

Beispiellösungen zu Blatt 97

Aufgabe 1

Herr Schmidt arbeitet in einer Stiftefabrik und muss laut Vertrag 8 Stunden pro Tag arbeiten. Momentan ist er in der Kugelschreiberabteilung eingesetzt, in der eine Fertigungseinheit 34 Minuten braucht. Er muss also immer etwas weniger oder etwas mehr als 8 Stunden am Tag arbeiten. Zu Beginn der Woche hat er 8 Minuten zu wenig auf dem Konto. Nach wie viel Tagen kann er am Ende des Tages frühestens ein ausgeglichenes Stundenkonto haben?

Lösung:

Herr Schmidt hat frühestens nach 15 Tagen wieder ein ausgeglichenes Stundenkonto.

Die Sollarbeitszeit von Herrn Schmidt beträgt in n Tagen $n \cdot 8 \cdot 60 = 480n$ Minuten. Wenn er in dieser Zeit k Fertigungseinheiten von Kugelschreibern fertigt, so hat er insgesamt $34k$ Minuten gearbeitet. Er hat genau dann nach n Tagen wieder ein ausgeglichenes Stundenkonto, wenn

$$\begin{aligned} 480n + 8 &= 8 \cdot 60 \cdot n + 8 = 34k \\ \iff 17 \cdot 14n + (2n + 4) &= 17k \end{aligned} \tag{1}$$

gilt; dabei wurden auf der linken Seite der ersten Gleichung die 8 Fehlminuten berücksichtigt, die Herr Schmidt noch ausgleichen muss. In der zweiten Gleichung sind die rechte Seite und links der erste Summand durch 17 teilbar, daher muss auch die restliche Teilsumme links durch 17 teilbar sein:

$$17 \mid 2n + 4. \tag{2}$$

Die ganzzahligen Vielfachen von 17 sind $0, \pm 17, \pm 34, \pm 51, \dots$. Da $2n + 4$ gerade und positiv ist, muss $2n + 4 \geq 34$ und damit $n \geq 15$ sein.

Arbeitet Herr Schmidt

$$\begin{aligned} &13 \text{ Tage à } (14 \text{ Einheiten} \hat{=} 476 \text{ min} = 8 \text{ h} - 4 \text{ min}) \text{ und} \\ &2 \text{ Tage à } (15 \text{ Einheiten} \hat{=} 510 \text{ min} = 8 \text{ h} + 30 \text{ min}), \end{aligned}$$

so gilt $n = 15$ und $k = 13 \cdot 14 + 2 \cdot 15 = 212$ und damit

$$480n + 8 = 480 \cdot 15 + 8 = 7208 = 34 \cdot 212 = 34k,$$

und das Stundenkonto von Herrn Schmidt ist nach diesen 15 Tagen wieder ausgeglichen.

Bemerkung: Die Gleichung (1) oder (2) können wir auch als Kongruenz modulo 17 schreiben, sie lautet dann

$$2n \equiv -4 \pmod{17}.$$

Da 2 und 17 teilerfremd sind, dürfen wir diese Kongruenz durch 2 teilen und es gilt

$$n \equiv -2 \equiv 15 \pmod{17}.$$

Da n eine positive ganze Zahl ist, erhalten wir auch hier $n \geq 15$.

Aufgabe 2

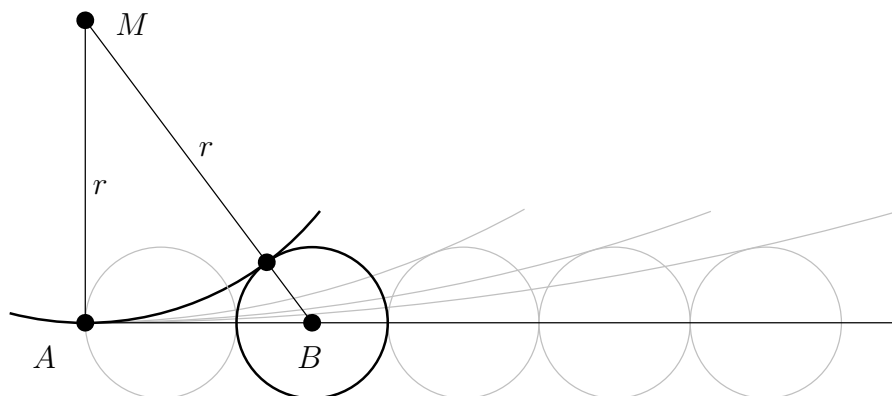
Kreise mit Radius 1 werden auf einer Geraden nach rechts aneinandergereiht und in Gedanken durchnummeriert. Dann werden weitere Kreise gezeichnet; diese sollen die Gerade dort tangieren, wo der linke Schnittpunkt des ersten Kreises mit der Geraden liegt, und sie sollen einen der anderen Kreise tangieren.

