

Vorwort

Mit diesem Band halten Sie 100 weitere Aufgaben und Lösungen des Mathematischen Korrespondenzzirkels Göttingen in Händen. Damit schließt dieses Buch nahtlos an seinen Vorgänger „Voller Knocheien“ an.

Der Mathematische Korrespondenzzirkel an der Georg-August-Universität Göttingen ist eine seit nunmehr acht Jahren bestehende mathematische Arbeitsgemeinschaft für Schülerinnen und Schüler ab Klasse 8. Er wird organisiert und durchgeführt von einer Gruppe von Studenten und Doktoranden, zu denen die Autoren dieses Bandes gehören und die zum Teil selbst als Schüler begeistert an ähnlichen mathematischen Förderprojekten teilgenommen haben.

In diesem Buch findet sich eine Zusammenstellung der Aufgabenblätter 26 bis 50 und deren Lösungen. Dabei bieten die Aufgaben insgesamt in bewährter Weise einen Streifzug durch alle denkbaren Gebiete der elementaren Mathematik mit einigen Abstechern zu Denksport- und Experimentieraufgaben. Themen sind so unter anderem die Zahlentheorie in allen ihren Erscheinungsformen, ebene und räumliche Geometrie sowie Logik und Kombinatorik.

Wichtig war uns bei der Formulierung der Aufgaben und vor allem der Lösungen stets, nicht nur den reinen mathematischen Inhalt in mathematisch eleganter Kürze und Präzision darzustellen, sondern die Aufgaben in einen interessanten Rahmen zu stellen und bei den Lösungen im Sinne der besseren Verständlichkeit für einen Sachverhalt lieber einen Satz mehr zu verlieren, selbst wenn dieser vom mathematischen Standpunkt aus entbehrlich sein mochte.

Unter anderem haben wir weitestgehend auf die Hilfe der Differential- und Integralrechnung verzichtet, damit auch Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I Zugang zu den Lösungen finden. Dabei hoffen wir, dass fortgeschrittenen Schülerinnen und Schülern dieser Grundsatz ebenfalls nutzen kann, denn teilweise werden auf diese Weise andere sehr reizvolle Lösungsmethoden gezeigt.

Das Buch ist daher sowohl geeignet für alle, die Spaß an interessanten, kniffligen mathematischen Fragestellungen haben, als auch für Lehrkräfte und Lehrerinnen und Leiter mathematischer Arbeitsgemeinschaften, denen dieser Band einen reichhaltigen Fundus an Aufgaben bietet. Nicht selten wird man bei der Lektüre des Buches auf unerwartete, verblüffend kurze, überraschend elegante und ungewöhnlich weit führende Antworten auf diese Fragestellungen stoßen. Die verwendeten mathematischen Hilfsmittel entstammen dabei, wie schon angedeutet, in den allermeisten Fällen dem Unterricht bis etwa Klasse 10. Gelegentlich werden aber Ausblicke in die höhere Mathematik geboten, die Lösungen vereinfachen bzw. verkürzen.

Bei der Zusammenstellung der einzelnen Aufgabenblätter zu diesem Buch wurden sämtliche Texte und Abbildungen noch einmal durchgesehen und überarbeitet. Sie

wurden dabei insbesondere auch auf den neuesten Stand der Rechtschreibung gebracht.

Wir möchten uns an dieser Stelle bei Wolfgang Radenbach, Andreas Röscheisen und Barbara Zwicknagl, die an der Erstellung einiger Aufgabenblätter und deren Lösungen erheblichen Anteil hatten, ganz recht herzlich bedanken. Ebenso gilt unser Dank Nora Seeliger, Johannes Schmidt-Hieber und Julia Brandes, die an einzelnen Aufgaben und Lösungen mitwirkten.

Wir hoffen, dass wir mit diesem Band, insbesondere im Jahr der Mathematik, vielen mathematisch interessierten Menschen Freude bereiten können und dass auf diesem Wege die Aufgaben unseres Korrespondenzzirkels weitere Verbreitung finden.

Göttingen, im Februar 2008

Die Autoren

Über den Korrespondenzzirkel

Was ist der Mathematische Korrespondenzzirkel?

Der Mathematische Korrespondenzzirkel ist eine Arbeitsgemeinschaft für Schülerinnen und Schüler, die vom Mathematischen Institut der Universität Göttingen angeboten wird.

Wer kann mitmachen?

Alle, die Spaß am Lösen mathematischer Probleme haben. Gedacht haben wir an die Klassenstufen 8–13, aber die Teilnahme steht auch jüngeren Schülerinnen und Schülern offen.

Wie funktioniert das?

Alle sechs Wochen wird von der Uni Göttingen eine Aufgabenserie mit vier mathematischen Aufgaben herausgegeben und direkt an euch geschickt. Außerdem findet ihr die Aufgaben auch im Internet auf unserer Homepage:

<http://www.math.uni-goettingen.de/zirkel>

Ihr habt dann ca. vier Wochen Zeit, eure Lösungen an uns zu senden. Diese korrigieren wir, versehen sie mit Anmerkungen und schicken sie euch zusammen mit Lösungsbeispielen und der neuen Aufgabenserie wieder zu.

