

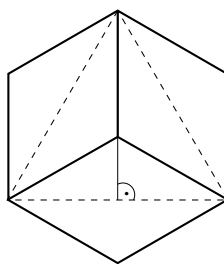
Matboj

3. Treffen des Mathematischen Korrespondenzzirkels 23. November 2002 Beispiellösungen zu den Aufgaben

1. Würfelprojektion

Ein Würfel mit der Kantenlänge 1 werde auf einer Ecke balanciert. Wie groß ist die Fläche, die man erhält, wenn man den Würfel in dieser Lage senkrecht nach unten projiziert?

Lösung:



Die Abbildung zeigt den Würfel in der Aufsicht auf eine Ecke, also das Bild der Projektion, wobei die Grenzen der drei abgewandten Flächen nicht eingezeichnet wurden. Die Seitenlänge des eingezeichneten gleichseitigen Dreiecks ist gerade die Länge der Flächendiagonale des Würfels, also genau $\sqrt{2}$, denn die drei unteren Eckpunkte des Würfels liegen auf derselben Höhe, so dass die drei gezeigten Flächendiagonalen parallel zur Projektionsfläche liegen und somit in der Projektion dieselbe Länge haben wie im Würfel. Das Dreieck hat daher die Fläche $\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Das gesamte Sechseck hat offenbar genau die doppelte Fläche (man klappe die kleinen Dreiecke, die außen an dem gleichseitigen Dreieck angefügt sind, nach innen), also $\sqrt{3}$.

2. Telefonverbindungen oder Strippensalat

Kann man 77 Telefone so miteinander verbinden, dass jedes mit genau 15 anderen verbunden ist?

Lösung:

Dies ist nicht möglich.

Sei n die Zahl der Verbindungen. Da jede Verbindung zwei Anschlüsse verbindet (an jedem Ende einen), erhält man, wenn man die Anschlüsse an allen Verbindungen aufaddiert, als Summe $2n$, also eine gerade Zahl.

Wenn jedes der 77 Telefone mit genau 15 anderen verbunden wäre, wäre die betrachtete Summe aller Anschlüsse aber $77 \cdot 15 = 1155$, d. h. ungerade.

Also ist es nicht möglich, 77 Telefone so miteinander zu verbinden, dass jedes mit genau 15 anderen verbunden ist.

3. *Rechne mit Folgen!*

Es seien a_1, a_2 zwei beliebige Startzahlen. Sie bestimmen rekursiv die Folge

$$a_3 := a_2 - a_1,$$

$$a_4 := a_3 - a_2,$$

$$a_5 := a_4 - a_3,$$

...

Berechne die Summe der ersten 2000 Glieder in dieser Folge!

Lösung:

Berechnen wir zuerst die ersten acht Glieder:

$$a_3 = a_2 - a_1$$

$$a_4 = a_3 - a_2 = a_2 - a_1 - a_2 = -a_1$$

$$a_5 = a_4 - a_3 = a_3 - a_2 - a_3 = -a_2$$

$$a_6 = a_5 - a_4 = a_4 - a_3 - a_4 = -a_3$$

$$a_7 = a_6 - a_5 = a_5 - a_4 - a_5 = -a_4 = a_1$$

$$a_8 = a_7 - a_6 = a_6 - a_5 - a_6 = -a_5 = a_2$$

Allgemein gilt:

$$a_{n+3} = a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n - a_{n+1} = -a_n$$

und damit

$$a_{n+6} = -a_{n+3} = -(-a_n) = a_n .$$

Also gilt:

$$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} + a_{n+5} + a_{n+6} = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+1} - a_{n+2} - a_{n+3} = 0$$

Damit ist die Summe von sechs aufeinander folgenden Gliedern null. Die Summe der ersten $2000 = 6 \cdot 333 + 2$ Glieder ist also gleich der Summe der ersten zwei Glieder. Somit ist die Summe gerade $a_1 + a_2$.

4. *Quadratzahlen*

Starte mit einer natürlichen Zahl, verdopple sie und addiere 1.

Verdopple anschließend diese neue Zahl und addiere wieder 1. Setze dieses Verfahren fort.

Wie viele Quadratzahlen kann eine solche Zahlenfolge enthalten?