Welchen Radius hat der Kreis, der den n -ten Kreis auf der Geraden tangiert ($n \geq 2$)?

Lösung:

Für $n \geq 2$ hat der n -te große Kreis den Radius $2n(n-1)$.

Sei $n \geq 2$. Wir bezeichnen den linken Schnittpunkt des ersten kleinen Kreises mit der Geraden mit A , den Mittelpunkt des n -ten kleinen Kreises auf der Geraden mit B und den Mittelpunkt des n -ten großen Kreises mit M .



Der Abstand von M zu A ist der gesuchte Radius r des n -ten großen Kreises. Da alle kleinen Kreise den Radius 1 haben, haben A und B den Abstand $2(n-1) + 1 = 2n - 1$. Da sich der n -te große und der n -te kleine Kreis tangential berühren, haben M und B den Abstand $r + 1$. Da schließlich der große Kreis auch die Gerade tangential berührt, bilden A , B und M ein rechtwinkliges Dreieck und es gilt

$$(r+1)^2 = (2n-1)^2 + r^2.$$

Dies formen wir äquivalent um zu

$$r^2 + 2r + 1 = 4n^2 - 4n + 1 + r^2$$

$$2r = 4n(n - 1)$$

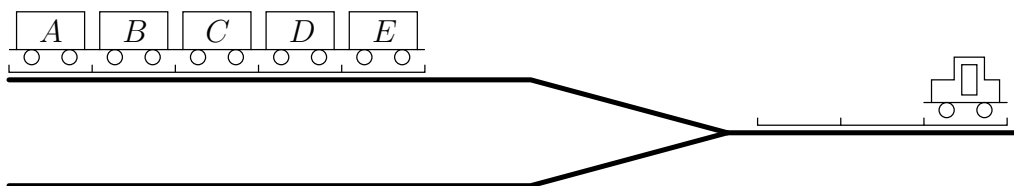
$$r = 2n(n - 1)$$

und erhalten wie behauptet, dass der n -te Kreis den Radius $r = 2n(n - 1)$ hat.

Aufgabe 3

Fünf Eisenbahnwagen A bis E sollen auf ein Nachbargleis so rangiert werden, dass sie dort wieder in derselben Reihenfolge A bis E stehen. Eine Lok steht bereit, aber leider kann im Moment nur so rangiert werden, dass die Lok maximal zwei Wagen auf das rechte Gleis zieht. Nun sollen die Wagen möglichst wenig bewegt werden; als eine Bewegung zählt dabei das Umsetzen auf das jeweils andere Gleis.

Wie viele Bewegungen müssen dafür mindestens ausgeführt werden? Oder kann man die Wagen gar nicht so umsetzen?



Lösung:

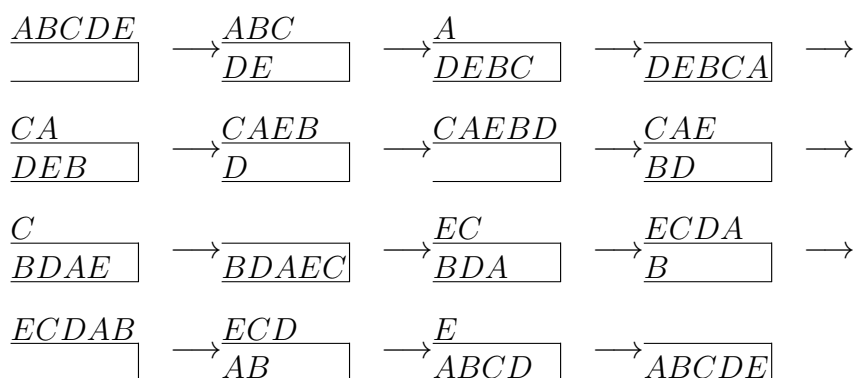
Wenn die Lokomotive nur jeweils einen Wagen nach rechts ziehen dürfte, dann wäre es in Bezug auf die Reihenfolge der Wagen so, als wären die beiden Abstellgleise auf der rechten Seite über einen Halbkreis miteinander verbunden. Man könnte an der Reihenfolge nichts ändern – die Wagen würden auf dem unteren Gleis genau andersherum stehen als oben.

