wie Emil schaufeln kann?

Lösung:

Wir suchen zunächst eine Antwort auf die Frage, wie groß der Anteil der Einfahrt ist, den jeder Sohn in 20 Minuten schafft. Der Vater benötigt alleine 60 Minuten für die gesamte Einfahrt. Dadurch können wir uns schon die folgenden beiden Punkte herleiten.

- Der Vater schafft $1/3$ der Einfahrt in 20 Minuten.
- Die beiden Söhne, Emil und Friedrich, schaufeln zusammen den Rest, also $2/3$ der Einfahrt, in 20 Minuten frei.

Friedrich schaufelt doppelt so schnell wie Emil, also schafft er $2/3$ des Restes, den er zusammen mit Emil freischaufelt, während Emil in derselben Zeit $1/3$ schafft. Friedrich schaufelt daher $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ der gesamten Einfahrt in 20 Minuten frei. Emils Anteil dagegen beträgt $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$. Zur Zwischenkontrolle addieren wir die Anteile von allen dreien:

$$\underbrace{\frac{1}{3}}_{\text{Gustav}} + \underbrace{\frac{4}{9}}_{\text{Friedrich}} + \underbrace{\frac{2}{9}}_{\text{Emil}} = 1.$$

Dies entspricht der gesamten Einfahrt.

Nun berechnen wir die Zeit, die jeder Sohn alleine für die gesamt Einfahrt benötigen würde. Friedrich schafft $4/9$ der Einfahrt in 20 Minuten, also schafft er die gesamte Einfahrt in $20 \cdot \frac{9}{4} = 45$ Minuten. Genauso berechnen wir die Zeit, die Emil benötigen würde. Er bräuchte für die gesamte Einfahrt $20 \cdot \frac{9}{2} = 90$ Minuten.

Aufgabe 2

Bestimme alle natürlichen Zahlen, die gleich dem Quadrat ihrer Quersumme sind!

Lösung:

Die einzigen natürlichen Zahlen, die gleich dem Quadrat ihrer Quersumme sind, sind 0 (falls man sie denn zu den natürlichen Zahlen zählt), 1 und 81.

Behauptung: Für jede natürliche Zahl $n \geq 5$ gilt $10^{n-1} > 100n^2$.

(Wir könnten stattdessen auch $10^{n-1} > 81n^2$ zeigen, die genaue Abschätzung ist nicht so wichtig.)
Für $n = 5$ gilt $10^{5-1} = 10\,000 > 2\,500 = 100 \cdot 5^2$, die Aussage stimmt. Sei nun für ein n die Aussage $10^{n-1} > 100n^2$ bewiesen, dann ergibt sich für $n+1$:

$$\begin{aligned} 10^{(n+1)-1} &= 10 \cdot 10^{n-1} > 10 \cdot 100n^2 \\ &= 100(1 \cdot n^2 + 2 \cdot n \cdot n + 7n^2) \\ &> 100(n^2 + 2n + 1) = 100(n+1)^2 \,. \end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Behauptung also für alle $n \geq 5$. □

Mit Hilfe dieser Behauptung können wir nun die Aufgabe lösen. Die n-stellige Zahl

$$\begin{aligned} x &= [a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1a_0] \\ &= a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}10^{n-2} + \ldots + a_1 10 + a_0 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 10^i \end{aligned}$$

(es sei dabei $a_{n-1} \neq 0$) hat die Quersumme

$$Q(x) = a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1 + a_0 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \,.$$

Hat die Zahl x mehr als vier Ziffern (also $n \geq 5$), so schätzen wir x gegen die kleinste n-stellige Zahl und alle Ziffern der Quersumme gegen 9 ab und erhalten mit der obigen Behauptung

$$x \geq 10^{n-1} > 100n^2 > (9n)^2 \geq \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i\right)^2 = (Q(x))^2 \;;$$

keine dieser Zahlen kann also Quadrat ihrer Quersumme sein.

Ist x eine vierstellige Zahl, so schätzen wir wieder jede Ziffer gegen 9 ab und erhalten für ihr Quersummenquadrat $Q(x)^2 \leq (4 \cdot 9)^2 = 1\,296$. Wäre $x = Q(x)^2$, so muss die erste Ziffer eine 1 sein. Dann könnten wir aber weiter abschätzen $x = Q(x)^2 \leq (1 + 3 \cdot 9)^2 = 784$ im Widerspruch dazu, dass x vierstellig ist.

