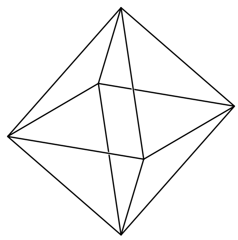
Mathematischer Korrespondenz-zirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Beispiellösungen zu Blatt 96

Aufgabe 1

Gegeben sei ein Oktaeder. Auf dessen Kanten suchen wir Wege von einer Ecke zu einer anderen, bei denen keine Ecke mehr als einmal berührt werden darf.



Gibt es von A aus mehr solche Wege zu B oder zu C?

Lösung:

Wir beginnen mit der Anzahl der Wege von A nach C und lassen dazu einen Weg gedanklich am Start- und Zielpunkt gleichzeitig beginnen. Für den ersten Schritt gibt es jeweils vier Möglichkeiten (vier Kanten laufen in A und C zusammen); das macht bereits 16 mögliche Kombinationen. Da der Weg nicht erneut über A oder C gehen darf, müssen wir nur noch die Möglichkeiten zählen, die beiden Wegteile über Kanten in der quadratischen Grundfläche zu verbinden. In vier der 16 Fälle treffen sich die beiden Startkanten in ein und demselben Punkt und der Weg ist bereits abgeschlossen. In den übrigen 12 Fällen gibt es jeweils zwei Arten, den Weg zu schließen: im Uhrzeigersinn oder gegen den Uhrzeigersinn.
Zusammen macht das $4 + 2 \cdot 12 = 28$ mögliche Wege.

Für die Wege von A nach B bezeichnen wir die noch nicht benannten Eckpunkte von B ausgehend im Uhrzeigersinn mit D, E und F.
Führt der erste Schritt von A nach E, so befinden wir uns in einer ähnlichen Situation wie oben, nur dass die Figur um $90°$ gedreht ist und die Wege von E nach A sowie von B nach A nicht mehr zulässig sind. Außerdem hat man keine Wahl, in welcher Richtung man den Weg auf der quadratischen Grundfläche $AFCD$ schließt, da man Punkt A nicht erneut berühren darf. Also gibt es lediglich $3 \cdot 3 = 9$ Wege von E nach B, ohne A zu berühren.
Führt der erste Schritt nach D, so gibt es von dort aus zwei Wege nach B ohne Benutzung von C, zwei Wege über C, aber ohne E, und vier Wege über C und E; also insgesamt acht. Der Fall, wo der erste Schritt nach F führt, ist hierzu spiegelsymmetrisch und liefert somit ebenfalls acht mögliche Wege.
Zusammen mit dem direkten Weg von A nach B gibt es $9 + 8 + 8 + 1 = 26$ mögliche Wege, das sind zwei weniger als von A nach C.