Ab und zu gibt es ein gemeinsames Treffen am Mathematischen Institut. An diesem Tag habt ihr die Gelegenheit, Uni und besonders Mathe hautnah zu erleben. Außerdem lernt ihr die anderen Zirkelteilnehmer kennen.

Was sind das für Aufgaben?

Für das Lösen der Aufgaben braucht ihr im Allgemeinen keine über das Schulwissen hinausgehenden Kenntnisse. Es kommt oft eher darauf an, eine pfiffige Idee zu haben. Außerdem gibt es Experimentieraufgaben, bei denen ihr ein wenig herumprobieren, knobeln und selbst eigene Vermutungen aufstellen könnt. Manchmal kann dafür auch ein Computer eingesetzt werden.

Muss ich immer alle Aufgaben lösen?

Natürlich nicht! Alles, was ihr einsendet, wird von uns angeschaut und korrigiert. Solltet ihr eine Aufgabe nicht vollständig herausbekommen, so könnt (und solltet) ihr auch Ideen und Teilergebnisse aufschreiben. Außerdem gibt es eine Telefon-Hotline für Tipps und Fragen zu den aktuellen Aufgaben.

Die Teilnahme ist kostenlos und unverbindlich und man kann jederzeit aufhören oder auch für eine Aufgabenserie aussetzen.

Anmeldecoupon

Haben dir die Aufgaben in diesem Buch gefallen?

Wenn du selbst am Mathematischen Korrespondenzzirkel teilnehmen möchtest, dann kopiere diesen Anmeldecoupon und schicke ihn ausgefüllt an uns. Wir senden dir gerne das aktuelle Aufgabenblatt kostenlos zu.

Name : _____ Vorname : _____

geb. am : _____ Klasse : _____

Straße/Nr. : _____

PLZ/Ort : _____

E-Mail : _____

Deine Schule : _____

Schulanschrift : _____

: _____

Sonstiges/Bemerkungen (z. B. Teilnahme an Mathematikwettbewerben)

Unsere Anschrift:

Mathematisches Institut
Mathematischer Korrespondenzzirkel
Bunsenstraße 3–5
37073 Göttingen

Internet: <http://www.math.uni-goettingen.de/zirkel>

E-Mail: zirkel@math.uni-goettingen.de

Teil I

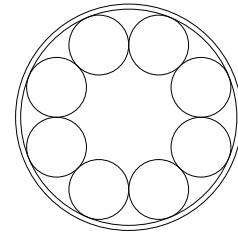
Aufgaben

Aufgabenblatt 26

A 26.1 Zeige: Zieht man von einer Zahl, die aus einer geraden Anzahl von Einsen besteht (z. B. 1111), die Zahl ab, die aus halb so vielen Zweien besteht (in diesem Beispiel 22), so erhält man stets eine Quadratzahl (im Beispiel $1089 = 33^2$).

A 26.2 Lisa hat ein kreisrundes Osternest gebastelt. Nun stellt sie fest, dass das Osternest gerade so groß ist, dass sie genau acht Eier am Rand entlang aufreihen kann. Die stehenden Eier haben einen kreisrunden Querschnitt von 4 cm Durchmesser (vgl. Skizze).

- a) Welchen Durchmesser hat das Osternest?
- b) Wenn Lisa acht Ostereier so platziert hat, passen dann noch zwei weitere Eier ins Nest (ohne zu stapeln)?



A 26.3 Zu Ostern möchte Ferdinand Ostereier bemalen. Dazu hat er fünf verschiedene Farben: Rot, Grün, Gelb, Orange und Blau. Damit die Eier auch schön bunt werden, bemalt Ferdinand jedes Ei mit genau drei Farben.

- a) Wie viele verschiedene Farbkombinationen sind möglich?
- b) Zeige, dass es unter sieben bemalten Eiern immer drei gibt, die in mindestens zwei Farben übereinstimmen.

A 26.4 Firma Superei stellt Sicherheits-Eier her, die Stürze aus größeren Höhen überstehen. Die Firma hat nun zwei Probe-Eier nach einem neuen Verfahren hergestellt und möchte ihre Stabilität testen. Dazu werden die Eier aus verschiedenen Stockwerken ihres 20-stöckigen Firmengebäudes fallen gelassen. Wie viele Versuche werden maximal gebraucht, um festzustellen, bis zu welcher Höhe genau (in Stockwerken) ein Ei einen Sturz auf das Pflaster übersteht? Bedenke: Wenn ein Ei einen Sturz überstanden hat, kann es für einen weiteren Versuch verwendet werden, sonst natürlich nicht. Am Ende dürfen beide Eier kaputt sein.

Wem das zu einfach sein sollte: Wie viele Versuche sind es maximal, wenn die Firma gleich drei (oder noch mehr) Probe-Eier herstellt?

