Mathematischer Korrespondenz-zirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Beispiellösungen zu Blatt 94

Aufgabe 1

Auf dem Tisch liegen sieben zweifarbige Spielchips. Zu Beginn liegt bei allen Chips die rote Seite oben. Durch endlich viele Spielzüge soll am Ende bei allen Chips die grüne Seite oben liegen.

a) In der ersten Variante des Spiels darf man in jedem Spielzug vier beliebige Chips umdrehen.

b) In der zweiten Spielvariante darf man in jedem Spielzug fünf beliebige Chips umdrehen.

Bei welcher Variante kann man das Spielziel erreichen, und wenn ja, wie?

Lösung:

a) In der Ausgangssituation vor jedem Spielzug liegen zusammen sieben rote und grüne Chips auf dem Tisch. Wir schreiben

$$\text{grün}_{alt} + \text{rot}_{alt} = 7.$$

In jedem Spielzug drehen wir vier Chips um. Dabei werden die umgedrehten roten Chips zu neuen grünen Chips. Wir bezeichnen deren Anzahl mit grün_{hinzu}. Umgekehrt werden die zuvor grünen Chips zu roten Chips, deren Anzahl rot_{hinzu} sei. Damit können wir eine Bilanz für die Anzahl der grünen Chips, die nach dem Spielzug auf dem Tisch liegen, aufstellen:

$$\text{grün}_{neu} = \text{grün}_{alt} + \text{grün}_{hinzu} - \text{rot}_{hinzu}\,.$$

Da wir immer genau vier Chips umdrehen, gilt außerdem

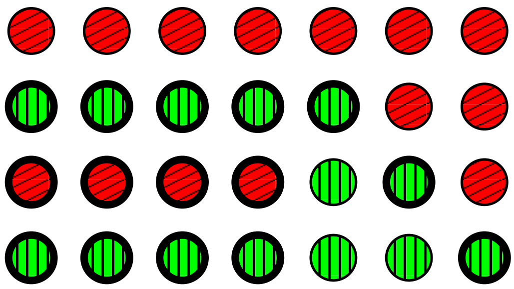
$$\text{grün}_{hinzu} + \text{rot}_{hinzu} = 4 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{rot}_{hinzu} = 4 - \text{grün}_{hinzu}\,.$$

Das Spielziel ist erreicht, wenn nur grüne Chips auf dem Tisch liegen, also wenn gilt

$$\begin{aligned} 7 = \text{grün}_{neu} &= \text{grün}_{alt} + \text{grün}_{hinzu} - \text{rot}_{hinzu} \\ &= \text{grün}_{alt} + \text{grün}_{hinzu} - (4 - \text{grün}_{hinzu}) \\ &= \text{grün}_{alt} + 2 \cdot \text{grün}_{hinzu} - 4. \end{aligned}$$

Zu Beginn des Spiels liegt eine gerade Anzahl grüner Chips auf dem Tisch, nämlich $\text{grün}_{alt} = 0$. Die Anzahl der grünen Chips bleibt nach jedem Spielzug gerade, da sie sich bei einem Spielzug um $2 \cdot (\text{grün}_{hinzu} - 2)$ verändert. Wir erhalten daher nie eine ungerade Anzahl grüner Chips auf dem Tisch und damit auch keine sieben grüne Chips.

b) Wenn man nun fünf beliebige Chips umdrehen darf, ist die Aufgabe in drei Schritten lösbar; die Chips, die in einem Spielzug umgedreht werden, sind in der jeweiligen Zeile der folgenden Darstellung fett umrandet.



Aufgabe 2

Häuptling Rechnetschnellwiederwind reitet mit seinem Wildpferd Springtwieeineprimzahl durch die weiten Steppen der euklidischen Ebene. Sie starten jeweils auf dem Punkt $(0, 0)$ und springen auf den Punkten mit nichtnegativen ganzzahligen Koordinaten umher.
Wie der Name von Springtwieeineprimzahl schon verrät, wird dabei in Ost-West-Richtung (x-Richtung) p Felder und in Nord-Süd-Richtung (y-Richtung) q Felder weit gesprungen, wobei p und q Primzahlen sein müssen. Außerdem darf jede Primzahl nur ein einziges Mal verwendet werden.

a) Bestimme für alle Punkte (x, y) mit $0 \leq x, y \leq 10$, wie viele Sprünge Rechnetschnellwiederwind und Springtwieeineprimzahl minimal brauchen, um vom Startpunkt aus dorthin zu gelangen.