Lösung:

Gegeben sei eine natürliche Zahl n als Startzahl. Nach der angegebenen Vorschrift erhält man eine Zahlenfolge p_0, p_1, \dots mit

$$p_0 = n$$

$$p_{m+1} = 2p_m + 1$$

Behauptung: Diese Zahlenfolge kann keine, eine oder maximal zwei Quadratzahlen enthalten.

Betrachte die Reste bezüglich Division durch 4. Wir schreiben $k \equiv r \pmod{4}$ (sprich: „ k [ist] kongruent r modulo 4“), wenn k bei Division durch 4 den Rest r läßt (genauer: wenn

k und r denselben Rest bei Division durch 4 lassen). Dann gilt:

$$\begin{aligned} k \equiv 0 \pmod{4} &\Rightarrow k^2 \equiv 0 \pmod{4} \\ k \equiv 1 \pmod{4} &\Rightarrow k^2 \equiv 1 \pmod{4} \\ k \equiv 2 \pmod{4} &\Rightarrow k^2 \equiv 0 \pmod{4} \\ k \equiv 3 \pmod{4} &\Rightarrow k^2 \equiv 1 \pmod{4} \end{aligned}$$

Für eine Quadratzahl q gilt also: $q \equiv 0 \pmod{4}$ oder $q \equiv 1 \pmod{4}$. Zahlen, die bei Division durch 4 den Rest 2 oder 3 lassen, können somit keine Quadratzahlen sein.

Betrachte nun die gegebene Zahlenfolge p_0, p_1, \dots

Für $m \geq 2$ gilt:

$$p_m = 2p_{m-1} + 1 = 2(2p_{m-2} + 1) + 1 = 4p_{m-2} + 2 + 1 \equiv 3 \pmod{4}.$$

Also lassen alle Glieder p_m mit $m \geq 2$ den Rest 3 bei Division durch 4 und können somit keine Quadratzahlen sein. Die Zahlenfolge kann daher maximal zwei Quadratzahlen enthalten, nämlich p_0 und p_1 .

Für $p_0 = 4$ erhalten wir eine Folge mit genau zwei Quadratzahlen: $p_0 = 2^2, p_1 = 3^3, \dots$

Für $p_0 = 12$ erhalten wir eine Folge mit genau einer Quadratzahl, denn $p_1 = 5^2$.

Für $p_0 = 3$ enthält die Folge keine Quadratzahl.

Bemerkung. Genauer gilt:

Die Zahlenfolge enthält zwei Quadratzahlen, wenn gilt: p_0 ist eine Quadratzahl und $p_0 = 2k(k+1)$, denn dann ist: $p_1 = 4k(k+1) + 1 = (2k+1)^2$. (Für $k = 1$ ist zum Beispiel $p_0 = 2^2$ und $p_1 = 3^2$.)

Die Zahlenfolge enthält eine Quadratzahl, wenn entweder p_0 eine Quadratzahl ist oder $p_0 = 2k(k+1)$ (z. B. $p_0 = 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$).

Die Zahlenfolge enthält keine Quadratzahl, wenn p_0 weder eine Quadratzahl noch von der Form $2k(k+1)$ ist (z. B. $p_0 = 2$).

5. Stammbruchzerlegung

Kann man die Zahl 1 als Summe von genau 2003 verschiedenen Stammbrüchen schreiben?

Lösung:

Für jede natürliche Zahl $n > 2$ kann die 1 als Summe von genau n verschiedenen Stammbrüchen geschrieben werden.

Recht leicht zu sehen ist, dass gilt:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \\ &\vdots \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} \end{aligned}$$

Das Problem ist, dass bei allen diesen Lösungen der letzte Bruch gleich dem vorletzten ist, was nach Voraussetzung nicht sein darf.

Es ist aber möglich, die 1 als Summe von drei Stammbrüchen zu schreiben:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

Wenn man nun in den obigen Gleichungen den letzten Bruch $\frac{1}{2^k}$ durch $\frac{1}{2^k} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)$ (Summe von Stammbrüchen) ersetzt, erhält man 1 als Summe von $k + 3$ Stammbrüchen. Eine Möglichkeit, 1 als Summe von 2003 Stammbrüchen zu schreiben, ist also:

$$1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{2000}}\right) + \left(\frac{1}{2^{2000} \cdot 2} + \frac{1}{2^{2000} \cdot 3} + \frac{1}{2^{2000} \cdot 6}\right)$$

6. Teilerfremd?

Was ist der größte gemeinsame Teiler der Zahlen $n^2 + 1$ und $(n + 1)^2 + 1$, wobei n eine natürliche Zahl ist?