Aufgabenblatt 27

A 27.1 Welche reellen Zahlen x erfüllen die Gleichung

$$\left\lfloor \frac{\lfloor 2003x \rfloor}{2003} \right\rfloor = 2003?$$

Dabei ist $\lfloor \cdot \rfloor$ die Gaußklammer, das heißt: $\lfloor x \rfloor$ bezeichnet die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist. Es gilt also $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.

A 27.2 Von beliebigen fünf Stäben wird lediglich vorausgesetzt, dass man jeweils drei von ihnen zu einem Dreieck zusammenlegen kann. Weise nach, dass mindestens eines der Dreiecke spitzwinklig ist.

A 27.3 Ein getöntes Fenster der Firma „Glasoflex“ besteht aus drei parallelen Scheiben im Abstand von wenigen Zentimetern. Jede der Scheiben lässt 70 Prozent des auf sie fallenden Lichtes durch (egal, von welcher Seite das Licht auf die Scheibe fällt), reflektiert 20 Prozent und die restlichen 10 Prozent werden absorbiert (bleiben in der Scheibe).

Wie viel Prozent des einfallenden Lichtes werden von einem Fenster der Firma Glasoflex durchgelassen?

Beachte, dass zum Beispiel der Teil des Lichtes, der von der zweiten Scheibe reflektiert wird, wieder auf die erste Scheibe fällt und dort zum Teil wieder reflektiert wird usw.

A 27.4 Es werden n gewöhnliche Spielwürfel in einer Reihe nebeneinander auf den Tisch gelegt. Man addiert alle Augenzahlen, die nicht durch den Tisch oder durch einen Nachbarwürfel verdeckt sind. Die maximale Augenzahl, die man so erhalten kann, werde mit $A(n)$, die minimale mit $a(n)$ bezeichnet. Wir betrachten nun die Folge der Differenzen $d(n) = A(n) - a(n)$. Für gewisse n ist das Folgenglied $d(n)$ eine Quadratzahl (z. B. für $n = 2$, $n = 6$).

Für welche Würfelanzahl n erhält man die 1000. Quadratzahl der Folge?

Aufgabenblatt 28

A 28.1 Wir betrachten zwei verschiedene Punktmengen in der (x, y) -Ebene: Zum einen die Menge aller Punkte, die die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ erfüllen, zum anderen diejenigen Punkte, die die Gleichung $y = x^2 + t$ mit einem frei bestimmmbaren Parameter t erfüllen.

Für welche Werte von t haben die beiden Mengen genau einen Punkt gemeinsam?

A 28.2 Prinz Siegfried soll zwei Drachen töten, um die schöne Prinzessin zu bekommen.

Beide Drachen haben 1000 Köpfe. Siegfried kann ihnen mit einem Hieb seines Schwertes Excalibur wahlweise genau 13, 17, 20 oder 5 Köpfe abschlagen, woraufhin aber sofort 22, 2, 14 bzw. 17 Köpfe nachwachsen (bei 13 abgeschlagenen wachsen also 22 nach, bei 17 abgeschlagenen wachsen 2 nach usw.).

Es ist überliefert, dass der eine Drache genau dann stirbt, wenn er (nach dem Nachwachsen) genau 333 Köpfe hat; der andere stirbt, wenn ihm alle Köpfe abgeschlagen wurden (in diesem Fall wächst keiner mehr nach).

Welche(n) der Drachen kann Siegfried jemals töten, und wenn ja, wie, bzw. wenn nein, warum nicht?

A 28.3 Yvonne wirft sechsmal eine 1-Euro-Münze und Zacharias wirft dieselbe Münze siebenmal.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Zacharias öfter „Zahl“ wirft als Yvonne?

Hinweis für Ästheten: Es gibt auch eine schöne Lösung.

A 28.4 Eine Einbahnstraße wird von einer nicht abbrechenden Folge von Autos befahren. Die Autos haben jeweils die Breite 2 m und die Länge 5 m und fahren im Normalverkehr mit der Geschwindigkeit 10 m/s und mit einem Abstand von jeweils 10 m zueinander, im Berufsverkehr nur mit der Geschwindigkeit 1,5 m/s und mit einem Abstand von 5 m zueinander am rechten Straßenrand.

Peter überquert die Straße senkrecht mit der Geschwindigkeit 2 m/s, ohne auf den Verkehr zu achten.

- a) Wie groß ist in beiden Fällen die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Peter die Straße unverletzt überquert?

- b) Kann Peter diese Wahrscheinlichkeit vergrößern (und wenn ja, um wie viel), indem er in anderer als senkrechter Richtung (aber weiterhin geradlinig) die Straße überquert?

(Was hier beschrieben wird, ist natürlich ganz und gar nicht im Sinne eines vernünftigen Verhaltens im Verkehr. Daher bitte „rein mathematisch“ betrachten und nicht selbst ausprobieren!)

Aufgabenblatt 29

A 29.1 Entscheide jeweils, welche der beiden Zahlen die größere ist!

a) $\sqrt{32} + \sqrt{98}$ oder $\sqrt{50} + \sqrt{72}$?

