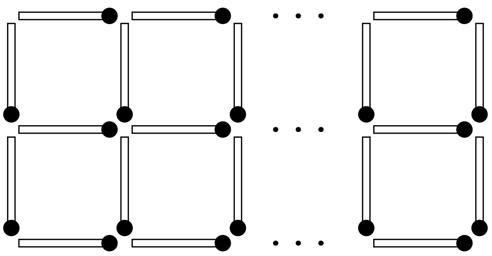
Mathematischer Korrespondenzzirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Beispiellösungen zu Blatt 95

Aufgabe 1

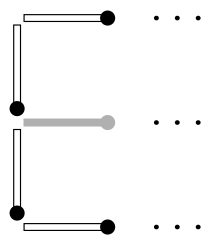
Aus Streichhölzern sind $2 \cdot (n-1)$ Quadrate gelegt.



Nun sollen einige Streichhölzer so entfernt werden, dass schließlich an jedem der $3n$ Eckpunkte genau zwei Streichhölzer anliegen.
Auf wie viele Arten ist dies möglich?

Lösung:

Wir betrachten zunächst die erste Spalte der Figur, wobei wir zu einer Spalte auch im Folgenden immer nur die beiden linken der senkrecht stehenden Streichhölzer zählen; die beiden rechten gehören zur nächsten Spalte. Für die erste Spalte hat man nur eine Möglichkeit, Hölzer mit dem gewünschten Ergebnis zu entfernen. Da in den Außenecken der Figur nur je zwei Hölzer anliegen, müssen die vier Außenseiten liegen bleiben und man muss offenbar das mittlere waagerechte Holz entnehmen.



Allgemein gilt: Für die zulässigen Konfigurationen einer Folgespalte sind nur die waagerecht liegenden Hölzer der aktuellen Spalte relevant.

Nun betrachten wir die beiden nächsten Spalten und unterscheiden nach den beiden senkrecht stehenden Hölzern der ersten der beiden Spalten:

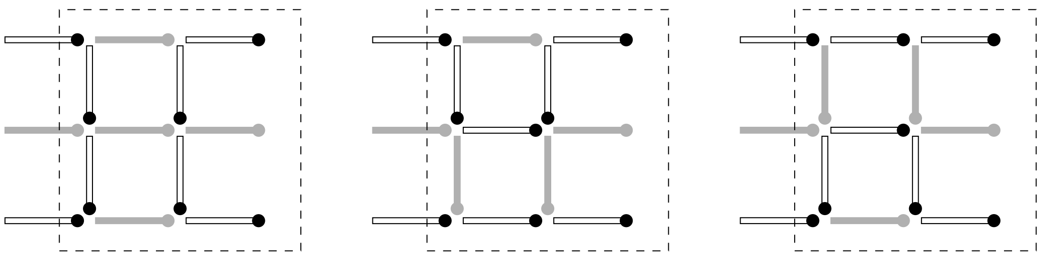


Abbildung 1: von links nach rechts: Fall 1–3

Fall 1: Entfernen wir keines dieser beiden, so müssen die drei anderen Hölzer dieser Spalte entfernt werden. Die zweite der beiden Spalten muss dann so

aussehen wie die Startspalte, das heißt genau das mittlere waagerechte Holz muss entfernt werden.
Fall 2: Wir entfernen das untere der beiden Hölzer. Von den waagerechten muss dann genau das obere entfernt werden und für die zweite der beiden Spalten bleibt nur die Möglichkeit, das mittlere waagerechte und das untere der senkrechten Hölzer zu entnehmen.
Fall 3: Wir entfernen das obere der beiden Hölzer. Dieser Fall ist genauso wie Fall 2, nur horizontal gespiegelt.
In allen drei Fällen ist man nun in derselben Ausgangssituation wie nach der Startspalte, das heißt von den waagerechten Hölzern der letzten Spalte ist nur das mittlere entfernt. Also hat man für den nächsten Block bestehend aus zwei Spalten wieder drei Möglichkeiten, Hölzer geeignet zu entfernen, und so weiter.

Falls n gerade ist, was einer ungeraden Anzahl von Spalten entspricht, so hat man für jeden Block à zwei Spalten drei Möglichkeiten, wobei es $n/2-1$ solcher Blöcke gibt. Die Hölzer der rechten Außenseite der Figur müssen offenbar liegen bleiben. Insgesamt macht das $3^{n/2-1}$ Möglichkeiten.

Falls n ungerade ist, gibt es keine Lösung, die die Forderung erfüllt. Um dies einzusehen, genügt es, $n=3$ zu betrachten, d. h. nur zwei Spalten insgesamt. Um die Bedingung der Aufgabe für die Außeneckpunkte zu erfüllen, müssten genau die vier innen liegenden Hölzer entnommen werden; dann ist die Bedingung für den Inneneckpunkt jedoch nicht erfüllt.