Lösung:

Ist t ein gemeinsamer Teiler von $n^2 + 1$ und $(n + 1)^2 + 1$, so teilt t auch die Differenz $(n+1)^2+1-(n^2+1) = 2n+1$. Deswegen teilt t dann auch die Zahl $(2n-1)(2n+1) = 4n^2-1$; mit $n^2 + 1$ teilt t auch $4(n^2 + 1)$ und somit auch die Differenz $4(n^2 + 1) - (4n^2 - 1) = 5$. Also ist t entweder 1 oder 5 und somit ist auch der gesuchte größte gemeinsame Teiler entweder 1 oder 5.

Nun betrachte man die Folge der Reste, die die Quadratzahlen bei Division durch 5 lassen: 0, 1, 4, 4, 1, 0, 1, 4, 4, 1, 0, ... Diese ist periodisch mit Periode 5. Die Nachfolger der Quadratzahlen lassen bei Division durch 5 also die Reste 1, 2, 0, 0, 2, 1, 2, 0, 0, 2, 1, ... Man sieht, dass zwei aufeinander folgende Glieder $n^2 + 1$ und $(n + 1)^2 + 1$ dieser Reihe genau dann durch 5 teilbar sind, wenn n bei Division durch 5 den Rest 2 lässt, also von der Form $n = 5k + 2$ mit einer natürlichen Zahl k ist.

Genau in diesem Fall ist der größte gemeinsame Teiler von $n^2 + 1$ und $(n + 1)^2 + 1$ gleich 5. Ansonsten ist er 1.

7. Ganz gewaltig groß

Finde eine Lösung der Gleichung $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$, in der a, b, c ganzzahlig und größer als 50 sind!

Lösung:

Schreibt man die Gleichung auf etwas andere Art, nämlich als

$$a^2 - 3bc \cdot a + (b^2 + c^2) = 0, \tag{1}$$

so sieht man, dass es sich um eine quadratische Gleichung in a handelt, deren Lösung natürlich von b und c abhängt. Im Allgemeinen hat sie zwei Lösungen a und a' , die nach der p - q -Formel (oder nach dem Satz von Vieta) die Beziehung $a + a' = 3bc$ erfüllen. Hat man also eine Lösung (a, b, c) der Gleichung, so ist auch $(3bc - a, b, c)$ eine Lösung.

Analog geht das natürlich auch mit b und c .

Offenbar ist $(1, 1, 1)$ eine Lösung. Mithin sind der Reihe nach auch $(2, 1, 1)$, $(2, 5, 1)$, $(2, 5, 29)$, $(433, 5, 29)$, $(433, 37666, 29)$ und $(433, 37666, 48928105)$ Lösungen.

8. Funktionalgleichung

Welche Funktionen f erfüllen die Gleichung

$$x^2 f(x) + f(1 - x) = 2x - x^4$$

für alle reellen Zahlen x ?

Lösung:

Genau alle Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{falls } x \neq \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ a & \text{für } x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ -\frac{5 + \sqrt{5}}{2} - a \frac{3 + \sqrt{5}}{2} & \text{für } x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \end{cases}$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ frei wählbar ist, erfüllen die Funktionalgleichung.

Die Gleichung soll für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten. Für $x = y$ gilt:

$$\begin{aligned} y^2 f(y) + f(1-y) &= 2y - y^4 \\ \iff f(1-y) &= 2y - y^4 - y^2 f(y) \end{aligned}$$

und für $x = 1 - y$ erhält man:

$$\begin{aligned} (1-y)^2 f(1-y) + f(y) &= 2(1-y) - (1-y)^4 \\ \iff (1-y)^2 f(1-y) &= 2(1-y) - (1-y)^4 - f(y). \end{aligned}$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit $(1-y)^2$. Gleichsetzen mit der zweiten liefert:

$$\begin{aligned} 2(1-y) - (1-y)^4 - f(y) &= (1-y)^2 (2y - y^4 - y^2 f(y)) \\ &= (1-y)^2 \cdot 2y - (1-y)^2 y^4 - (1-y)^2 y^2 f(y) \end{aligned}$$

Äquivalent dazu ist

$$(1 - (1-y)^2 y^2) f(y) = 2(1-y) - (1-y)^4 - (1-y)^2 \cdot 2y + (1-y)^2 y^4.$$

Daraus folgt

$$f(y) = \frac{2(1-y) - (1-y)^4 - (1-y)^2 \cdot 2y + (1-y)^2 y^4}{1 - (1-y)^2 y^2},$$

falls $1 - (1-y)^2 y^2 \neq 0$ ist.