   Hinweis: Zwischendurch dürfen die beiden natürlich auch Punkte mit Koordinaten größer als 10 anspringen.

b) Insbesondere: Wie viele Züge brauchen die beiden minimal, um wieder auf ihrem Ausgangspunkt $(0, 0)$ zu landen?

Lösung:

Wir nennen zuerst für jede der Zahlen 0 bis 10 einige Kombinationen von verschiedenen Primzahlen, die die gesuchte Zahl über Addition und/oder Subtraktion ergeben. Das heißt, dass wir sozusagen das Problem erst im Eindimensionalen betrachten.
Um eine Primzahl zu erreichen, benötigt man mindestens einen Schritt, für alle anderen positiven Ziele mindestens zwei Primzahlen. Für die Null hingegen reichen auch zwei Primzahlen nicht, man benötigt mindestens drei. Zu beachten ist, dass die Verwendung der Primzahl 2 darüber entscheidet, ob man eine ungerade oder eine gerade Anzahl an Zügen braucht.

$$0 \quad = 2 + 3 - 5 \quad = 3 + 13 - 5 - 11 = 37 + 23 - 31 - 29$$

$$\begin{array}{llllll} 1 & & = 3-2 & = 11-7-3 & = 53-29-23 \\ 3 & = 3 & = 5-2 & = 11-5-3 & = 71-37-31 \\ 5 & = 5 & = 3+2 & = 13-5-3 & = 71-37-29 \\ 7 & = 7 & = 2+5 & = 17-7-3 & = 59-29-23 \\ 9 & & = 2+7 & = 17-5-3 & = 61-29-23 \end{array}$$

$$\begin{array}{rlrll} 2 & = 2 & = 5-3 & = 31-29 & = 11+3-7-5 \\ 4 & & = 7-3 & = 41-37 & = 13+3-7-5 \\ 6 & & = 11-5 & = 29-23 & = 11+5-7-3 \\ 8 & & = 3+5 & = 31-23 & = 13+5-7-3 \\ 10 & & = 3+7 & = 41-31 & = 11+7-5-3 \end{array}$$

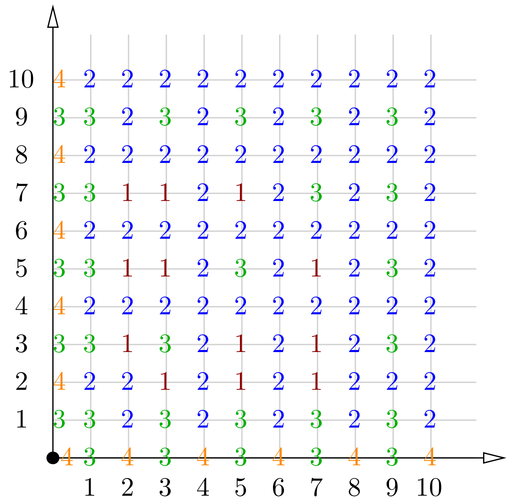
Aus diesen Werten für eine Dimension ergeben sich durch Kombination Minimalabschätzungen für den zweidimensionalen Fall, dass man von $(0,0)$ auf ein Feld (x,y) gelangen will. Wir weisen zuvor noch einmal auf die besondere Rolle der Primzahl 2 hin: Wird sie nicht verwendet, sind nach jedem Zug beide Koordinaten gerade oder beide Koordinaten ungerade. Wird sie hingegen verwendet, so darf sie ja nur genau einmal verwendet werden, daher ist danach immer je eine Koordinate gerade und eine ungerade.
Zunächst seien $x > 0$ und $y > 0$.

