Mathematischer Korrespondenz-zirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Beispiellösungen zu Blatt 98

Aufgabe 1

Finde vier paarweise verschiedene positive ganze Zahlen a, b, c, d so, dass $a+b+c$, $a+b+d$, $a+c+d$ und $b+c+d$ alles Quadratzahlen sind. Gibt es unendlich viele solche Quadrupel (a, b, c, d)?

Lösung:

Zuerst stellen wir fest: Wenn (a, b, c, d) ein Quadrupel mit den gesuchten Eigenschaften ist, dann erfüllt auch (an^2, bn^2, cn^2, dn^2) die Bedingungen für jede positive ganze Zahl n, wie sich leicht überprüfen lässt: Sei zum Beispiel $a+b+c = q^2$ mit einer ganzen Zahl q. Dann ist auch $an^2+bn^2+cn^2$ eine Quadratzahl, denn es gilt $an^2+bn^2+cn^2 = (a+b+c)n^2 = (qn)^2$. Dies gilt analog für $a+b+d$, $a+c+d$ und $b+c+d$.
Hat man also ein Quadrupel mit den gesuchten Eigenschaften gefunden, so gibt es unendlich viele solcher Quadrupel.
Ein Quadrupel, das alle Bedingungen erfüllt, ist beispielsweise $(1, 22, 41, 58)$, denn es ist

$$\begin{aligned} 1+22+41 &= 8^2\,, \\ 1+22+58 &= 9^2\,, \\ 1+41+58 &= 10^2\,, \\ 22+41+58 &= 11^2\,. \end{aligned}$$

Also gibt es unendlich viele solcher Quadrupel.

Zusatz: Quadrupel, die sich nur um einen gemeinsamen Faktor unterscheiden, sind nicht wesentlich verschieden. Es gibt aber auch unendlich viele wesentlich verschiedene Quadrupel, wie wir noch zeigen wollen:
Dazu nehmen wir an, dass wir eine Lösung

$$a+b+c = r^2\,, \tag{1}$$
$$a+b+d = s^2\,, \tag{2}$$
$$a+c+d = t^2\,, \tag{3}$$
$$b+c+d = u^2 \tag{4}$$

hätten, bei der der Übersichtlichkeit halber

$$a < b < c < d \quad \text{bzw. äquivalent} \quad r < s < t < u$$

gilt. Addiert man (1), (2) und (3) und zieht davon zweimal (4) ab, so erhält man die notwendigerweise gültige Beziehung

$$3a = r^2 + s^2 + t^2 - 2u^2\,.$$

Für b, c und d ergeben sich ähnliche Gleichungen.
Damit diese Gleichungen positive ganze Zahlen ergeben, müssen die rechten Seiten jeweils positiv und durch 3 teilbar sein. Für die Positivität ist, weil u^2 die größte der Quadratzahlen ist,

$$u^2 < \frac{3}{2}r^2 < \frac{1}{2}(r^2 + s^2 + t^2)$$

hinreichend. Und da Quadratzahlen beim Teilen durch 3 nur die Reste 0 oder 1 lassen können, ist es für die Teilbarkeit hinreichend, wenn genau eine der vier Zahlen r, s, t und u durch 3 teilbar ist.
Für $5 \leq k$ ist

$$\frac{(3k+4)^2}{(3k+1)^2} = \frac{9k^2 + 24k + 16}{9k^2 + 6k + 1} \leq \frac{\frac{27}{2}k^2 + \frac{3}{2}k + 16}{9k^2 + 6k + 1} \leq \frac{\frac{27}{2}k^2 + \frac{9}{2}k + 1}{9k^2 + 6k + 1} < \frac{3}{2}\,,$$

daher liefern mit $k \geq 5$ alle Quadrupel

$$(r, s, t, u) = (3k+1, 3k+2, 3k+3, 3k+4)$$

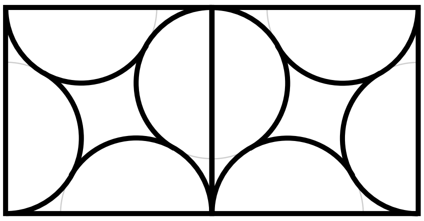
eine Lösung, nämlich jeweils das Quadrupel

$$(a, b, c, d) = (3k^2 - 4k - 6,\ 3k^2 + 2k + 1,\ 3k^2 + 8k + 6,\ 3k^2 + 14k + 9)\,.$$

Viele weitere Quadrupel lassen sich so finden.