Vereinfachen wir zuerst den Zähler:

$$\begin{aligned} &2(1-y) - (1-y)^4 - (1-y)^2 \cdot 2y + (1-y)^2 y^4 \\ &= (1-y) (2 - (1-y)^3 - (1-y) \cdot 2y + (1-y)y^4) \\ &= (1-y) (2 - 1 + 3y - 3y^2 + y^3 - 2y + 2y^2 + y^4 - y^5) \\ &= (1-y) (1 + y - y^2 + y^3 + y^4 - y^5) \\ &= (1-y)(1+y) (1 - y^2 + 2y^3 - y^4) \end{aligned}$$

und dann den Nenner:

$$1 - (1-y)^2 y^2 = 1 - (1 - 2y + y^2)y^2 = 1 - y^2 + 2y^3 - y^4.$$

Damit gilt:

$$f(y) = (1-y)(1+y) = 1 - y^2$$

für alle $y \in \mathbb{R}$, für die $1 - (1-y)^2 y^2 \neq 0$ gilt. Für diese y ist der Funktionswert also eindeutig bestimmt.

Betrachten wir nun noch die $y \in \mathbb{R}$ mit $1 - (1-y^2)y^2 = 0$. Es ist $1 - (1-y)^2 y^2 = (1 - (1-y)y) (1 + (1-y)y) = (1 - y + y^2) (1 + y - y^2)$.

Dieser Ausdruck hat offenbar die einzigen beiden reellen Nullstellen $\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$. An genau einer der beiden Stellen kann man den Wert der Funktion beliebig festlegen, an der anderen ergibt sich der Wert dann durch die gegebene Funktionalgleichung.

Damit hat man alle möglichen Funktionen gefunden. Einsetzen in die Funktionalgleichung zeigt, dass es sich auch wirklich um Lösungen handelt.

9. *Farbwürfel*

Es stehen sechs Farben zur Verfügung. Jede Fläche eines Würfels wird (einfarbig) mit einer anderen Farbe eingefärbt. Wie viele verschiedene Würfel kann man herstellen?

Lösung:

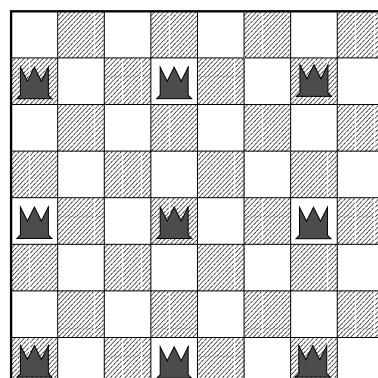
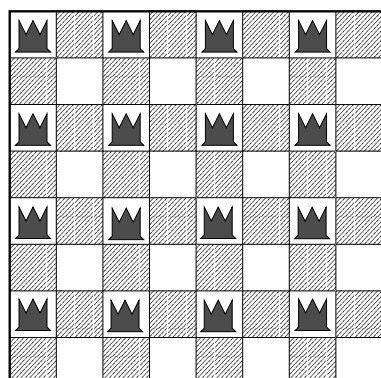
Man lege alle möglichen Würfel so auf einen Tisch, dass die Farbe *A* nach unten zeigt. Farbe *B* liegt dann entweder obenauf, so dass man diese Würfel so drehen kann, dass eine weitere feste Farbe *C* nach vorne zeigt. Das ist bei genau $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Würfeln der Fall, denn die übrigen drei Farben können beliebig verteilt sein. Oder aber *B* liegt nicht obenauf; dann drehe man die Würfel so, dass die Farbe *B* zur vorderen Tischkante zeigt. Da die restlichen vier Farben frei verteilt sein können, hat man von dieser Sorte noch weitere $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ verschiedene Würfel. Zusammen gibt es also 30 verschiedene Würfel.

10. *Königstreffen*

Welches ist die kleinste und welches ist die größte Anzahl an Königen, die man auf einem Schachbrett so unterbringen kann, dass sie alle Felder, sich aber nicht gegenseitig bedrohen?

