Mathematischer
Korrespondenz-
zirkel

Mathematisches Institut
Georg-August-Universität
Göttingen

Beispiellösungen zu Blatt 99

Aufgabe 1

99 Luftballons fliegen am Horizont ganz friedlich in rechteckiger Formation, wobei die Kantenlängen des Rechtecks größer als ein Luftballon sind. Ein vorbeikommender Düsenflieger nimmt behutsam einen der vier „Eckballons“ für seine Tochter mit. Daraufhin ordnen sich die restlichen Ballons neu zu einer Rechteckformation. Wie viele Ballons müssen mindestens ihren Platz in der Formation ändern, damit wieder ein Rechteck entsteht?

Lösung:

Die Zahl $99 = 3 \cdot 3 \cdot 11$ hat zwei mögliche Zerlegungen als Produkt mit zwei Faktoren ungleich 1:

$$99 = 3 \cdot 33 = 9 \cdot 11\,.$$

Nachdem ganz behutsam ein Ballon entfernt wurde, bleiben $98 = 2 \cdot 7 \cdot 7$ Ballons übrig. Auch 98 hat genau zwei nichttriviale Produktzerlegungen:

$$98 = 2 \cdot 49 = 7 \cdot 14\,.$$

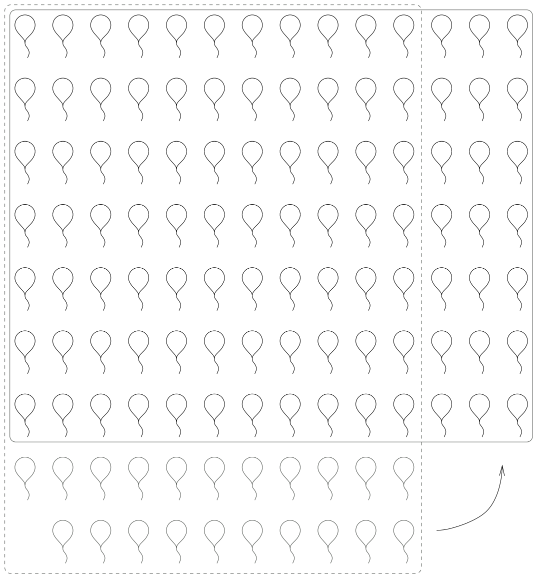
Die Ballons wechseln also in eine dieser beiden Rechteckformen, wobei noch überlegt werden muss, in welcher Reihenfolge die Faktoren auftauchen.
Wir bestimmen den maximal möglichen Überschneidungsbereich zweier Rechtecke der Größen $a \times b$ und $c \times d$, wobei nun die Seiten a und c zu derselben Richtung gehören sollen: In jeder der beiden Richtungen ist der jeweils kleinere Wert ausschlaggebend. Die maximale Überschneidung der beiden Rechtecke ist also ein Rechteck der Größe

$$\min(a, c) \times \min(b, d)\,.$$

Die Größe der Überschneidung gibt nun aber auch an, wie viele Luftballons beim Umformieren höchstens auf ihrem Platz bleiben können.
Nun kann man alle Fälle durchprobieren, sie stehen in der folgenden Tabelle. Beim 99er-Rechteck kann man sich noch die Orientierung aussuchen, beim 98er-Rechteck muss man dann beide Möglichkeiten betrachten. Es gilt aber: Wenn $a < c < d < b$ ist, ist klar, dass die Anordnung $a \times b$ zu $c \times d$ eine größere Überschneidung liefert als die Anordnung $a \times b$ zu $d \times c$ bzw. als die Anordnung $b \times a$ zu $c \times d$. Den ungünstigen Fall lassen wir daher gleich weg.