Aufgabe 2

Ein gotisches Fries-Muster (gesehen im Überlinger Münster; etwas vereinfacht) hat die folgende Struktur:



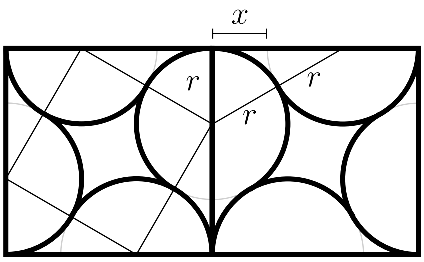
Die Kreisbogenabschnitte liegen auf Halbkreisbögen (hier zur Deutlichkeit noch grau ausgeführt) und berühren einander tangential.

Wenn die Quadrate jeweils Seitenlänge 1 haben, welchen Flächeninhalt hat dann jeweils der vierstrahlige Stern in der Mitte?

Lösung:

Der vierstrahlige Stern hat den Flächeninhalt $\frac{1}{2}(4 - \pi)(2 - \sqrt{3}) \approx 0{,}115\ldots$

Sei r der Radius der Halbkreisbögen, und sei x der Teil einer Quadratseite, der nicht Durchmesser eines Halbkreisbogens ist. Dann gilt $x + 2r = 1$ bzw. $x = 1 - 2r$. Da die Halbkreisbögen einander tangential berühren, haben die Mittelpunkte zweier benachbarter Halbkreise den Abstand $2r$ und bilden mit



dem nächstliegenden Quadrateckpunkt ein rechtwinkliges Dreieck. Nach dem Satz des Pythagoras gilt somit

$$(2r)^2 = r^2 + (r+x)^2 .$$

Setzen wir $x = 1 - 2r$ ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} 4r^2 &= r^2 + (1-r)^2 = r^2 + 1 - 2r + r^2 \\ \Leftrightarrow \qquad 0 &= r^2 + r - \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

Diese quadratische Gleichung hat nach der p-q-Formel die beiden Lösungen $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ und $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$. Als Radius ist r positiv, sodass sich eindeutig

$$\begin{aligned} r &= \frac{\sqrt{3}-1}{2} \approx 0{,}366\ldots \\ r^2 &= \frac{1}{2} - r = \frac{2-\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

ergibt.
Die Mittelpunkte der vier Halbkreise eines Quadrates bilden ein Quadrat mit Seitenlänge $2r$. Die Spitzen des vierstrahligen Sterns liegen auf den Seiten dieses kleineren Quadrates. Die nicht zum Stern gehörigen Stücke in den Ecken dieses Quadrates sind jeweils Viertelkreise, die zusammen den Flächeninhalt eines Vollkreises mit Radius r haben. Somit hat der Stern den Flächeninhalt

$$(2r)^2 - \pi r^2 = \frac{1}{2}(4-\pi)(2-\sqrt{3}) \approx 0{,}115\ldots$$

Aufgabe 3

Das Weihnachtsteam, bestehend aus dem Weihnachtsmann, dem Christkind und Knecht Ruprecht, kann jedes Jahr ein paar wenige Kinder ganz besonders beschenken. Sie haben eine Liste von Kindern, die von 1 bis 1 Million durchnummeriert sind.
Der Weihnachtsmann macht am 24. Dezember seine Runde; er will alle Kinder besonders beachten, deren Zahl durch 24 teilbar ist und gleichzeitig genau 24 Teiler hat.
Das Christkind ist einen Tag später dran und wählt entsprechend alle Kinder, deren Nummer durch 25 teilbar ist und genau 25 Teiler hat.

Knecht Ruprecht verfährt ebenso mit der Zahl 26.

Wer beschenkt wie viele Kinder in besonderer Weise?

Lösung:

Als Erstes überlegen wir uns, wie viele (positive) Teiler eine (positive) ganze Zahl $n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$ hat. Bei jedem Teiler von n kann man für jeden Primteiler p_i, wählen, in welcher Potenz von 0 bis e_i er enthalten sein soll. Die Wahlen sind unabhängig voneinander, und man erhält auf diese Weise auch genau jeden Teiler. Daher gilt:

$$\begin{gathered} n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k} \quad \text{hat genau} \\ (e_1+1) \cdot (e_2+1) \cdot \ldots \cdot (e_k+1) \quad \text{Teiler.} \end{gathered}$$

Umgekehrt ergibt sich über die Zerlegung einer vorgegebenen Teilerzahl in ein beliebiges Produkt ganzer Zahlen größer 1 ein Muster an Primpotenzteilern $p_i^{e_i}$, wobei die Belegung der p_i mit konkreten Primzahlen völlig frei bleibt.