Lösung:

Teilt man das Brett in 16 Quadrate der Größe 2×2 , so kann auf jedem dieser Quadrate höchstens ein König stehen. Setzt man in jedes der Quadrate in die linke obere Ecke einen König, so handelt es sich um eine erlaubte Platzierung (alle Felder sind bedroht und kein König bedroht einen anderen). Also ist die gesuchte maximale Zahl 16.



Nun betrachte man die neun Felder A1, A4, A7, D1, D4, D7, G1, G4, G7.

Kein König kann zwei dieser Felder bedrohen, es werden zum Bedrohen aller Felder also mindestens neun Könige benötigt. Neun Könige auf diesen Feldern bedrohen alle Felder (und sich nicht gegenseitig), also ist die Minimalzahl gleich 9.

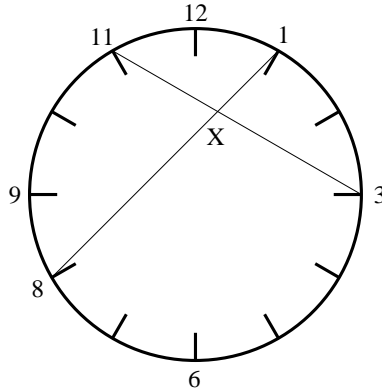
11. *Eine Frage der Zeit*

Wenn man auf dem Ziffernblatt einer Uhr die 1 mit der 8 und die 11 mit der 3 verbindet, welchen Winkel schließen dann die beiden Strecken ein?

Lösung:

Der Schnittpunkt sei mit *X* bezeichnet.

Da die Peripheriewinkel proportional zu den zugehörigen Bögen und halb so groß wie die zugehörigen Zentriwinkel sind, gilt (in selbsterklärender Notation): $\angle X, 1, 3 = \angle 8, 1, 3 =$



$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{12} \cdot 360^\circ = \frac{5}{12} \cdot 180^\circ$ und $\angle 1, 3, X = \angle 1, 3, 11 = \frac{2}{12} \cdot 180^\circ$. Deswegen ist $\angle 3, X, 1 = \frac{5}{12} \cdot 180^\circ = 75^\circ$. (Der andere Schnittwinkel ist dann $\angle 8, X, 3 = 105^\circ$.)

12. *Löse nach System!*

Man finde alle reellen Lösungen (x, y) des folgenden Gleichungssystems:

$$x^2 + xy + y^2 = 1 \quad (2)$$

$$x^3 - y^3 = 1. \quad (3)$$

Lösung:

Formt man die zweite Gleichung um, so erhält man $x^3 - y^3 = (x - y) \cdot (x^2 + xy + y^2) = 1$. Aus Gleichung (2) ist bekannt, daß $x^2 + xy + y^2 = 1$ ist. Eingesetzt erhält man $x - y = 1 \Leftrightarrow x = 1 + y$. Das kann man jetzt wieder in (2) einsetzen und bekommt

$$\begin{aligned} (1 + y)^2 + (1 + y) \cdot y + y^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 1 + 2y + y^2 + y + y^2 + y^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 3y^2 + 3y &= 0 \\ \Leftrightarrow 3y(y + 1) &= 0 \\ \Rightarrow \text{Nullstellen sind } y_1 = 0 \text{ und } y_2 = -1. \end{aligned}$$

Für x erhält man dementsprechend $x_1 = 1, x_2 = 0$. Also sind $(1, 0)$ und $(0, -1)$ die einzigen möglichen Lösungen des Systems.

Da wir uns vorher nicht ausreichend Gedanken über die Äquivalenz beim Umformen gemacht haben, machen wir eine Probe:

- $1^2 + 1 \cdot 0 + 0^2 = 1$ und $1^3 - 0^3 = 1 \Rightarrow (1, 0)$ ist Lösung.
- $0^2 + 0 \cdot (-1) + (-1)^2 = 1$ und $0^3 - (-1)^3 = 1 \Rightarrow (0, -1)$ ist Lösung.