In dieser Betrachtungsweise ist es also nötig, die Reihenfolge der Wagen umzukehren. Wenn die Lok zwei Wagen als Paar nach rechts zieht und auf das andere Gleis schiebt, dann tauschen genau diese beiden Wagen die Reihenfolge. Um die Reihenfolge komplett umzudrehen, muss jeder der fünf Wagen mit jedem anderen Wagen einmal die Reihenfolge tauschen. Das sind zehn einzelne Vertauschungen; so oft muss die Lok also mindestens zwei Wagen als Paar auf das andere Gleis rangieren.

Da es nur fünf Wagen sind, kann es nicht sinnvoll sein, mehr als zwei solcher Vertauschungen direkt hintereinander auszuführen – man müsste einen Tausch wieder rückgängig machen. Also muss mindestens viermal ein einzelner Wagen umgesetzt werden.

Nun muss jeder Wagen eine ungerade Anzahl oft rangiert werden. Bei einer insgesamt ungeraden Wagenanzahl muss daher die Anzahl an Einzelbewegungen ebenfalls ungerade sein, mithin hier mindestens 5.

Mit diesen Minimalanzahlen ist die Aufgabe aber auch tatsächlich lösbar:



Zählt man die Rangiervorgänge unabhängig davon, ob ein oder zwei Wagen bewegt werden, sind das 15 Bewegungen. Zählt man es doppelt, wenn zwei Wagen bewegt werden, dann kommt man auf 25 nötige Bewegungen.

Aufgabe 4

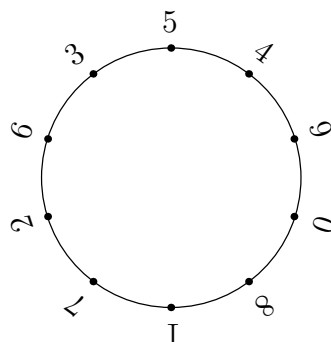
Die Zahlen von 0 bis 9 sollen in irgendeiner Reihenfolge im Kreis aufgeschrieben werden. Dann bildet man die zehn Summen jeweils zweier benachbarter Zahlen. Wie viele verschiedene Summenwerte entstehen dabei mindestens?

Lösung:

Wir beginnen mit der Feststellung, dass keine zwei benachbarten Summen $a + b$ und $b + c$ denselben Wert haben können. (Sonst müsste $a = c$ gelten.) Die Summe der Zahlen von 0 bis 9 ist 45, und da jede Zahl in zwei Summen auftaucht, ist die Summe der paarweisen Summen 90.

Nun nehmen wir an, es gäbe lediglich zwei verschiedene Summenwerte S_1 und S_2 . Aufgrund obiger Feststellung käme jeder Wert dann genau fünfmal vor und das arithmetische Mittel zwischen den beiden Summenwerten wäre 9. Für (S_1, S_2) kämen also die Tupel $(8, 10)$, $(7, 11)$, $(6, 12)$, usw. in Frage. Offenbar ist aber keines dieser Tupel realisierbar, da sich an der Stelle, an der die Null im Kreis steht, nur maximal die beiden Summenwerte 9 und 8 erzeugen lassen, was im Widerspruch dazu steht, dass sich S_1 und S_2 immer abwechseln müssen.

Es existieren daher mindestens drei verschiedene Summenwerte. Eine Konfiguration, bei der es auch wirklich nur drei sind, ist die folgende:



Hierbei kommen die Summen 8, 9 und 13 vor.