Ist x eine höchstens dreistellige Zahl, die $x = Q(x)^2$ erfüllt, so gilt $x = Q(x)^2 \leq (3 \cdot 9)^2 = 27^2 = 729$. Wir probieren also alle Quadratzahlen bis $27^2 = 729$ durch:

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
z^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
$Q(z^2)$	0	1	4	9	7	7	9	13	10	9
z	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
z^2	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
$Q(z^2)$	1	4	9	16	16	9	13	19	9	10
z	20	21	22	23	24	25	26	27		
z^2	400	441	484	529	576	625	676	729		
$Q(z^2)$	4	9	16	16	18	13	19	18		

und stellen fest, dass nur $0, 1$ und 81 Quadrate ihrer eigenen Quersummen sind.

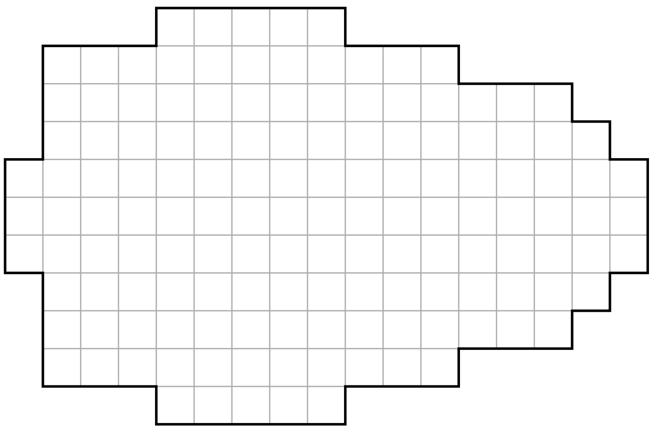
Bemerkung: Der letzte Schritt – das Ausprobieren der Quadratzahlen – kann etwas abgekürzt werden, indem wir Reste bei der Division durch 9 betrachten. Es gilt ganz allgemein

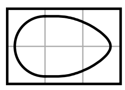
$$x = \sum a_i 10^i = \sum a_i (9+1)^i \equiv \sum a_i 1^i = Q(x) \pmod 9 .$$

Ist nun $x = Q(x)^2$, so muss folglich $Q(x)^2 \equiv Q(x) \pmod 9$ sein. Weil $0^2 \equiv 0$, $1^2 \equiv 1$, $2^2 \equiv 4$, $3^2 \equiv 9 \equiv 0$, $4^2 \equiv 16 \equiv 7$, $5^2 \equiv 25 \equiv 7$, $6^2 \equiv 36 \equiv 0$, $7^2 \equiv 49 \equiv 4$, $8^2 \equiv 64 \equiv 1 \pmod 9$ gilt, ist das nur für x mit $x \equiv 0 \pmod 9$ oder $x \equiv 1 \pmod 9$ möglich. Wir müssen also nur noch die sieben Quadratzahlen $0, 1, 9^2, 10^2, 18^2, 19^2$ und 27^2 testen.

Aufgabe 3

Osterhasengehilfe Fridolin soll in Geschenkkartons kleine Schachteln mit je einem leckeren Schoko-Ei mit der Schlemmer-Spezialfüllung packen. Solch ein Geschenkkarton ist neuerdings in grober Näherung eiförmig, während die kleinen Schachteln nach wie vor rechteckig sind – siehe Zeichnung.





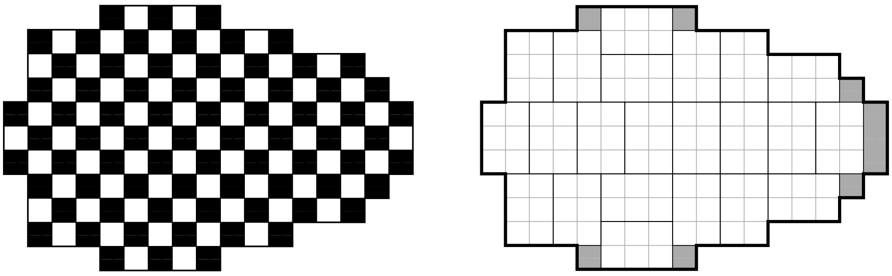
Die kleinen Schachteln sollen dabei nur so in den Karton gepackt werden, dass ihre Kanten parallel zu den Kanten des Geschenkkartons liegen.

Die Eiform ist zwar schön anzusehen, aber es gibt Schwierigkeiten, wenn man versucht, den Karton vollständig zu füllen ...

Wie viele Eier kann man maximal im Karton unterbringen?