- Sind x und y verschiedene Primzahlen, so ist das Feld offensichtlich mit nur einem Zug zu erreichen.
- Sind x und y gerade Zahlen, braucht man mindestens zwei Züge; das ist aber auch in jedem Fall möglich, da man aus der obigen Übersicht für jedes Paar (x,y) zwei Primzahlpaare nehmen kann, die keine Zahl doppelt haben und x bzw. y als Summe oder Differenz bilden. Für das Feld $(8,8)$ kann man zum Beispiel die Züge $(3,31)$ und $(5,-23)$ nehmen.
- Ist x gerade und y ungerade (oder umgekehrt) und sind nicht beide Zahlen prim, so braucht man mindestens zwei Züge. Wie im vorigen Unterpunkt ist auch hier in jedem Fall eine Lösung möglich.
- Sind x und y ungerade Zahlen und sind nicht beide Zahlen prim, so braucht man mindestens drei Züge, da die 2 ja nur einmal verwendet werden darf. Auch hier kann man der Tabelle passende Primzahlkombinationen entnehmen.

Nun werden noch die Fälle untersucht, in denen eine Koordinate null ist, wegen der Symmetrie reicht der Fall $x = 0$.

- Ist $x = 0$ und y ungerade, so braucht man mindestens drei Züge, und wiederum reichen die Angaben in der Tabelle.
- Ist $x = 0$ und y gerade, so kann man die 2 nicht benutzen und braucht daher für $x = 0$ wenigstens vier Züge. Da es aber auch für y jeweils eine Kombination mit vier Zügen gibt, die andere Primzahlen verwendet (auch, wenn $y = 0$ ist), reichen vier Züge aus.

In der folgenden Übersicht sind alle so bestimmen Werte eingetragen.



Aufgabe 3

Wir betrachten einen „Pythagorasbaum" zu einem gleichschenkligen Dreieck. Auf ein Quadrat von 1 Meter Seitenlänge als Stamm wird ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck mit seiner Hypotenuse aufgesetzt, dann werden die beiden Kathetenquadrate gezeichnet; und weiter wird beliebig oft ein Wachstumsschritt ausgeführt: Auf jedes im letzten Schritt gezeichnete Quadrat wird wieder ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck aufgesetzt und es werden seine beiden Kathetenquadrate gezeichnet.

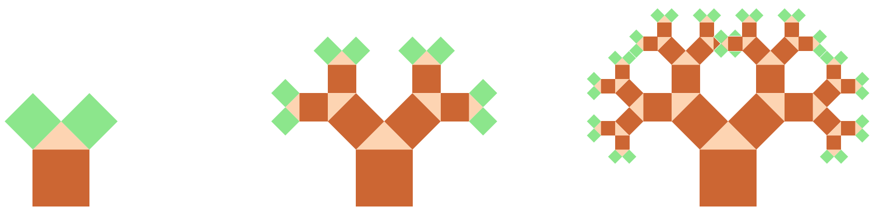


Abbildung 1: Der Baum nach 1, 3 bzw. 5 Schritten

a) Wie hoch ist dieser Baum, wenn wir das Verfahren unendlich oft durchführen?

b) Kommt einer der Äste dem Erdboden (d. h. der verlängerten Grundlinie des ersten Quadrates) näher als 5 cm?

Lösung:

a) Da die aufgesetzten Dreiecke gleichschenklig rechtwinklig sind, ist bei einer „Stammdicke" von 1 (wir lassen die Einheit Meter im weiteren Verlauf weg) die Seitenlänge der Kathetenquadrate im ersten Schritt $1/\sqrt{2}$ (nach dem Satz von Pythagoras). Die Kathetenquadrate im n-ten Schritt haben entsprechend eine Seitenlänge von $1/\sqrt{2}^n$.