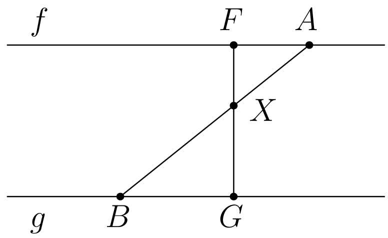
Variante: In der Aufgabenstellung ist ja nur danach gefragt, zu welchem der Punkte B und C es *mehr* Wege gibt. Daher bestimmen wir in dieser Alternativlösung nicht die genauen Anzahlen an Wegen, sondern wirklich nur die Differenz der Anzahlen.
Wir stellen fest: Es gibt offensichtlich genauso viele Wege von A nach B, die C nicht berühren, wie es Wege von A nach C gibt, bei denen C von B aus erreicht wird. Umgekehrt gibt es genauso viele Wege von A nach C, bei denen B nicht berührt wird, wie es Wege von A nach B gibt, bei denen B von C aus erreicht wird.
Alle diese Wege können wir daher aus unserer Betrachtung ausschließen.
Wir brauchen also bei den Wegen von A nach B nur noch diejenigen zu suchen, die C berühren, aber bei denen es nicht direkt von C nach B geht. Aus Symmetriegünden reicht es, die Wege zu betrachten, bei denen B von der vorderen Ecke des Oktaeders aus erreicht wird. Wenn die vordere Ecke direkt von C aus erreicht wird, gibt es 4 Möglichkeiten, von A nach C zu gelangen. Wenn die vordere Ecke nicht von C aus erreicht wird, muss sie von der linken aus erreicht werden, und da man von A auch noch nach C kommen können muss, gibt es dann nur noch eine Möglichkeit: Es geht von A über die hintere Ecke zu C, von dort zur linken Ecke und über die vordere zu B. Zusammen mit der Symmetrie ergeben sich so $2 \cdot (4+1) = 10$ Möglichkeiten.
Bei den Wegen von A nach C brauchen wir entsprechend nur noch diejenigen zu zählen, die B berühren, bei denen es von B aus aber nicht direkt zu C geht. Wiederum aus Symmetriegründen reicht es, die Wege zu betrachten, bei denen es von B aus zur vorderen Ecke geht. Wenn es von dort direkt zu C geht, gibt es noch 3 Möglichkeiten, von A zu B zu kommen. Wenn es von der vorderen Ecke erst zur linken geht, gibt es noch 2 Möglichkeiten, von A zu B zu kommen. Wenn es von B aus schließlich noch weiter herum zur hinteren Ecke geht, muss es von dort aus zu C gehen, und es geht von A direkt zu B, was eine letzte Möglichkeit ergibt. Zusammen sind das $2 \cdot (3 + 2 + 1) = 12$ Möglichkeiten.
Damit gibt es zwei Wege mehr von A zu C als von A zu B.

Aufgabe 2

Zwischen zwei parallelen Geraden f und g sei eine Strecke AB gezeichnet, mit A auf f und B auf g. Außerdem sollen die Punkte F auf f und G auf g so liegen, dass die Strecke FG senkrecht auf f und g steht und dass $|AF| + |BG| = |AB|$ ist.
Zeige: Die Winkelhalbierenden der beiden Winkel $\angle GBA$ und $\angle BAF$ schneiden sich auf FG.

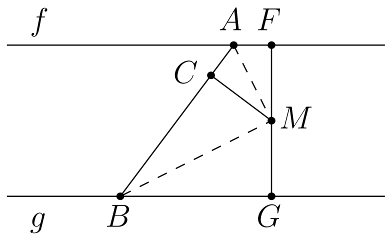
Lösung:

Zunächst stellen wir fest, dass A und B bezüglich der Geraden (FG) nicht auf verschiedenen Seite liegen können. Denn wäre das der Fall, würden sich die Strecken AB und FG in einem Punkt X schneiden:



Da die Strecken AX und BX in den rechtwinkligen Dreiecken FXA bzw. XBG jeweils die Hypotenuse sind, gälte dann $|AX| > |AF|$ und $|BX| > |BG|$, was mit der Voraussetzung $|AF| + |BG| = |AB|$ den Widerspruch $|AX| + |BX| = |AB| = |AF| + |BG| < |AX| + |BX|$ ergibt.

Damit liegen A und B bezüglich (FG) auf derselben Seite.



Nach Voraussetzung gibt es auf AB einen Punkt C, für den $|AC| = |AF|$ und damit ebenso $|BC| = |BG|$ gilt. In diesem Punkt sei eine Senkrechte zu AB gezeichnet, ihr Schnittpunkt mit (FG) sei mit M bezeichnet. Da C und F bezüglich der Halbierenden des Winkels $\angle BAF$ symmetrisch liegen und $AF \perp FG$ und $AC \perp CM$ gilt, liegt M aus Symmetriegründen auf derselben Seite von f wie G, und es ist $|CM| = |FM|$. Ebenso liegt M auf derselben Seite von g wie F, und ebenso ist $|CM| = |GM|$. Damit liegt M nicht nur im Inneren der Strecke FG, sondern ist sogar deren Mittelpunkt.
Die Halbierende des Winkels $\angle BAF$ geht als Symmetrieachse des Drachenvierecks $ACMF$ durch M. Gleichfalls geht die Halbierende des Winkels $\angle GBA$ durch M. Somit ist nicht nur gezeigt, dass sich diese beiden Winkelhalbierenden auf FG schneiden, sondern dass sie sich immer im Mittelpunkt von FG schneiden.