Fangen wir bei Knecht Ruprecht an. Seine Zahlen sollen genau 26 Teiler haben. Da 26 nur zwei Primfaktoren in je einfacher Vielfachheit hat, gibt es nur zwei Möglichkeiten für die Form dieser Zahlen:

$$p_1^{25} \quad \text{oder} \quad p_1^1 p_2^{12} \,.$$

Da die Zahlen aber zudem durch 26 mit seinen zwei verschiedenen Primfaktoren teilbar sein sollen, bleibt nur die zweite Variante, und es kann nur zwei Zahlen geben: $2^1 \cdot 13^{12} = 46\,596\,170\,244\,962$ oder $13^1 \cdot 2^{12} = 53248$. Die erste Zahl ist ein wenig zu groß, sodass Knecht Ruprecht genau ein Kind besonders beschenkt.

Für das Christkind mit der 25 ist die Situation ähnlich: Ihre Zahlen können nur die Form $5^{24} = 59\,604\,644\,775\,390\,625$ oder $5^4 \cdot p_2^4$ mit $p_2 \neq 5$ haben. Dabei kann p_2 alle Werte annehmen, für die p_2^4 kleiner gleich 1600 ist. Dies ist genau für 2 und 3 der Fall, denn es ist bereits $7^4 = 2401$.
Das Christkind beschenkt also genau die Kinder mit den Zahlen 10000 und 50625.

Die Zahl 24 hat mehr Zerlegungen in ein Produkt: $24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$. Daraus ergeben sich die möglichen Primpotenzmuster

$$pq^{11}, \quad p^2q^7, \quad p^3q^5, \quad pqr^5, \quad pq^2r^3 \quad \text{und} \quad pqrs^2 \,.$$

Jedoch folgt aus der geforderten Teilbarkeit durch 24, dass einer der Primfaktoren in mindestens dritter Potenz enthalten ist. Damit fällt das letzte

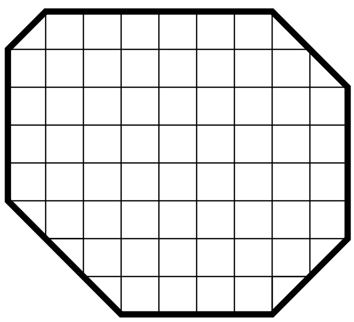
Muster vollständig weg. Es verbleiben die Zahlen der Form

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2^{11} &= 6144\,, \\ 3^2 \cdot 2^7 &= 1152\,, \\ 2^3 \cdot 3^5 &= 1944\,, \\ 3^3 \cdot 2^5 &= 864\,, \\ p_1 \cdot 3 \cdot 2^5 &= 96 \cdot p_1\,, \qquad (5) \\ p_2 \cdot 3^2 \cdot 2^3 &= 72 \cdot p_2\,, \qquad (6) \\ 3 \cdot p_3^2 \cdot 2^3 &= 24 \cdot p_3^2\,. \qquad (7) \end{aligned}$$

Bei (5) darf p_1 jede Primzahl größer als 3 sein, für die $p_1 \leq \frac{1000000}{96}$ ist. Das heißt, dass $p_1 \leq 10416$ ist. Dafür gibt es (wie man nachschlagen kann) 1272 Möglichkeiten.
Bei (6) darf p_2 jede Primzahl größer als 3 sein, für die $p_2 \leq \frac{1000000}{72}$, also $p_2 \leq 13888$ ist. Das ergibt 1639 Möglichkeiten.
Schließlich darf bei (7) der Wert von p_3 jede Primzahl größer als 3 sein, für die $p_3^2 \leq \frac{1000000}{24}$, also $p_3^2 \leq 41666$ ist; das wiederum ist äquivalent zu $p_3 \leq 204$, so dass sich hier 44 Möglichkeiten ergeben.
Der Weihnachtsmann beschenkt also die $4+1272+1639+44 = 2959$ Kinder mit den Nummern 360, 480, 504, 600, 672, 792, 864, ..., 999576.

Aufgabe 4

Auf Kästchenpapier kann man hübsche Achtecke zeichnen, die konvex sind, ganzzahligen Flächeninhalt haben (in Kästchen gemessen) und bei denen alle Kanten entlang von Kästchenkanten oder Kästchendiagonalen verlaufen. Hier ist ein solches Beispielachteck:



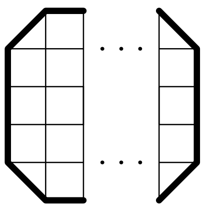
Zeige, dass es eine maximale ganze Zahl M gibt, die NICHT Flächeninhalt eines solchen hübschen Achtecks sein kann. (Das heißt, dass alle ganzen Zahlen, die größer als M sind, als Flächeninhalt von einen hübschen Achteck vorkommen.) Finde M.