Variante: Dass es für ungerades n keine Lösung gibt, kann man auch mit einem Färbeargument einsehen: Wir färben die Eckpunkte abwechselnd schwarz und weiß. Dann verbindet jedes Streichholz einen schwarzen mit einem weißen Punkt. Weil nach Voraussetzung bei einer Lösung an jedem Eckpunkt gleich viele Streichhölzer anliegen, nämlich genau zwei, folgt daraus, dass es gleich viele schwarze und weiße Punkte geben muss. Für ungerades n ist das jedoch nicht der Fall.

Aufgabe 2

In der Hitliste bei „Radio Dauerwelle“ werden jede Woche die Top-10 ermittelt. Angenommen, ein Lied wird dabei, sobald es in der Rangliste einmal gesunken ist, nie mehr an Popularität zunehmen, sondern gleichbleiben oder weitersinken. Wie viele Wochen können dann vergehen, während denen dieselben zehn Lieder in der Hitliste sind, aber niemals in der gleichen Reihenfolge?

Lösung:

Es können auf diese Art genau 46 Wochen lang dieselben zehn Lieder in verschiedenen Reihenfolgen in den Top-10 liegen.

Da kein Lied wieder steigen darf, nachdem es einmal abgesunken war, kann es von jedem Platz aus höchstens einmal absinken. Ein Lied, das in der letzten

Woche auf Platz n liegt, kann daher höchstens von den zwischenzeitlichen Plätzen $1, 2, \ldots, n-1$ aus abgesunken sein, also höchstens $n-1$ Mal.
Das Lied, das in der letzten Woche auf Platz 10 liegt, kann daher höchstens 9 Mal abgesunken sein und das Lied mit Endplatz 9 höchstens 8 Mal (dabei dürfte es in der Startwoche zwar auf dem 10. Platz gelegen haben, aber es darf, wie gesagt, nie dorthin abgesunken sein). Analog gilt dies für alle weiteren Plätze. Das Lied, das am Ende auf Platz 1 liegt, kann gar nicht gesunken sein.
Insgesamt können die 10 Lieder also höchstens $9 + 8 + \ldots + 1 = 45$ Mal abgesunken sein. Und da jede Woche mindestens ein Lied absteigt, können unter diesen Umständen zusammen mit der Startwoche höchstens $45+1 = 46$ Wochen vergehen.

Nun bleibt noch zu zeigen, dass es tatsächlich einen Verlauf der Top-10 gibt, der 45 Platzverluste realisiert. Ein Beispiel hierfür ist der folgende Ablauf:
In den ersten 9 Wochen nach der Startwoche sinkt die ursprüngliche Nummer 1 um jeweils einen Platz ab; die anderen bleiben untereinander in derselben Ordnung. In den darauffolgenden 8 Wochen fällt die ursprüngliche Nummer 2 um jeweils einen Platz und so weiter. In der 46. Woche fällt schließlich die ursprüngliche Nummer 9 um einen Platz, nämlich unter die ursprüngliche Nummer 10, die damit auf Platz 1 endet.