Um nun die Höhe des Baumes nach unendlich vielen Schritten anzugeben, genügt es, einen geeigneten, speziellen Ast zu betrachten, z. B. jenen, bei dem die Kathetenquadrate immer abwechselnd auf der linken und der rechten Kathete (von der Hypotenuse aus gesehen) aufsitzen.
Begründung: Ein Ast ist sicherlich dann maximal hoch, wenn er nach jedem Schritt mindestens so hoch ragt wie alle anderen Äste im jeweiligen Schritt. Die Dreiecke brauchen bei der Bestimmung der Höhe nicht zwingend betrachtet zu werden, weil die Kathetenquadrate das jeweilige Hypotenusenquadrat berühren.
Der Stamm und jedes zweite weitere Quadrat liegen offenbar achsenparallel zum Stamm. Der maximale Höhengewinn durch solch ein Quadrat ist daher $1/\sqrt{2}^n$.
Im ersten Schritt und allen folgenden ungeraden Schritten stehen die beiden Kathetenquadrate auf der Spitze, d. h. der maximal mögliche Höhenzuwachs ist hier durch die Diagonale mit Länge $\sqrt{2} \cdot 1/\sqrt{2}^n = 1/\sqrt{2}^{n-1}$ gegeben.
Betrachten wir ohne Einschränkung das linke der beiden Quadrate des ersten Schrittes. Den maximal möglichen Höhengewinn kann man nur dann ausschöpfen, wenn im zweiten Schritt das rechte Kathetenquadrat genutzt wird. In diesem Fall wird aber auch im zweiten Schritt automatisch der maximale Höhenzuwachs genutzt.
Außerdem können wir nun dieses Quadrat als Stamm eines neuen Baumes mit halber Stammbreite auffassen und induktiv folgt die Behauptung (diejenige über den geeigneten Ast).

Die Höhe h des eben beschriebenen Astes lässt sich nun ebenfalls unter Ausnutzung der Selbstähnlichkeit ermitteln: Wie bereits festgestellt hat der Ast nach einem Schritt eine Höhe von 2. Außerdem hat der im zweiten Schritt startende Teilbaum halbe Stammbreite und somit auch nur die halbe Höhe des gesamten Baumes. Wir haben also folgende Gleichheit:

$$h = 2 + \frac{h}{2},$$

was gleichbedeutend ist mit $h = 4$.

Alternativ können wir die Höhe des Astes auch mittels der geometrischen Reihe bestimmen:

$$\begin{aligned} h &= \underbrace{1}_{\text{(Stamm)}} + \underbrace{1}_{\text{(Schritt 1, Diagonale)}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{(Schritt 2)}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{(Schritt 3, Diagonale)}} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots \\ &= 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\right) = 4, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit aus der Formel für die unendliche geometrische Reihe folgt ($q^0 + q^1 + q^2 + \ldots = \frac{1}{1-q}$ für $0 < q < 1$).

Bemerkung: Der Endpunkt des oben beschriebenen Astes (abwechselnd auf die linke und die rechte Kathete aufsetzend) und sein Spiegelbild bilden zusammen die Randpunkte der Menge aller Punkte mit maximaler Höhe. Offensichtlich erreichen sehr viele Äste die maximale Höhe: Immer wenn man bei einem achsenparallelen Astabschnitt ist, kann man das nächste Quadrat frei wählen. Insgesamt wird die maximale Höhe auf einer Breite von 3 Metern erreicht. Die horizontale Ausdehnung des gesamten Baumes beträgt 6 Meter.