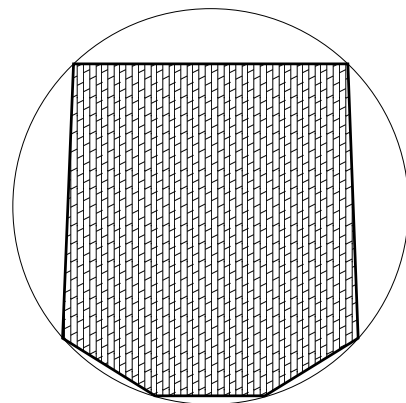
b) $\sqrt{28} + \sqrt{82}$ oder $\sqrt{33} + \sqrt{74}$?

Der Taschenrechner mag sofort eine Antwort liefern; aber wir – als Mathematiker mit hohem Ehrgefühl – verlassen uns natürlich nicht auf die Rechengenauigkeit dieses seelenlosen Gerätes, sondern suchen eine Lösung ohne technische Hilfsmittel!

A 29.2 Damals im Wilden Westen: Smith, Miller und Jones triellieren sich. Zu Beginn wird per Los bestimmt, wer als Erster, Zweiter und Dritter schießen darf. Dann nimmt jeder seine Position in jeweils einer Ecke eines gleichseitigen Dreiecks ein. Reihum darf jeder – sofern er noch lebt – genau einen Schuss abfeuern, und zwar in eine beliebige Richtung. Alle wissen, dass Smith jedes Mal sein Ziel trifft, Miller mit 80-prozentiger Wahrscheinlichkeit und Jones nur zu 50 Prozent. Das Triell ist zu Ende, wenn nur noch einer lebt. Jeder wählt natürlich die für sich optimale Strategie. Wie sind die Gewinnchancen jedes Teilnehmers?

A 29.3 Ein Mathematikerorden will ein Wappen für sich entwerfen. Über die äußere Form des Wappens besteht bereits Einigkeit: Es soll ein Sechseck sein, dessen Ecken auf einem Kreis liegen und bei dem drei aufeinander folgende Seiten die Länge 2 haben und die drei anderen die Länge 5.

Welchen Radius muss eine kreisrunde Metallplatte mindestens haben, um aus ihr ein solches Wappen ausschneiden zu können?



A 29.4

- a) Gibt es paarweise verschiedene Ziffern a, b und c so, dass je zwei der dreistelligen Zahlen, die sich aus diesen drei Ziffern bilden lassen, zueinander teilerfremd sind?
- b) Wie lautet die Antwort, wenn man vier verschiedene Ziffern nimmt und alle vierstelligen Zahlen betrachtet, die sich aus diesen Ziffern bilden lassen?

c) Wie lautet die Antwort bei 5, 6, ... verschiedenen Ziffern?

Beispiel zu a): Wählt man die drei Ziffern 1, 3 und 9, so erhält man die sechs Zahlen: 139, 193, 319, 391, 913 und 931.

Nun ist zwar 139 zu jeder der anderen teilerfremd und ebenso 193, aber 319 und 913 sind beide durch 11 teilbar ($319 = 11 \cdot 29$ und $913 = 11 \cdot 83$). Somit sind 319 und 913 nicht teilerfremd und die drei Ziffern erfüllen die Bedingung nicht.

Aufgabenblatt 30

A 30.1 Auf einem quadratischen Schachbrett mit 121 Feldern steht auf jedem Feld eine Spielfigur. Nachdem jemand das Brett versehentlich umgestoßen hat, stellt er die Figuren erneut auf. Kann es passieren, dass dabei jede Figur auf ein Feld gestellt wird, das zu dem Feld, auf dem sie vorher stand, benachbart ist?

A 30.2 Nina denkt sich drei aufeinanderfolgende Zahlen, deren Summe ungerade ist, und bildet deren Produkt. Michael, der weder die drei Zahlen noch deren Produkt kennt, möchte möglichst viele Teiler des Produktes erraten. Welche Teiler kann Michael auf jeden Fall nennen?

A 30.3 Sechs Studenten gehen in die Mensa. Jedes der drei angebotenen Essen haben sie genau zweimal geholt. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die sechs Studenten so an einen runden Tisch mit sechs Stühlen zu setzen, dass diejenigen mit gleichem Essen nicht nebeneinandersitzen? Anordnungen, die sich nur durch eine Drehung unterscheiden, sollen als gleich gelten.

A 30.4 Lisa hat fleißig quadratische Tischdeckchen mit 40 cm Seitenlänge für ihren Kaffeetisch gehäkelt. Leider ist ihr Tisch nur $79,5 \times 79,5 \text{ cm}^2$ groß. Wie viele ihrer neuen Deckchen bekommt sie auf ihren Tisch, ohne dass diese aufeinanderliegen oder über die Tischkante ragen?