Aufgabe 3

Wir nehmen einmal an, dass wir im alten Rom wären – weil dort ein neues Jahr bekanntlich mit dem März begann. Und wir nehmen weiter an, dass es damals von Interesse war, neben dem üblichen Datum in Form des Tages d_{M} des laufenden Monats und der Monatszahl m auch die Nummer d_{J} des Tages im gesamten Jahr zu wissen. (Zum Beispiel wollten vielleicht Steuereinnehmer wissen, für wie viele Tage sie bereits Steuern erheben konnten ...) Der 5. April zum Beispiel wäre als 5. Tag des zweiten Monats dann der 36. Tag des Jahres. Zur Bestimmung von d_{J} wäre nun sicherlich eine Formel der folgenden Art sehr praktisch:

$$d_{\mathrm{J}} = \lfloor m \cdot x \rfloor - c + d_{\mathrm{M}}$$

Dabei steht $\lfloor\quad\rfloor$ für das normale Abrunden auf eine ganze Zahl, und c soll eine ganzzahlige Konstante sein.
Welche Werte kann x annehmen, wenn die Formel für das ganze römische Jahr gültig sein soll?

Lösung:

Die Formel ist genau für solche x mit

$$30{,}58\overline{3} = 30\frac{7}{12} \leq x < 30\frac{3}{5} = 30{,}6$$

das ganze Jahr gültig; in allen Fällen muss $c = \lfloor x \rfloor = 30$ gewählt werden.

Wir bezeichnen mit $t(m)$ die Anzahl der Tage im Monat m und mit $s(m)$ die Anzahl der Tage, die in den Monaten vor m bereits vergangen sind. Letzere können wir aus den Angaben des Vormonats als $s(m) = s(m-1)+t(m-1)$ für $m \geq 2$ berechnen. Für den Tag d_M des Monats m gilt dann $d_\mathrm{J} = s(m) + d_\mathrm{M}$.

Die Formel $d_\mathrm{J} = \lfloor m \cdot x \rfloor - c + d_\mathrm{M}$ ist daher genau dann für alle Tage des Jahres richtig, wenn $\lfloor m \cdot x \rfloor - c = s(m)$ für alle $m = 1, 2, \ldots, 12$ gilt.

Sei zuerst $30\frac{7}{12} \leq x < 30{,}6$ und $c = 30$. Dann gilt:

Monat	m	$t(m)$	$s(m)$	$m \cdot x$	$\lfloor m \cdot x \rfloor - c$
März	1	31	0	$30\frac{7}{12} \leq x < 30{,}6$	0
April	2	30	31	$61\frac{2}{12} \leq x < 61{,}2$	31
Mai	3	31	61	$91\frac{9}{12} \leq x < 91{,}8$	61
Juni	4	30	92	$122\frac{4}{12} \leq x < 122{,}4$	92
Juli	5	31	122	$152\frac{11}{12} \leq x < 153{,}0$	122
Aug.	6	31	153	$183\frac{6}{12} \leq x < 183{,}6$	153
Sep.	7	30	184	$214\frac{1}{12} \leq x < 214{,}2$	184
Okt.	8	31	214	$244\frac{8}{12} \leq x < 244{,}8$	214
Nov.	9	30	245	$275\frac{3}{12} \leq x < 275{,}4$	245
Dez.	10	31	275	$305\frac{10}{12} \leq x < 306{,}0$	275
Jan.	11	31	306	$336\frac{5}{12} \leq x < 336{,}6$	306
Feb.	12	28 (29)	337	$367\frac{0}{12} \leq x < 367{,}2$	337

Sei nun x irgendeine Lösung. Insbesondere muss für $m = 1$ dann $\lfloor x \rfloor - c = s(1) = 0$ und damit

$$c \leq x < c + 1$$

gelten.