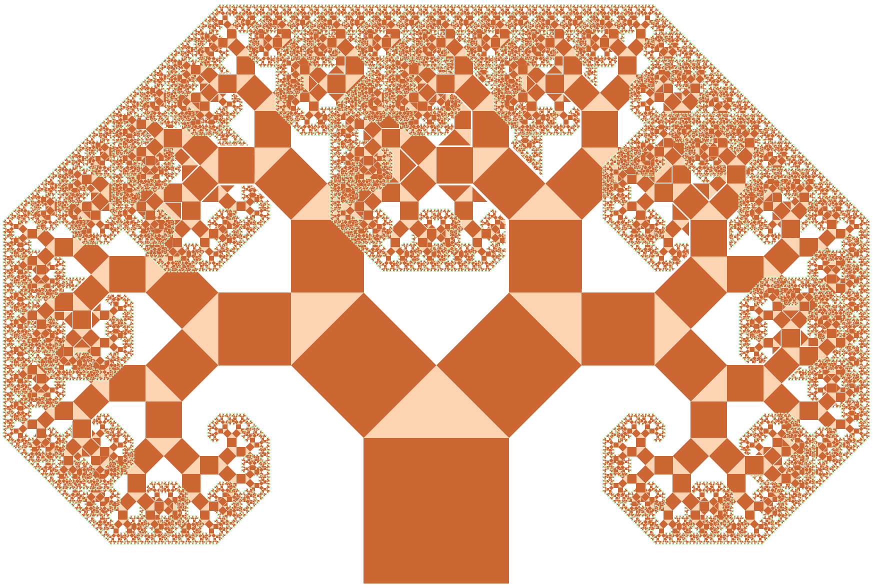


Abbildung 2: Der „fast“ unendlich gewachsene Baum (15 Stufen).

b) Für den Ast, der dem Erdboden am nächsten kommt, gehen wir genau umgekehrt vor. In den ersten vier Schritten erzielen wir offenbar jeweils den geringsten Höhenzuwachs, wenn wir die Quadrate in diesen Schritten immer auf die rechte oder immer auf die linke Kathete aufsetzen. Dabei liegt die Unterkante des Quadrats des zweiten Schritts $1 + {}^1\!/_2 = {}^3\!/_2$ Meter über dem Boden. Der dritte Schritt bringt bereits einen negativen Höhenzuwachs von ${}^1\!/_4$ Meter, d. h. die Differenz zum Erdboden beträgt hiernach ${}^5\!/_4$ Meter. Das Quadrat im vierten Schritt ist wiederum achsenparallel zum Stamm und das hiernach aufgesetzte Dreieck ist das erste, dessen Spitze genau nach unten zeigt. Dieses Quadrat mit Seitenlänge ${}^1\!/_4$ können wir also als Stamm eines nach unten orientierten Pythagorasbaumes auffassen. Dessen maximale Höhe beträgt nach dem ersten Aufgabenteil ${}^1\!/_4 \cdot 4 = 1$ Meter. Folglich kommen die Blätter dem Erdboden auf maximal ${}^5\!/_4 - 1 = {}^1\!/_4$ Meter nahe, also insbesondere nicht näher als 5 cm.

Aufgabe 4

Eine natürliche Zahl heiße *bescheiden*, wenn ihre Dezimaldarstellung aus höchstens zwei verschiedenen Ziffern besteht.
Sei $k \geq 3$. Sei x_k der Anteil der durch 5 teilbaren Zahlen in allen k-stelligen Zahlen. Sei weiter y_k der Anteil der durch 5 teilbaren Zahlen in allen bescheidenen k-stelligen Zahlen.
Zeige, dass stets $x_k > y_k$ gilt.

Lösung:

Die erste Ziffer einer k-stelligen Zahl darf nicht 0 sein, die restlichen $k-1$ Ziffern sind beliebig, daher gibt es genau

$$9 \cdot 10^{k-1}$$

verschiedene k-stellige Zahlen.

Eine Zahl ist genau dann durch 5 teilbar, wenn die letzte Ziffer eine 0 oder eine 5 ist. Daher gibt es genau

$$9 \cdot 10^{k-2} \cdot 2$$

durch 5 teilbare, k-stellige Zahlen und der erste Quotient beträgt stets

$$x_k = \frac{9 \cdot 10^{k-2} \cdot 2}{9 \cdot 10^{k-1}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}\,.$$

Die Anzahl bescheidener Zahlen beträgt

$$9 \cdot \left(1 + 9 \cdot (2^{k-1} - 1)\right)$$

und kann auf die folgende Art berechnet werden: Für die führende Ziffer gibt es 9 Möglichkeiten. Dann gibt es genau eine Möglichkeit, dass die Zahl nur aus dieser Ziffer besteht. In allen anderen Fällen kommt (irgendwo) eine weitere Ziffer vor, für diese Ziffer gibt es wiederum 9 Möglichkeiten. An jeder der $k-1$ Stellen von der zweiten bis zur letzten Ziffer können wir auswählen, welche der beiden Ziffern dort stehen soll (2^{k-1} Möglichkeiten), allerdings dürfen nicht alle Ziffern gleich der Anfangsziffer sein (deswegen -1).