99 Ballons	98 Ballons	mögl. Überschneidung	nötige Umordnung
3×33	2×49	$2 \times 33 = 66$	32
3×33	7×14	$3 \times 14 = 42$	56
9×11	2×49	$2 \times 11 = 22$	76
9×11	7×14	$7 \times 11 = 77$	21

Es ergibt sich: Mindestens 21 Ballons müssen ihren Platz in der Formation ändern.



Aufgabe 2

Der Zwei-Punkt-Marienkäfer Herbert befindet sich an einer Ecke eines $m \times m$-Gitters mit einer natürlichen Zahl $m > 1$. Herbert ist auf dem Weg zu seiner Freundin Natascha, die in der diagonal gegenüberliegenden Ecke des Gitters auf ihn wartet. Da Herbert einen verletzten Flügel hat, kann er nur auf Gitterlinien krabbeln. Wie viele Möglichkeiten hat er, Natascha auf dem kürzesten Weg zu erreichen?
Der Drei-Punkt-Marienkäfer Alex befindet sich auf einem dreidimensionalen Gitter der Größe $m \times m \times m$. Auch er steht in der einen Ecke des Gitters und möchte Jessica auf der diagonal gegenüberliegenden Ecke möglichst schnell erreichen. Wieviele Möglichkeiten hat Alex für seinen Weg?
Wie viele kürzeste Wege stehen allgemein bei einem n-dimensionalen $m \times m \times \ldots \times m$-Gitter zur Verfügung?

Lösung:

Dimension 2:
Im ersten Fall können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass Herbert auf der linken unteren Ecke des Gitters startet. Seine Freundin Natascha wartet dann rechts oben.
Daher muss Herbert m Gitterlinien nach rechts und m Gitterlinien nach oben überwinden. Da er nur auf dem Gitter krabbeln kann, kann er keine zwei dieser Schritte zusammenlegen. Jeder kürzeste Weg besteht also aus insgesamt $2m$ Schritten, von denen m nach rechts gehen, die anderen m nach oben. In welcher Reihenfolge Herbert nach rechts oder nach oben geht, ist dabei egal. Jede Auswahl von m Positionen aus den $2m$ Zügen, an denen er

nach rechts geht, liefert somit je einen kürzesten Weg. Er hat daher insgesamt genau

$$\binom{2m}{m} = \frac{(2m)!}{m!m!} = \frac{(2m)!}{(m!)^2}$$

Möglichkeiten, Natascha auf kürzestem Wege zu erreichen.

Dimension 3:
Auf einem dreidimensionalen Gitter der Größe $m \times m \times m$ muss Alex mindestens m Mal nach rechts, m Mal nach oben und m Mal in die dritte Richtung gehen, um zu seiner Freundin zu gelangen. Ein kürzester Weg besteht also genau aus $3m$ Schritten, von denen in jede der drei Richtungen genau m Stück gehen. Die m Schritte in die erste Richtung kann Alex beliebig auf seine $3m$ Züge verteilen, das ergibt genau $\binom{3m}{m}$ Möglichkeiten. Die Schritte in die zweite Richtung müssen dann jeweils auf die verbleibenden $2m$ Züge verteilt werden, dafür stehen nur noch $\binom{2m}{m}$ Möglichkeiten zur Verfügung. Die Schritte in die dritte Richtung liegen nun wiederum fest. Insgesamt gibt es für Alex daher genau

$$\binom{3m}{m}\binom{2m}{m} = \frac{(3m)!}{m!(3m-m)!} \cdot \frac{(2m)!}{(m!)^2} = \frac{(3m)!(2m)!}{m!(2m)!(m!)^2} = \frac{(3m)!}{(m!)^3}$$

kürzeste Wege zu Jessica.