Für $m = 12$ ergibt sich $\lfloor 12x \rfloor - c = s(12) = 337$ und damit

$$\begin{aligned} 337 \leq 12x - c < 12c + 12 - c &= 11c + 12 \qquad (1) \\ 29\frac{6}{11} = \frac{325}{11} &< c \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 337 > 12x - 1 - c \geq 12c - 1 - c &= 11c - 1 \\ 30\frac{8}{11} = \frac{338}{11} &> c\,. \end{aligned}$$

Folglich gilt $c = 30$ (und $30 \leq x < 31$ ist somit auch schon klar). Aus der Gleichung (1) erhalten wir außerdem auch die untere Schranke für x, nämlich

$$\begin{aligned} 12x &\geq 337 + c = 367 \\ x &\geq \frac{367}{12} = 30\frac{7}{12} = 30{,}58\overline{3}\,. \end{aligned}$$

Für $m = 5$ ergibt sich $\lfloor 5x \rfloor - c = s(5) = 122$ und damit

$$\begin{aligned} 5x - 1 < \lfloor 5x \rfloor &= 152 \\ x &< \frac{153}{5} = 30\frac{3}{5} = 30{,}6 \end{aligned}$$

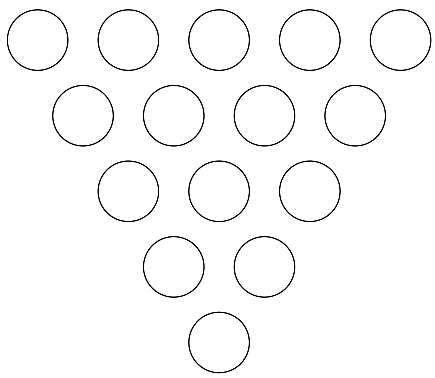
als obere Schranke für x.

Insgesamt haben wir damit bewiesen, dass genau für x mit $30{,}58\overline{3} \leq x < 30{,}6$ die Formel $d_{\mathrm{J}} = \lfloor m \cdot x \rfloor - c + d_{\mathrm{M}}$ für alle Tage des Jahres gültig ist.

Bemerkung: Die Auswahl von $m = 12$ und $m = 5$ zur Bestimmung der beiden Grenzen mag etwas willkürlich erscheinen. Jedes m von 1 bis 12 liefert (analog zu den Rechnungen für $m = 12$) für diesen Monat m gültige obere und untere Schranken an x. Davon haben wir die kleinste obere Schranke und die größte untere Schranke ausgesucht.

Aufgabe 4

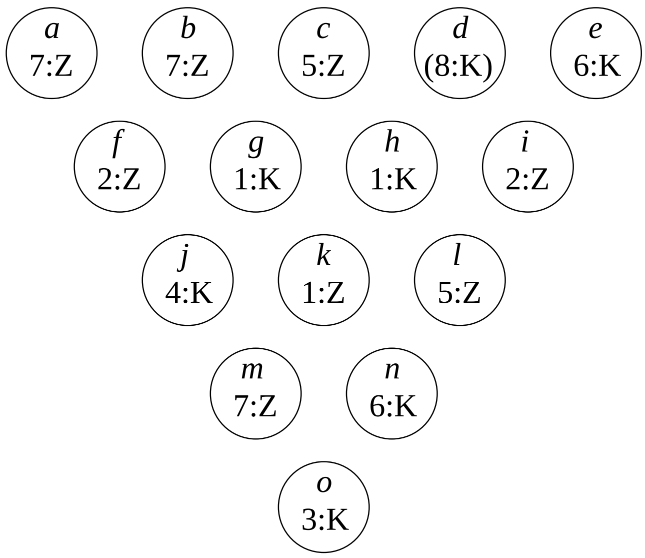
15 Euro-Münzen werden geworfen und dann zu einem gleichseitigen Dreieck mit je 5 Münzen an jeder Seite auf den Tisch gelegt.