Aufgabenblatt 31

A 31.1 An einer langen Lichterkette gibt es 2003 Glühlampen, die von 1 bis 2003 durchnummeriert sind und alle einen eigenen An/Aus-Schalter besitzen. Zu Beginn sind alle Lampen aus.

Nun geht eine erste Person alle Lampen durch und betätigt die Schalter aller Lämpchen, deren Nummer durch 1 teilbar ist (das sind natürlich alle). Dann geht eine zweite Person die Lichterkette entlang und betätigt alle Schalter, deren Lampennummer durch 2 teilbar ist usw. Zum Schluss geht die 2003. Person entlang und betätigt alle Schalter, deren Lampennummern durch 2003 teilbar sind (das ist dann nur noch das letzte Lämpchen). Wie viele Lämpchen sind nach dieser Prozedur angeschaltet?

A 31.2 Angenommen, für zwei reelle Zahlen x und y gilt $2x^2 - 2xy + y^2 = 0$. Welche(n) Wert(e) kann dann $(x + 41)^2 + (y - 17)^2 + 33$ annehmen?

A 31.3 Zeige, dass es für alle natürlichen Zahlen $n \geq 10$ zwischen n und $3 \cdot n$ eine Kubikzahl gibt.

A 31.4 Auf dem Tisch liegt ein Kartenstapel mit 52 Karten, nummeriert und geordnet von 1 bis 52, wobei die Karte mit der Nummer 1 ganz oben liegt. Der Stapel soll nun gemischt werden durch wiederholtes Ausführen der folgenden Operation: Teile den Stapel durch Abheben in zwei Teilstapel und nimm von diesen in beliebiger Reihenfolge die Karten von oben, um einen neuen gemeinsamen Stapel zu formen.

Für acht Karten 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 könnte man zum Beispiel die beiden Stapel 1, 2, 3, 4, 5 und 6, 7, 8 bilden und dann daraus den neuen Stapel 6, 1, 2, 3, 7, 8, 4, 5.

Gib eine Folge solcher Operationen an, die den Anfangsstapel von 52 Karten „umdreht“, ihn also in 52, 51, ..., 3, 2, 1 überführt!

Geht dies mit fünf oder weniger Operationen?

Aufgabenblatt 32

A 32.1 Der kleine Tobias kann kaum bis Weihnachten warten. Er will unbedingt wissen, was er geschenkt bekommt – bisher weiß er nur, dass es Bücher, CDs und Stofftiere sind (wobei die Pluralform hier keine Bedeutung hat, es ist aber je mindestens ein Geschenk). Da erscheinen ihm zwei Wesen. Sie sagen ihm Folgendes:

A: Du bekommst genau 2 CDs.

B: Du bekommst genau 9 Geschenke.

A: Du bekommst genau zwei Bücher mehr als Stofftiere.

B: Du bekommst mehr CDs als Stofftiere.

A: Du bekommst mindestens so viele CDs wie Bücher.

Armer Tobias – jetzt ist er noch verwirrter! Hätte ihm jemand gesagt, dass eines der Wesen ein Weihnachtsengel war (der immer die Wahrheit sagt) und das andere ein Weihnachtsteufelchen (das nur Falsches sagt), dann wäre er glücklicher. Oder? Was bekommt Tobias zu Weihnachten geschenkt?

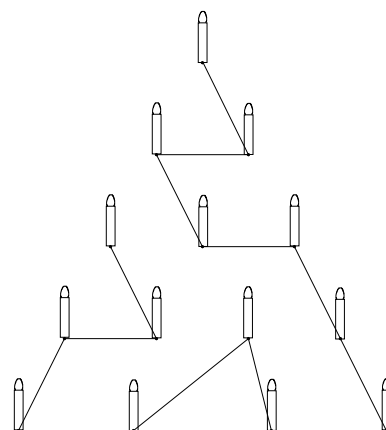
A 32.2 Wir nennen eine natürliche Zahl „lupfig“, wenn sie durch alle ihre Ziffern teilbar ist. So ist zum Beispiel 36 lupfig, weil sie durch 3 und 6 teilbar ist, hingegen sind 23, 30 und 71 nicht lupfig.

Was ist die Summe aller lupfigen Zahlen zwischen 10 und 100?

A 32.3 Der Kaufhausgehilfe Peter bekommt den Auftrag, die neue Lieferung würfelförmiger Keksdosen im Schaufenster dekorativ aufzubauen. Jede Dose hat dabei eine Seitenlänge von 5 cm und die Lieferung besteht aus einer großen, bis zum Rand gefüllten Kiste mit den inneren Abmessungen $65\text{ cm} \times 215\text{ cm} \times 305\text{ cm}$. Als Peter seinem Chef berichtet, er sei mit seiner Arbeit fertig und die Dosen hätten genau gereicht, um zwei verschieden große Quadrate zu formen (jeweils aus genau einer Schicht Dosen, also so, dass jede Dose sichtbar ist), ist der Chef skeptisch. Er behauptet, Peter müsse dann mindestens eine Keksdose unterschlagen haben. Wie kommt er zu dieser Schlussfolgerung?