Dimension n:
Auch in n Dimensionen muss der n-Punkt-Marienkäfer in jede der n Richtungen mindestens m Schritte gehen; ein kürzester Weg besteht also aus genau nm Schritten.
Wiederum können die n Schritte in die erste Richtung beliebig auf die nm Schritte insgesamt verteilt werden, das sind $\binom{nm}{m}$ Möglichkeiten. Für die Schritte in die zweite Richtung sind dann noch $(n-1)m$ Plätze möglich, das ergibt hierfür $\binom{(n-1)m}{m}$ Möglichkeiten, analog geht es so weiter für die restlichen $n-2$ Richtungen. Insgesamt gibt es somit

$$\binom{nm}{m}\binom{(n-1)m}{m}\binom{(n-2)m}{m}\cdots\binom{m}{m}$$

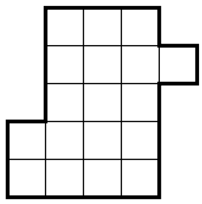
kürzeste Wege.
Bezeichnen wir die Anzahl der kürzesten Wege in Dimension n mit $A(n)$, so wollen wir noch die Gleichheit $A(n) = \frac{(nm)!}{(m!)^n}$ zeigen: Für $n = 2$ bzw. $n = 3$ haben wir dies oben schon gesehen. Gilt die Umformung für $n-1$, so auch für n, denn dann ist

$$A(n) = \binom{nm}{m} A(n-1) = \frac{(nm)!}{m!((n-1)m)!} \cdot \frac{((n-1)m)!}{(m!)^{n-1}} = \frac{(nm)!}{(m!)^n}$$

wie behauptet. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt diese Anzahl-Formel für alle n.

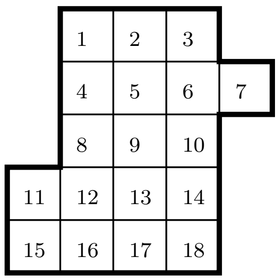
Aufgabe 3

Zerlege die folgende Figur durch einen Schnitt entlang der Gitterlinien in zwei kongruente Teile. Zeige, dass es nur eine Variante gibt.

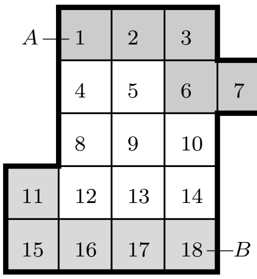


Lösung:

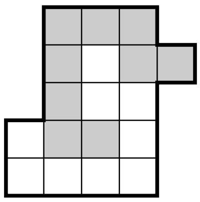
Wir leiten gleich her, wie eine mögliche Lösung aussehen muss – daraus ergibt sich dann die eindeutige (und existierende) Lösung. Der Reihe nach nummerieren wir dazu die Kästchen durch.



Die beiden zu findenden Teile nennen wir A und B; ohne Einschränkung gehört Kästchen 7 zu A, womit offensichtlich auch 6 zu A gehören muss.
Es gibt nur zwei Kästchenpaare, die in einer Richtung einen Abstand 3 und in der anderen Richtung einen Abstand 4 haben: $(3, 15)$ und $(7, 15)$. Da an beiden Paaren 15 beteiligt ist, können die Kästchen keines Paares zur selben Teilfigur gehören, weil die Kästchen des anderen dann zur anderen Teilfigur gehören müssten. Daher gehört 15 zu B und 3 zu A.
Kästchen 11 kann nicht zu A gehören, weil dann 7 und 11 in irgendeiner Weise durch Kästchen von A verbunden sein müssten und damit verhindern, dass auch B zwei Kästchen hat, die in einer Richtung einen Abstand von 4 haben.
Nun könnten nur noch die sieben Kästchen 1, 2, 3, 15, 16, 17 und 18 an Paaren beteiligt sein, die in einer Richtung einen Abstand von 4 haben. Dieser Abstand lässt sich auch nur noch vertikal einrichten. Wenn zu einer Teilfigur ein solches Paar gehört, gehört auch eines zur anderen Teilfigur; und da sich diese Kästchen auf nur zwei Zeilen verteilen, müssten dann alle sieben an einem Paar beteiligt sein. Das geht aber nicht, weil die Anzahl an beteiligten Kästchen offensichtlich gerade sein muss. Zwischenstand: 1, 2, 3, 6 und 7 gehören zu A, und 11, 15, 16, 17 und 18 gehören zu B.