Gibt es dann auf jeden Fall drei Münzen, die alle Kopf oder alle Zahl zeigen und die ein gleichseitiges Dreieck bilden, dessen Kanten parallel zu den Kanten des großen Dreiecks liegen?
Ändert sich die Antwort, wenn man nur die Dreiecke mit parallelen Kanten betrachtet, bei denen die Spitze nach unten zeigt? Oder nur die, bei denen die Spitze nach oben zeigt?

Lösung:

Wir zeigen, dass in jedem Fall ein Dreieck gleich liegender Münzen existiert, dessen Spitze nach unten zeigt. Damit sind die ersten beiden Fragen beantwortet.
Zum Beweis nehmen wir an, dass es eine Konstellation gibt, bei der es kein solches Dreieck gibt. Wir benennen jede Münze mit einem Kleinbuchstaben von a bis o. Bei jeder Münze in der folgenden Skizze ist Kopf (K) oder Zahl (Z) ausgewählt, außerdem ist mit einer Nummer bezeichnet, in welcher Reihenfolge auf die gezeigte Verteilung geschlossen wurde.



Allgemein sei noch festgestellt, dass es keine drei Münzen mit gleicher oberer Seite in einer direkten Reihe geben kann. Denn zu einer der beiden Seiten dieser Dreierreihe lässt sich die Reihe zu einem Dreieck vervollständigen; die drei neuen Münzen darin müssten einerseits sämtlich die entgegengesetzte Seite zeigen, weil sie ansonsten zusammen mit zwei Münzen der Dreierreihe ein gleich liegendes Dreieck ergäben, andererseits würden dann diese drei Münzen selbst ein solches Dreieck bilden.
Nun zur eigentlichen Herleitung: Von den drei Münzen g, h und k müssen zwei dieselbe Seite zeigen, die dritte die andere. Wir können ohne Einschränkung annehmen (indem wir auch gegebenenfalls die Figur drehen), dass g und h Kopf zeigen, während k Zahl zeigt. Daraus folgt, dass f und i Zahl zeigen müssen. Das wiederum erzwingt für o Kopf. Die Münzen j und l können nach der obigen Feststellung nicht beide Zahl zeigen. Wegen der bisherigen Symmetrie sei ohne Einschränkung angenommen, dass j Kopf zeigt. Aus

$j = \mathrm{K}$ und $g = \mathrm{K}$ folgt $c = \mathrm{Z}$, aus $j = \mathrm{K}$ und $o = \mathrm{K}$ folgt $l = \mathrm{Z}$. Daraus und aus $k = \mathrm{Z}$ ergibt sich $n = \mathrm{K}$, und mit $i = \mathrm{Z}$ folgt $e = \mathrm{K}$. Die Münzen e, n und o erzwingen $a = \mathrm{Z}$, $b = \mathrm{Z}$ und $m = \mathrm{Z}$. Nun bilden a, b und f aber ein Dreieck mit gleich liegenden Münzen, im Widerspruch zur Annahme.
(Ließe man a weg, könnte man d auf K drehen und hätte immerhin eine Anordnung von 14 Münzen ohne gleich liegendes Dreieck mit Spitze nach unten und sogar auch ohne ein solches mit Spitze nach oben.)
Es gibt also in jedem Fall ein Dreieck, dessen Spitze nach unten zeigt und dessen Münzen alle dieselbe Seite zeigen.

Für die dritte Teilfrage ist die Antwort sehr einfach, denn die eben konstruierte Konstellation enthält auch mit Münze a kein gleich liegendes Dreieck mit der Spitze nach oben.