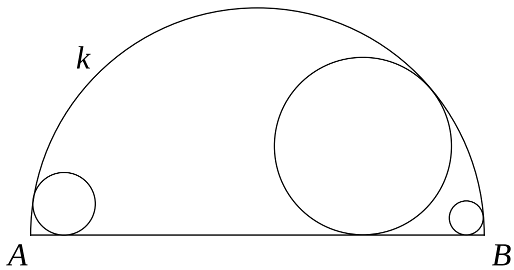
Lösung:

Die Grundfläche des Geschenkkartons besteht aus 141 Kästchen. Wenn wir die Fläche nun mit einem Schachbrettmuster wie in unten stehender Zeichnung überziehen, erhalten wir 74 schwarze und nur 67 weiße Kästchen. Ein einzelnes Ei belegt jedoch unabhängig von seiner Position im Karton genau drei schwarze und drei weiße Kästchen. Wegen $22 \cdot 3 < 67 < 23 \cdot 3$ können maximal 22 Eier in den Karton passen.
Eine mögliche Konfiguration mit 22 Eiern ist im Folgenden angegeben.



Aufgabe 4

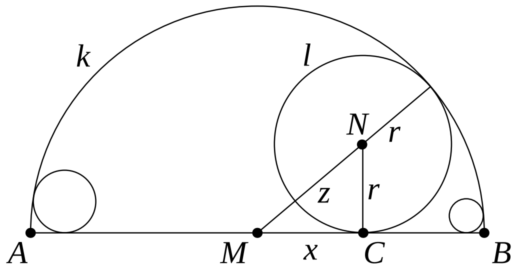
Gegeben sei ein Halbkreisbogen k mit seinem Durchmesser AB. In diese Figur kann man Kreise einzeichnen, die den Halbkreisbogen und den Durchmesser berühren, siehe die Beispiele in der Zeichnung.



Bestimme die Ortslinie (also die Menge aller Punkte mit der Eigenschaft) aller Mittelpunkte solcher Kreise!

Lösung:

Da der Halbkreisbogen k und ein berührender Kreis l an ihrer Berührstelle dieselbe Tangente haben, ist der Radius von l zu diesem Berührpunkt eine Teilstrecke des Radius von k zu diesem Berührpunkt. Außerdem steht der Radius von l zum Berührpunkt C senkrecht auf der Strecke AB. Sei R der Radius von k, d. h. $|AB|/2 = R$. Sei außerdem r der Radius von l sowie x der Abstand von M zu C und z der Abstand von M zu N.



Das Dreieck MCN ist somit rechtwinklig und nach dem Satz des Pythagoras gilt:

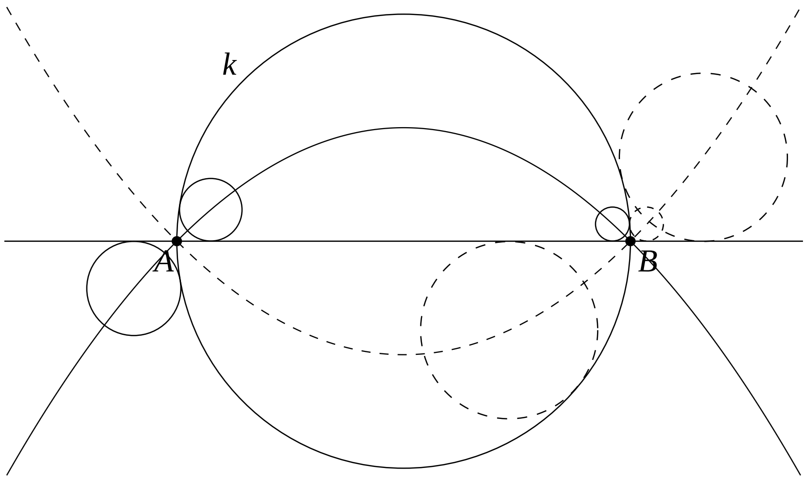
$$x^2 + r^2 = z^2 = (R - r)^2 = R^2 - 2rR + r^2.$$

Dies ist äquivalent zu

$$r = \frac{R^2 - x^2}{2R} = -\frac{x^2}{2R} + \frac{R}{2}.$$

Betrachten wir M als Ursprung unseres Koordinatensystems, so beschreibt diese Gleichung gerade eine nach unten geöffnete Parabel.

Bemerkung: Die Gleichung für die Parabel liefert natürlich auch eine Fortsetzung über die Halbkreisfläche hinaus. Diese Fortsetzung ist ebenso eine Fortsetzung der bestimmten Ortslinie: Auf ihr liegen die Mittelpunkte aller Kreise, die die zum Vollkreis fortgesetzte Kreislinie k von außen und den zur Geraden (AB) fortgesetzten Durchmesser von unten berühren.



Sucht man allgemeiner nach *allen* Punkten, die von k und der Geraden (AB) denselben Abstand haben, so erhält man die eben bestimmte Parabel und die aus der Spiegelung an (AB) entstehende Parabel.