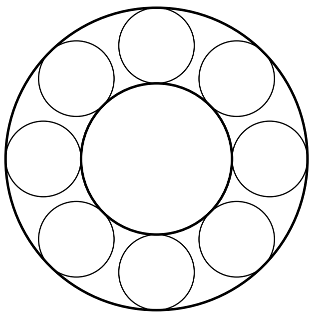


Figur B hat vier Kästchen in einer Reihe, und die restlichen Kästchen liegen alle auf einer Seite dieser Reihe. Das ist für Figur A nur zu schaffen, wenn sie noch die Kästchen 4, 8 und 12 bekommt. Nun kann 1 nicht 15 entsprechen, sondern muss 18 entsprechen, und damit müssen 14, 10, 9 und 5 zu B gehören und schließlich noch 13 zu A.
Es folgt als einzige Lösung:



Aufgabe 4

Bei einem Kugellager hat der innere Ring einen Radius der Länge 1. Die äußere Kugellauffläche hat den Radius 2. Das heißt, dass dazwischen Kugeln mit Durchmesser 1 umlaufen.



Der innere Ring sei fixiert. Wie viele Umdrehungen macht eine der Kugeln um den inneren Ring herum, wenn der äußere Ring 6 Umdrehungen macht?

Lösung:

Die Kugeln machen 4 Umdrehungen um den inneren Ring.

Wir betrachten das Problem andersherum, weil das übersichtlicher ist: Nach wie vor sei der innere Ring fixiert, aber wir drehen die Kugeln genau einmal um den inneren Ring herum, und der äußere Ring wird dadurch bewegt. Wie weit ist dann der äußere Ring gedreht worden?

Das Drehen der Kugeln sorgt auf zweierlei Weise dafür, dass sich der äußere Ring weiterdreht: Zum einen dreht sich der Schwerpunkt einer Kugel einmal um den Mittelpunkt des Lagers. Das dreht den äußeren Ring ebenso einmal herum – es wäre die exakte Bewegung, wenn die Kugeln nicht auf dem inneren Ring abrollen würden, sondern mit immer der gleichen Stelle auf ihm abrutschen würden.
Als Zweites kommt nun hinzu, dass die Kugeln auf dem inneren Ring abrollen. Wir drehen unseren Kopf in Gedanken mit der Drehung des Schwerpunktes einer Kugel um den Mittelpunkt des inneren Ringes mit. Die Kugel soll zum Beispiel rechtsherum auf dem inneren Ring abrollen; weil wir den Kopf mitdrehen, bleibt die Kugel für uns an gleicher Stelle stehen, und der innere Ring dreht sich linksherum. Das sorgt für eine Rechtsdrehung der Kugel um ihre Mitte. Und das wiederum sorgt dafür, dass der äußere Ring rechtsherum gedreht wird.
Der innere Ring hat den Radius 1, also einen Umfang von 2π. Der äußere Ring mit Radius 2 hat einen Umfang von 4π. Wenn eine Kugel einmal um den inneren Ring gedreht wird, dann dreht sie sich in der Sichtweise, wenn wir unseren Kopf mitdrehen, um eben genau 2π auf ihrem Umfang. Um genau diese Länge wird dann auch der äußere Ring gedreht. Das ist genau eine halbe Umdrehung.
Zusammgefasst heißt das: Wenn eine Kugel einmal um den inneren Ring gedreht wird, dreht sich der äußere Ring genau anderthalb Mal.
Umgekehrt lautet also die Lösung: Wenn der äußere Ring 6 Umdrehungen macht, machen die Kugeln $6/1{,}5 = 4$ Umdrehungen um den inneren Ring herum.