Endet eine k-stellige bescheidene Zahl auf 0, so ist ihre erste Ziffer die andere vorkommende Ziffer, für die $k-2$ Ziffern dazwischen gibt es wieder jeweils die Auswahl aus diesen beiden Ziffern; es existieren also

$$9 \cdot 2^{k-2} \cdot 1$$

auf 0 endende k-stellige bescheidene Zahlen. Endet eine k-stellige bescheidene Zahl auf 5 und die zweite vorkommende Ziffer ist die 0, so muss die führende Ziffer der Zahl die 5 sein und für die mittleren $k-2$ Ziffern gibt es wieder je 2 Möglichkeiten, wobei jedoch nicht nur Fünfen vorkommen dürfen. Das sind

$$1 \cdot (2^{k-2} - 1) \cdot 1$$

Möglichkeiten. Kommt eine der 8 Ziffern ungleich 0 und 5 in einer k-stelligen auf 5 endenden bescheidenen Zahl vor, so gibt es für die ersten $k-1$ Stellen je zwei Möglichkeiten, wobei wiederum „nur Fünfen“ ausgeschlossen ist, das sind

$$8 \cdot (2^{k-1} - 1) \cdot 1$$

Möglichkeiten. Zusammen mit der nur aus Fünfen bestehenden Zahl existieren damit insgesamt genau

$$9 \cdot 2^{k-2} + 2^{k-2} - 1 + 8(2^{k-1} - 1) + 1$$

durch 5 teilbare, k-stellige bescheidene Zahlen und es ergibt sich

$$y_k = \frac{9 \cdot 2^{k-2} + 2^{k-2} - 1 + 8(2^{k-1} - 1) + 1}{9\,(1 + 9(2^{k-1} - 1))} = \frac{13 \cdot 2^{k-1} - 8}{81 \cdot 2^{k-1} - 72}\,.$$

Wir vergleichen die beiden Werte x_k und y_k miteinander und formen äquivalent um:

$$\begin{aligned} y_k < x_k = \frac{1}{5} &\iff 5(13 \cdot 2^{k-1} - 8) < 81 \cdot 2^{k-1} - 72 \\ &\iff 2^5 = 32 < 16 \cdot 2^{k-1} = 2^{k+3} \\ &\iff 5 < k + 3\,. \end{aligned}$$

Für $k \geq 3$ gilt damit ganz wie behauptet stets $y_k < x_k$.

Bemerkung: Man kann den Anteil y_k für $k \geq 3$ auch explizit gegen einen Wert abschätzen, der echt kleiner als $1/5$ ist:

$$\begin{aligned} y_k &= \frac{13 \cdot 2^{k-1} - 8}{81 \cdot 2^{k-1} - 72} \\ &= \frac{15 \cdot 2^{k-1} - \frac{72}{81} \cdot 15 - 2 \cdot 2^{k-1} + \frac{72}{81} \cdot 15 - 8}{81 \cdot 2^{k-1} - 72} \\ &= \frac{15}{81} - \frac{2^k - \frac{16}{3}}{81 \cdot 2^{k-1} - 72} \\ &\leq \frac{15}{81} - \frac{8 - \frac{16}{3}}{81 \cdot 2^{k-1} - 72} \\ &< \frac{15}{81} \qquad < \frac{16{,}2}{81} = \frac{1}{5}\,. \end{aligned}$$

Je größer k wird, desto kleiner wird der Anteil y_k der durch fünf teilbaren Zahlen. Im Grenzwert (für k gegen unendlich) nähert sich dieser Anteil von oben an $13/81$ an.