Zusatzaufgabe: Kann man Peter auch noch nachweisen, dass er noch mehr Dosen unterschlagen haben muss?

A 32.4 Familie Meiers Weihnachtsbaum ist mit elektrischen Kerzen geschmückt, genauer gesagt mit einer Lichterkette mit 14 Kerzen. Die Lichter werden jeden Abend angeschaltet, zuerst am 24. Dezember (noch mit den Glühbirnen vom Vorjahr), das letzte Mal am 6. Januar, also genau 14 Abende lang. Die Erfahrung zeigt, dass jede Vorjahresglühbirne in Laufe dieser Zeit kaputtgeht, und zwar an jedem Abend genau eine. Der Ärger, die Birne auszuwechseln, wächst mit der Ebene, auf der sie angebracht ist. (n -te Ebene von unten = n „Ärgerpunkte“.) Am Silvestervormittag muss ja sowieso die Feier vorbereitet werden, da wäre es möglich, die Kerzenkette bei gleichem Anordnungsschema umzudrehen, wenn dadurch der noch kommende Ärger verringert werden kann. Mit welcher Wahrscheinlichkeit lohnt sich das?



Aufgabenblatt 33

A 33.1 Was ist die kleinste positive ganze Zahl, die für jede der Ziffern $0, 1, 2, \dots, 9$ einen Teiler hat, der mit dieser Ziffer endet?

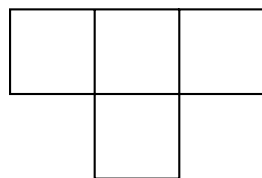
A 33.2 Für wie viele ganze Zahlen x ist $\sqrt{x^2 + 33x + 1}$ eine natürliche Zahl?

A 33.3 Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC . Zeige, dass es für jeden inneren Punkt P von ABC ein Dreieck mit den Seitenlängen $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ und $\overline{PC}$ gibt. Ist diese Aussage auch noch wahr, wenn ABC nicht gleichseitig ist?

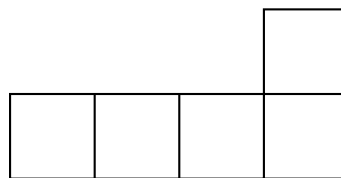
A 33.4 Herr Meyer hatte sich für sein Bad Fliesen der Form „T“ bestellt (siehe Bild), um eine gewisse zusammenhängende Fläche auszubessern. Die Fliesen hatte er dabei genau so ausgesucht, dass sie die Fläche bei geeigneter Anordnung haargenau füllen.

Nun bekam Herr Meyer aber eine falsche Lieferung, die nur Fliesen der Form „L“ enthielt (siehe Bild). Es stellte sich jedoch heraus, dass er die auszubessernde Fläche auch mit diesen Fliesen vollständig füllen konnte.

Was ist die minimale Größe einer solchen Fläche, die sich sowohl mit T-Fliesen als auch mit L-Fliesen ausfüllen lässt?



Form „T“



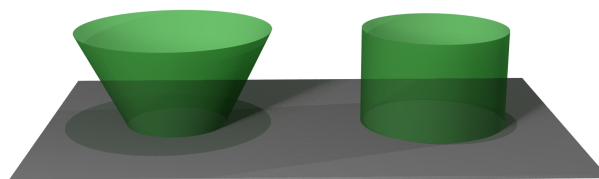
Form „L“

Aufgabenblatt 34

A 34.1 Drei Piraten wollen sich 21 gleich große Fässer Rum teilen, von denen sieben voll, sieben halb voll und sieben leer sind.

Kann jeder dieselbe Menge an Rum und dieselbe Anzahl an Fässern bekommen?

A 34.2 Peter hat zwei Schalen für seine Geburtstagsbowle, die in der folgenden Abbildung dargestellt sind.



Beide Gefäße sind 40 cm hoch. Das linke hat oben einen Durchmesser von 40 cm und unten einen Durchmesser von 20 cm und das rechte hat einen konstanten Durchmesser von 30 cm. Peter füllt jeweils genau die Hälfte seiner Bowle in die beiden Gefäße und stellt überrascht fest, dass beide bis zur gleichen Höhe gefüllt sind.

Wie viel Bowle hat Peter seinen Gästen anzubieten?

A 34.3 Jessicas Mathematiklehrer gibt seiner Klasse vier Zahlen mit der Aufgabe, bis zur nächsten Stunde die sechs paarweisen Produkte dieser Zahlen auszurechnen.

Am nächsten Tag, kurz bevor die Hausaufgaben eingesammelt werden, stellt Jessica bestürzt fest, dass sie diese vergessen hat. Heimlich lässt sie sich schnell einen Zettel mit den Antworten zustecken. Auf diesem kann sie aber nur die Zahlen 2, 3, 4, 5 und 6 entziffern. Die sechste Zahl ist verwischt.

Kann sie diese mit Hilfe der gegebenen Informationen bestimmen?