13. *Rendezvous am Gänseliesel*

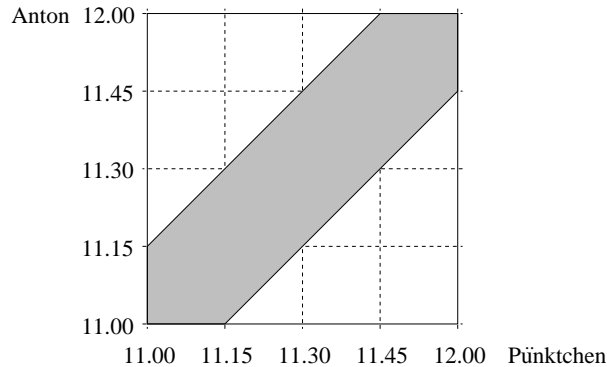
Pünktchen und Anton haben sich für zwischen elf und zwölf Uhr am Göttinger Gänseliesel verabredet. Jeder kommt irgendwann im Laufe dieser Stunde an; wenn der andere dann nicht innerhalb der nächsten Viertelstunde eintrifft, verlässt er (sie) den Ort.

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich Pünktchen und Anton tatsächlich treffen?

Lösung:

Wir markieren jede mögliche Situation (Ereignis) in einem Quadrat der Seitenlänge 1 auf folgende Weise: Das Quadrat legen wir achsenparallel in den ersten Quadranten eines

Koordinatensystems mit einer Ecke im Ursprung. Kommt Pünktchen um 11 Uhr und p Minuten an und Anton um 11 Uhr und a Minuten ($0 \leq p, a \leq 60$), so ordnen wir diesem Ereignis den Punkt $(\frac{p}{60}, \frac{a}{60})$ im Quadrat zu. Umgekehrt markiert jeder Punkt im Quadrat ein mögliches Ereignis.



Falls die beiden sich nicht absprechen und zufällig innerhalb der Stunde irgendwann kommen, ist jeder Punkt im Quadrat als Ereignis gleichwahrscheinlich. Diejenigen Punkte, bei denen sie sich treffen (die guten also), haben die Eigenschaft, dass ihre Koordinaten sich um höchstens 0,25 unterscheiden. Die Menge dieser Punkte kann man in das Quadrat einzeichnen, es handelt sich um einen Streifen der (horizontalen bzw. vertikalen!) Breite 0,5 entlang der Diagonalen des Quadrates. Dieser hat die Fläche $\frac{7}{16}$. Das ist wegen der gleichen Wahrscheinlichkeit für jeden Punkt und des Flächeninhalts 1 des ganzen Quadrats auch die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

14. *Halbiert*

Bestimme alle Zahlenpaare (x, y) mit $x, y \in \mathbb{Z}$ so, dass $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ gilt.

Lösung:

Formt man die Gleichung nach y um, so erhält man:

$$y = \frac{2x}{x-2} = 2 + \frac{4}{x-2}. \quad (4)$$

Damit y ganzzahlig ist, muss $x-2$ ein ganzzahliger Teiler von 4 sein (er kann insbesondere auch negativ sein), also gilt $x \in \{-2, 0, 1, 3, 4, 6\}$. Die zugehörigen möglichen y -Werte ergeben sich aus der Gleichung, was folgende Zahlenpaare liefert: $(-2, 1)$, $(0, 0)$, $(1, -2)$, $(3, 6)$, $(4, 4)$, $(6, 3)$.

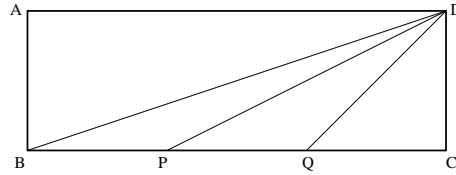
Die Probe zeigt, dass alle außer $(0, 0)$ wirklich Lösungen sind.

15. *Verwinkelt*

Sei $ABCD$ ein Rechteck mit $|\overline{BC}| = 3 \cdot |\overline{AB}|$. Seien weiter P und Q Punkte auf der Seite \overline{BC} mit $|\overline{BP}| = |\overline{PQ}| = |\overline{QC}| = |\overline{AB}|$. Zeige, dass dann $\angle CBD + \angle CPD = \angle CQD$ ist.

Lösung:

Das Dreieck QCD ist gleichschenkelig und rechtwinklig, so dass $\angle CQD = 45^\circ$ ist. Weiter ist das Dreieck PQD ähnlich zu dem Dreieck DQB , denn beide haben den gleichen Winkel bei Q und die beiden an diesem Winkel anliegenden Seiten stehen im Verhältnis $1 : \sqrt{2}$ (weil $|\overline{BQ}| = 2 \cdot |\overline{PQ}| = \sqrt{2} \cdot |\overline{DQ}|$ ist).