Lösung:

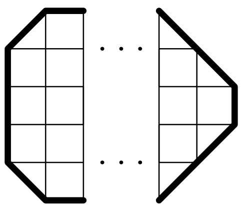
Die größte ganze Zahl, die nicht Flächeninhalt eines hübschen Achtecks sein kann, ist $M = 12$.

Zunächst geben wir für alle ganzen Zahlen, die größer als 12 sind, ein Achteck mit entsprechendem Flächeninhalt an. Danach genügt es zu zeigen, dass 12 nicht als ein solcher Flächeninhalt auftreten kann.
Fügt man in den Zeichnungen A bis E jeweils die beiden Hälften direkt aneinander, so erhält man hübsche Achtecke mit einem Flächeninhalt von 13, 15, 17, 19 bzw. 21 Kästchen.

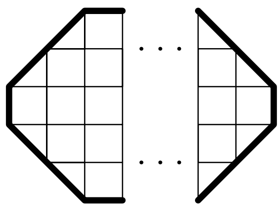
A



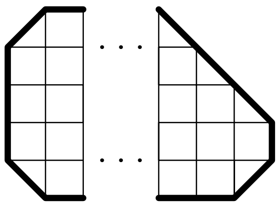
B



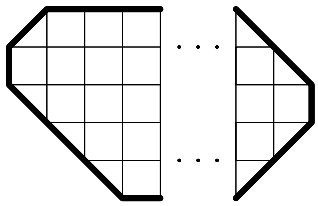
C



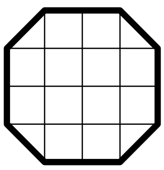
D

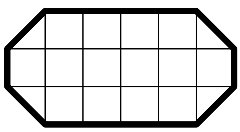


E



Wie durch die Pünktchen bereits angedeutet, kann man nun in jeder der Figuren beliebig viele Kästchenspalten einfügen und erhält wieder hübsche Achtecke mit einem je eingefügter Spalte um 5 vergrößerten Inhalt. Da die fünf ungeraden Zahlen zwischen 13 und 21 alle Restklassen bzgl. Division durch 5 repräsentieren, können wir mittels dieser fünf Basisachtecke bis auf 14 und 16 bereits jeden ganzzahligen Flächeninhalt größer als 12 erzeugen.
Für die beiden noch fehlenden Zahlen findet man z. B. folgende Figuren:





Nun bleibt zu zeigen, dass 12 nicht Flächeninhalt eines hübschen Achtecks sein kann.
Dass die Kanten nur parallel oder diagonal zu Kästchen verlaufen dürfen, bedeutet, dass als Innenwinkel nur Vielfache von 45° auftreten. Die Achteckinnenwinkelsumme beträgt 1080°. Wäre nun ein Innenwinkel kleiner als 135°, so müsste es Innenwinkel größer als 180° geben, was im Widerspruch zur geforderten Konvexität steht. Also folgt, dass jeder Innenwinkel 135° beträgt.
Wir betrachten zu einem hübschen Achteck das kleinste einhüllende Rechteck. Das Achteck entsteht aus diesem Rechteck durch diagonales Beschneiden der vier Ecken, wobei keine zwei Schnitte an den Rechteckseiten aufeinandertreffen dürfen. (Dies würde in weniger als acht Ecken resultieren.)

Damit ist klar, dass der Flächeninhalt F_R des einhüllenden Rechtecks echt größer sein muss als der Flächeninhalt F_A des Achtecks. Außerdem haben die Rechteckseiten mindestens Länge 3. Und weil das Achteck am unteren Rand in der obersten Rechteckzeile wenigstens die Breite 3 hat, ebenso am oberen Rand der untersten Rechteckzeile, hat es dazwischen wegen der Konvexität immer mindestens die Breite 3. Demnach hat das Achteck bei einem einhüllenden Rechteck der Größe $m \times n$ mindestens den Flächeninhalt $F_A \geq 2 \cdot 2 + \max(m, n) \cdot 3$.

Ist eine Seite des einhüllenden Rechtecks genau 3 Kästchen lang, so sind offenbar nur die Flächeninhalte $7, 10, 13, 16, \ldots$ realisierbar. Ist wenigstens eine Rechteckseite mindestens 5 lang, so ist $F_A \geq 4 + 3 \cdot 3 = 13$
Haben die Rechteckseiten alle Länge 4, so kann man entweder an jeder Ecke ein halbes Kästchen abschneiden oder an zwei der Ecken zwei Kästchen und an den anderen beiden Ecken je ein halbes Kästchen. Dies führt zu $F_A = 16 - 2 = 14$ oder zu $F_A = 16 - 5 = 11$.
Somit gibt es kein hübsches Achteck mit $F_A = 12$.