A 34.4 An einer großen Tafel stehen die Zahlen $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{2004}$. In einem Schritt darf man nun zwei beliebige Zahlen a und b an der Tafel wegwischen, muss dafür aber die Zahl $ab + a + b$ wieder an die Tafel schreiben. Da sich dabei die Anzahl der Zahlen an der Tafel um genau eins verringert, steht nach 2003 derartigen Schritten nur noch eine Zahl N an der Tafel.

Was ist das kleinstmögliche und was ist das größtmögliche N , das man auf diese Weise erhalten kann?

Aufgabenblatt 35

A 35.1 Im Herbst des Jahres 2003 gab der älteste Deutsche einer großen Tageszeitung folgende Antwort auf die Frage nach seinem Alter:

„Ich wurde an einem wunderschönen Sommersonntag geboren und auch meinen siebenten Geburtstag feierte ich an einem warmen Sonntag im Sommer.“

Wie alt war der älteste Deutsche zum Zeitpunkt des Interviews?

A 35.2 Kristin, Karsten und Robert puzzeln ein rechteckiges Puzzle. Wie üblich beginnen sie mit den Randteilen. Nach zwei Stunden haben sie den Rand vollständig fertig und Karsten bemerkt: „Damit haben wir genau vier Prozent aller Teile gepuzzelt!“

Kristin antwortet darauf: „Tatsächlich! Bei einem Puzzle mit weniger Teilen wäre das nicht möglich gewesen.“

Robert schaut ganz verwirrt drein und beginnt die Randteile zu zählen, um die Behauptungen zu überprüfen.

Wie viele Teile hat das Puzzle und wie viele haben die drei schon verbaut?

A 35.3 Jonas sucht einen Bruch $\frac{p}{q}$, dessen Dezimaldarstellung bis zur zehnten Nachkommastelle mit der Dezimaldarstellung von $\sqrt{2} = 1,414213\dots$ übereinstimmt. Finde einen solchen Bruch!

Jonas behauptet, einen solchen Bruch mit $q < 50\,000$ zu kennen. Zeige, dass er sich verrechnet hat.

A 35.4 Der Präsident der USA, der Ministerpräsident Japans und der Regierungschef Brasiliens wollen sich zu wichtigen Verhandlungen treffen. Damit niemand benachteiligt wird, einigt man sich auf einen Treffpunkt, der von Washington, Tokio und Brasilia aus (auf der Erdoberfläche gemessen) gleich weit entfernt liegt.

In welchem Land und nahe welcher Stadt trifft man sich?

Aufgabenblatt 36

A 36.1 Carolin kauft eine 4 kg schwere Wassermelone, die zu 99 (Masse-)Prozent aus Wasser besteht. Unvorsichtigerweise lässt sie sie zu lange in der Sonne liegen, bis die Melone nur noch zu 98 Prozent aus Wasser besteht. Wie schwer ist die Melone dann noch?

A 36.2 Ein sehr verwinkelter Museumsraum soll von drei Wächtern bewacht werden. Jeder soll sich an einen Ort stellen, von dem aus er den gesamten Raum beobachten kann. Zwei der Wächter finden nach kurzer Suche zwei (verschiedene) solche Plätze und lassen sich dort nieder. Der dritte Wächter irrt eine Zeit lang erfolglos im Raum umher. Kann man ihm einen Tipp geben, wo ein geeigneter Ort zu finden ist?

A 36.3 Zeige, dass die Zahl $3^{2048} - 1$ durch wenigstens 12 verschiedene Primzahlen teilbar ist.

A 36.4 Auf dem Planeten Kappa haben Wissenschaftler kürzlich den Radius ihres Planeten als genau 1000 km bestimmt. Die fünf größten Städte auf Kappa sollen in den nächsten Jahren durch direkte Eisenbahnlinien verbunden werden; in jedem Jahr soll die Strecke zwischen einem Paar von Städten fertig werden. Die Finanzmittel im ersten Jahr reichen allerdings nur für 1571 km an Eisenbahnschienen. Zeige, dass man damit trotzdem den Plan im ersten Jahr verwirklichen kann!

Aufgabenblatt 37

A 37.1 Dieses 37. Aufgabenblatt steht unter einem *guten Stern*, denn $37 - 3 \cdot 7 = 16$ ist eine Quadratzahl!

Wie viele und welche Aufgabenblätter werden noch unter einem *guten Stern* stehen, bevor das 100. Blatt erscheint?

A 37.2 Susanne spielt mit ihrem Taschenrechner. Zuerst tippt sie die Zahl 7 ein und drückt dann ziellos auf einigen Tasten des Rechners herum, genauer gesagt benutzt sie dabei nur die Tasten $\boxed{1/x}$, $\boxed{+1}$ und $\boxed{-1}$. (Die erste Taste ersetzt die aktuelle Zahl x im Display durch ihren Kehrwert $1/x$, die zweite ersetzt x durch $x+1$ und die dritte ersetzt x durch $x-1$). Danach steht auf dem Display des Rechners -7 .