Außerdem ist $\angle CBD = \angle ADB$, und damit gilt $\angle CBD + \angle CPD = \angle ADB + \angle BDQ = \angle ADQ = 45^\circ = \angle CQD$.

16. *Partyspaß*

Auf einer Party sind 100 Leute. Unter beliebigen vier von ihnen gibt es eine Person, die mit den drei anderen befreundet ist.

Zeige, dass bis auf höchstens drei Ausnahmen alle Partygäste mit allen anderen befreundet sind.

Lösung:

Wenn alle mit allen befreundet sind, ist nichts zu zeigen. Seien also A und B nicht befreundet. Sei X ein beliebiger dritter Partygast. Wäre X mit irgendeinem beliebigen vierten Partygast Y nicht befreundet, so wäre das ein Widerspruch, denn dann gäbe es unter den vier Leuten A, B, X, Y keinen, der mit den anderen dreien befreundet ist. Also ist jeder außer A und B mit jedem anderen außer eventuell A und B befreundet. Wenn es keinen außer A und B gibt, der nicht mit allen anderen befreundet ist, sind wir auch fertig. Ansonsten sei C ein weiterer Gast, der nicht mit allen befreundet ist. Dieser ist dann nicht mit A oder nicht mit B oder mit beiden nicht befreundet. Mit den anderen ist er befreundet. Betrachte irgendeinen weiteren Gast Z . Dieser ist mit allen außer eventuell A oder B befreundet. Wäre er mit einem von beiden nicht befreundet, so hätte man unter den vier Leuten A, B, C, Z wieder keinen, der mit den anderen dreien befreundet ist. Also ist Z mit allen anderen befreundet. So sind schließlich außer eventuell A, B, C alle anderen mit allen befreundet.

17. *Donaudampfschiffahrtskapitän*

Ein Schiff der Donaudampfschiffahrtsflotte fährt langsam über den Mittellandkanal. Peter will wissen, wie lang dieses im Norden selten gesehene Schiff ist. Dazu schreitet er (während das Schiff vorwärts dampft) am Ufer vom Ende des Schiffes bis zur Spitze, wofür er 120 Schritte benötigt. Dann geht er umgekehrt von vorn nach hinten. Dazu braucht er 30 Schritte. Wie lang ist das Schiff?

Lösung:

Sei v_s die Geschwindigkeit des Schiffes (in Schritten pro Schrittdauer, wir werden hier allerdings ohne Einheiten rechnen). Läuft Peter mit dem Schiff, so legt er zum einen die Länge des Schiffes ℓ zurück und zum anderen den Weg, den das Schiff in dieser Zeit selbst zurücklegt: $120 \cdot v_s$. Läuft Peter gegen die Bewegungsrichtung des Schiffes, so muss er den Weg, den das Schiff während dieser Zeit zurücklegt, nämlich $30 \cdot v_s$, selbst nicht zurücklegen, um an das Ende des Schiffes zu gelangen. Wir erhalten also das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 120 &= \ell + 120v_s \\ 30 &= \ell - 30v_s \\ \Rightarrow 240 &= 5\ell \\ \Rightarrow \ell &= 48, \end{aligned}$$

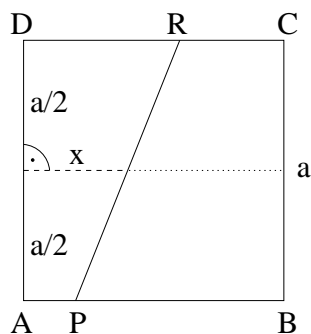
das Schiff ist folglich 48 Schritte lang.

18. *Quadratsplalterei*

Jede von neun Geraden zerlege ein Quadrat in zwei Vierecke, deren Flächen sich wie $2 : 3$ verhalten. Zeige, dass mindestens drei dieser neun Geraden durch einen gemeinsamen Punkt gehen!

Lösung:

Da jede der Geraden das Quadrat in zwei Vierecke zerlegen soll, muss sie von einer Quadratseite zur gegenüberliegenden Seite verlaufen. Die entstandenen Vierecke sind dann Trapeze.