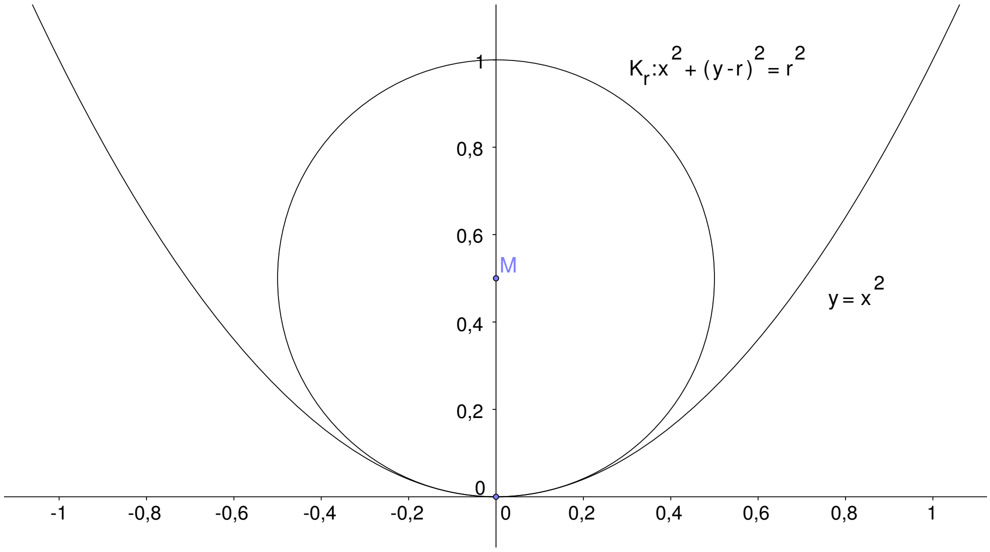
Aufgabe 3

Eine Eisschüssel hat die Form eines Normal-Paraboloides (der Graph der Funktion $y = x^2$ wird um die y-Achse rotiert und bei genügend großem x abgeschnitten).
Wie groß darf eine Eiskugel höchstens sein, damit sie, wenn man sie in die Schüssel legt, den tiefsten Punkt der Schüssel berührt?

Lösung:

Da die Eisschüssel per Definition rotationssymmetrisch ist, genügt es, einen zweidimensionalen Schnitt entlang der Rotationsachse der Parabel zu betrachten.
Wir wählen das Koordinatensystem so, dass der Scheitelpunkt der Parabel im Ursprung liegt, und betrachten Kreise K_r mit Mittelpunkt $(0, r)$ und Radius r für $r > 0$. Für sehr kleine Radien r liegt der Kreis K_r vollständig innerhalb der Parabel und hat neben dem Punkt $(0, 0)$ keine weiteren gemeinsamen Punkte mit der Parabel. Eine zur eigentlichen Fragestellung äquivalente Aufgabe ist es nun, den maximalen Radius zu finden, bei dem sich Kreis und Parabel gerade noch nicht schneiden, sondern höchstens berühren. Gäbe es einen echten Schnittpunkt, so bedeutete dies für das ursprüngliche Eisbecherproblem, dass die Kugel den Becher ausbeulen müsste, um gleichzeitig den tiefsten Punkt zu berühren.

Die untere Hälfte des Kreises K_r wird durch die Funktion $y = r - \sqrt{r^2 - x^2}$, $-r \leq x \leq r$, beschrieben. Die Bedingung, dass die Kreislinie überhalb der



Parabel liegt, lässt sich also schreiben als

$$r - \sqrt{r^2 - x^2} \geq x^2$$
$$\iff r - x^2 \geq \sqrt{r^2 - x^2} \tag{1}$$

für alle $-r \leq x \leq r$. Insbesondere muss also $r - r^2 \geq \sqrt{r^2 - r^2} = 0$ gelten. Dies ist nur möglich wenn r zwischen 0 und 1 liegt, wovon wir im Folgenden ausgehen. Dann können wir (1) quadrieren, ohne dass dabei die Lösungsmenge verändert wird, und (1) ist äquivalent zu

$$r^2 - 2rx^2 + x^4 - r^2 + x^2 \geq 0$$
$$\iff x^2(x^2 + (1 - 2r)) \geq 0\,.$$

Die Nullstellen von $x^2(x^2 + (1 - 2r))$ sind $x_1 = 0$ und $x_{2/3} = \pm\sqrt{2r - 1}$, wobei $x_{2/3}$ nur dann reelle Lösungen sind, wenn $r \geq \frac{1}{2}$ gilt. Für $r = \frac{1}{2}$ fallen die beiden Stellen zusammen und es handelt sich um einen Berührpunkt von Parabel und Kreis, während es sich für $r > \frac{1}{2}$ um echte Schnittpunkte handelt.

Also berührt eine Kugel den tieftsten Punkt des Eisbechers genau dann, wenn ihr Radius kleiner oder gleich $\frac{1}{2}$ ist.

Variante: Wir können die Aufgabe auch lösen, indem wir nur die rechte Hälfte der Figur anschauen: Der Kreis liegt genau dann innerhalb der Parabel, wenn für festes y die Parabel rechts vom Kreis liegt. Ein bisschen bedeutet diese Sichtweise, x (oder genauer x^2) als Funktion von y darzustellen. Für die Parabel gilt $x^2 = y$ für $y \geq 0$ und für den Kreis $x^2 = r^2 - (y - r)^2 = y(2r - y)$ für $0 \leq y \leq 2r$. Wir suchen also diejenigen Radien r, für die

$$y(2r - y) \leq y \qquad \text{für alle } y \text{ mit } 0 \leq y \leq 2r$$

gilt. Dies ist für $y = 0$ auf jeden Fall erfüllt, also können wir durch y teilen und erhalten die äquivalente Bedingung

$$r \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y \qquad \text{für alle } y \text{ mit } 0 < y \leq 2r\,.$$

Diese Ungleichung muss insbesondere für sehr kleine (positive) y erfüllt sein und ist daher äquivalent zu $r \leq \frac{1}{2}$.

Aufgabe 4

Seien a und b ungerade positive Zahlen und sei $a < b$. Zeige:

$$\operatorname{ggT}(a, b) \cdot \operatorname{ggT}(a+1, b+1) \cdot \operatorname{ggT}(a+2, b+2) \leq b - a\,.$$

Lösung:

Wir zeigen, dass das linke Produkt sogar ein Teiler von $b-a$ ist. Aus $b-a > 0$ folgt dann sofort die Behauptung.

Ist t ein gemeinsamer Teiler zweier ganzer Zahlen x und y, so gibt es ganze Zahlen x' und y' mit $tx' = x$ und $ty' = y$. Für die Summe und die Differenz von x und y gilt dann $x \pm y = t(x' \pm y')$. Damit ist t auch ein Teiler von $x+y$ und von $x-y$. Da $y = (y-x) + x$ gilt, haben wir somit

$$\operatorname{ggT}(x, y) = \operatorname{ggT}(x, y-x)$$

für alle ganzen Zahlen x und y bewiesen.

Wenden wir dies auf jeden ggT-Faktor unseres Produktes an, so erhalten wir

$$\begin{aligned}&\operatorname{ggT}(a, b) \cdot \operatorname{ggT}(a+1, b+1) \cdot \operatorname{ggT}(a+2, b+2)\\ &\qquad = \operatorname{ggT}(a, b-a) \cdot \operatorname{ggT}(a+1, b-a) \cdot \operatorname{ggT}(a+2, b-a)\,.\end{aligned}$$

Da a ungerade ist, sind $a, a+1$ und $a+2$ paarweise teilferfremd; ein gemeinsamer Faktor müsste nämlich die Differenz $(a+1)-a = 1$, $(a+2)-(a+1) = 1$ oder $(a+2)-a = 2$ teilen.
Damit müssen aber auch die drei Faktoren $\operatorname{ggT}(a, b-a)$, $\operatorname{ggT}(a+1, b-a)$ und $\operatorname{ggT}(a+2, b-a)$ teilerfremd sein.
Da außerdem jede dieser Zahlen ein Teiler von $b-a$ ist, muss auch das Produkt $\operatorname{ggT}(a, b-a) \cdot \operatorname{ggT}(a+1, b-a) \cdot \operatorname{ggT}(a+2, b-a)$ dieser paarweise teilerfremden Zahlen ein Teiler von $b-a$ sein.

Das letzte Argument, dass das Produkt paarweise teilerfremder Teiler einer Zahl wiederum ein Teiler dieser Zahl ist, folgt im Wesentlichen daraus, dass jede positive ganze Zahl eine eindeutige Primfaktorzerlegung besitzt. Zur ausführlicheren Begründung sei

$$b - a = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \ldots p_n^{e_n}$$

die Primfaktorzerlegung von $b-a$ mit den verschiedenen Primfaktoren p_i (mit positivem Exponenten e_i). Jeder Teiler t von $b-a$ enthält dann nur solche Primfaktoren, die auch in $b-a$ vorkommen, und für seine Primfaktorzerlegung gilt $t = p_1^{f_1} p_2^{f_2} \ldots p_n^{f_n}$ mit $0 \leq f_i \leq e_i$ für alle i. Seien

$$\begin{aligned}\operatorname{ggT}(a, b-a) &= p_1^{u_1} p_2^{u_2} \ldots p_n^{u_n}\\ \operatorname{ggT}(a+1, b-a) &= p_1^{v_1} p_2^{v_2} \ldots p_n^{v_n}\\ \operatorname{ggT}(a+2, b-a) &= p_1^{w_1} p_2^{w_2} \ldots p_n^{w_n}\end{aligned}$$

die Primfaktorzerlegungen der drei Faktoren. Dann gilt also $0 \leq u_i, v_i, w_i \leq e_i$ für alle i.
Da außerdem die drei Faktoren paarweise teilerfremd sind, kann jeweils höchstens einer der drei Exponenten u_i, v_i, w_i ungleich 0 sein und somit gilt auch $0 \leq u_i + v_i + w_i \leq e_i$. Folglich ist auch

$$\begin{aligned}
&\operatorname{ggT}(a, b) \cdot \operatorname{ggT}(a+1, b+1) \cdot \operatorname{ggT}(a+2, b+2) \\
&= \operatorname{ggT}(a, b-a) \cdot \operatorname{ggT}(a+1, b-a) \cdot \operatorname{ggT}(a+2, b-a) \\
&= p_1^{u_1+v_1+w_1} p_2^{u_2+v_2+w_2} \dots p_n^{u_n+v_n+w_n}
\end{aligned}$$

ein Teiler von $b - a$, ganz wie behauptet.