In der Skizze sei nun das Quadrat so aufgeteilt, dass die Fläche des Trapezes $APRD$ genau $\frac{2}{5}$ der Quadratfläche ist. Die Fläche des Trapezes berechnet sich durch $A_{APRD} = \frac{1}{2}(|\overline{AP}| + |\overline{RD}|) \cdot a$, wobei a die Seitenlänge des Quadrats sei. Nun ist aber gerade $x = \frac{1}{2}(|\overline{AP}| + |\overline{RD}|)$, also $A_{APRD} = x \cdot a$.

Andrerseits ist aber $A_{APRD} = \frac{2}{5}A_{ABCD} = \frac{2}{5} \cdot a^2$ und daher $x = \frac{2}{5}a$. Die Strecke \overline{PR} schneidet also die Mittellinie im Verhältnis $2 : 3$.

Damit haben wir gezeigt, dass jede dieser Strecken eine Mittellinie im Verhältnis $2 : 3$ teilt. Es gibt aber nur zwei Mittellinien und auf jeder gibt es nur zwei Punkte, die die Mittellinie im Verhältnis $2 : 3$ teilen.

Jede Gerade geht demnach durch einen dieser vier Punkte und somit gibt es einen Punkt, durch den drei der neun Geraden gehen (nach dem Schubfachprinzip).

19. *Die neueste Quizshow*

Eine Quizshow mit n Teilnehmern geht über mehrere Runden. Vor jeder einzelnen Runde werden unter den verbliebenen Teilnehmern neu Paare ausgelost, die dann gegeneinander antreten müssen. Bei jedem dieser Duelle wird ein Sieger ermittelt, es gibt kein Unentschieden. Sollte die Teilnehmeranzahl einmal ungerade sein, erhält ein Teilnehmer für diese Runde ein Freilos.

Nach jeder Runde scheiden alle Teilnehmer aus, die mindestens 3 Niederlagen erlitten haben. Es wird so lange gespielt, bis ein Sieger feststeht.

Welche Möglichkeiten gibt es für die Gesamtanzahl der Duelle in der Quizshow?

Lösung:

Für das Lösen dieser Aufgabe ist es am besten, die Anzahl der Duelle direkt zu bestimmen (ohne etwa aufwändige Betrachtungen über das Abschneiden einzelner Kandidaten zu machen).

Jeder Teilnehmer kann pro Runde höchstens einmal verlieren. Wenn also ein Teilnehmer ausscheidet, hat er nicht nur mindestens 3 Niederlagen erlitten, sondern genau 3. Umgekehrt gibt es aber auch genau einen Verlierer pro Duell. Da bis auf den Gesamtsieger alle Teilnehmer ausscheiden, müssen diese $(n - 1)$ anderen Teilnehmer genau dreimal verloren

haben, dafür werden $3(n - 1)$ Duelle benötigt. Außerdem kann der Gesamtsieger während der Quizshow keinmal, einmal oder zweimal verloren haben, so dass insgesamt genau folgende drei Möglichkeiten für die Anzahl der Duelle möglich sind: $3(n - 1)$, $3(n - 1) + 1$ und $3(n - 1) + 2$. Man kann sich leicht überlegen, dass auch alle Fälle vorkommen können.

20. *Die Wilde 13*

Gegeben seien sechs nebeneinander stehende Felder. Anna schreibt in eines der Felder eine der Ziffern von 0 bis 9, danach füllt Bernd ein noch nicht belegtes Feld auf dieselbe Weise usw.

Bernd gewinnt, wenn die nach sechs Schritten aus den Ziffern der Felder gebildete Zahl durch 13 teilbar ist, ansonsten gewinnt Anna.

Wer hat eine Gewinnstrategie?

Lösung:

Wenn eine Zahl durch 1001 teilbar ist, dann ist sie wegen $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ auch durch 13 teilbar. Die Zahlen der Form \overline{abcabc} mit Ziffern $a, b, c \in \{0, \dots, 9\}$ sind wegen $\overline{abcabc} = 1001 \cdot \overline{abc}$ durch 1001 und damit auch durch 13 teilbar. Beispielsweise sind also 123123 und 482482 durch 13 teilbar. Damit hat Bernd eine Gewinnstrategie: Er schreibt in jedem Zug die von Anna vorher eingetragene Ziffer in das Feld 3 Positionen weiter links bzw. rechts. Dieses Feld ist immer noch frei, so ein Zug ist also möglich. Nach drei Runden entsteht gerade eine Zahl obiger Form, die somit durch 13 teilbar ist.