Überrascht versucht sie es mit der Startzahl 100, tippt **dieselbe** Tastenfolge aus $\boxed{1/x}$, $\boxed{+1}$ und $\boxed{-1}$ und erhält tatsächlich -100 . Auch andere Startzahlen halten dem Test stand.

Wie kann eine solche Tastenfolge lauten?

A 37.3 Beim Spiel „Baumeister“ wird aus zwei gleich großen kreisförmigen Holzplatten und drei gleich hohen Holzsäulen ein Tempel gebaut. Hierzu wird die erste Holzplatte auf den Boden gelegt, dann werden die drei Säulen irgendwo auf diese Platte gestellt und anschließend soll die zweite Platte auf die Säulen so gelegt werden, dass sie genau über der Grundplatte schwebt.

Wenn die Positionen der drei Säulen zufällig ausgewählt werden, in wie viel Prozent aller Fälle gelingt dann der Tempelbau ohne Einsturz?

Hinweis: Die Säulen werden als beliebig dünn angenommen.

A 37.4 Herr Meyer hat einen quadratischen Garten, den er in vier Blumenbeete unterteilen will. Hierzu zieht er auf Geratewohl zwei gerade, zueinander senkrechte Grenzlinien. Da Herr Meyer ein Freund moderner Landschaftsarchitektur ist, sind diese Grenzlinien aber nicht unbedingt parallel zu den Seiten des Quadratgartens. Beim anschließenden Ausmessen stellt sich heraus, dass drei der entstandenen Beete gleich groß sind.

Zeige, dass dann sogar alle vier Beete die gleiche Größe haben müssen.

Aufgabenblatt 38

A 38.1 In einem Bioreaktor liegt ein einsames Bakterium. Nach einer Sekunde hat es sich in zwei Bakterien geteilt. Nach jeder weiteren Sekunde teilt sich genau eines der vorhandenen Bakterien in zwei Bakterien. Irgendwann befinden sich genau 172 801 Bakterien im Reaktor. Zeige, dass eines von ihnen mindestens einen Tag alt ist.

A 38.2 Wenn man vor eine zweistellige Zahl ihr Doppeltes schreibt, so ergibt sich die Dezimaldarstellung einer vier- oder fünfstelligen Zahl. Solche Zahlen sind zum Beispiel 26 13 bzw. 148 74. Welche der auf diese Weise gebildeten Zahlen sind durch 29 teilbar?

Welche der Zahlen, die man auf analoge Weise aus dreistelligen Zahlen erhält, sind durch 29 teilbar?

A 38.3 An drei Ecken eines quadratischen Rasenstückes der Seitenlänge 10 m ist je ein Schaf an einer 10 m langen Leine angebunden. Die Schafe weiden den Rasen ab, wobei Flächenstücke, die von mehreren Schafen erreichbar sind, von diesen auch jeweils zu gleichen Teilen abgegrast werden.

Welchen Anteil des Rasens frisst jedes der Schafe?

A 38.4 Eine Kugel k mit Radius r rollt irgendwie auf einer festen Kugel K mit Radius R . Zu Beginn liegt der Südpol von k auf dem Nordpol von K .

Auf welchen Punkten von K kann der Nordpol von k unter diesen Voraussetzungen zu liegen kommen, wenn

a) $r = R$ gilt;

b) $r < R$ gilt.

Hinweis: Beim Abrollen dürfen die Kugeln im momentanen Berührungspunkt nicht gegeneinander verdreht werden, bzw., in mathematisch exakter Sprechweise, die Drehachse von k ist zu jedem Zeitpunkt parallel zur Tangentialebene an die Kugel K im momentanen Berührungspunkt.

Aufgabenblatt 39

A 39.1 Zu Ehren des 39. Aufgabenblattes betrachten wir alle Vielfachen der Zahl 39. Was ist die Menge aller Quersummen dieser Zahlen?

A 39.2 Katrin und Wolfgang spielen folgendes Spiel: Sie markieren auf einem Blatt Papier die Ecken eines regelmäßigen 2004-Ecks. Nun dürfen sie abwechselnd ziehen, wobei ein Zug darin besteht, zwei Ecken, die bisher noch nicht benutzt worden sind, durch eine Strecke zu verbinden. Dabei darf diese Strecke allerdings keine der bisher schon gezeichneten Strecken schneiden.

Verloren hat, wer keinen erlaubten Zug mehr machen kann. Wenn Katrin den ersten Zug macht, wer kann dann den Gewinn erzwingen?

A 39.3 Auf einem Holzbrett sind n Nägel eingeschlagen ($n \geq 2$). Jemand möchte ein geschlossenes Gummiband so entlang der Nägel spannen, dass jeder Nagel vom Gummiband berührt wird und sich das Band nirgends selbst überkreuzt.

Ist dies stets möglich oder gibt es ungünstige Verteilungen der Nägel, bei denen das nicht der Fall ist?

A 39.4 Welche Paare (x, y) reeller Zahlen erfüllen die Gleichung

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 4x + 4y + 8} + \sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5} = 5?$$

Aufgabenblatt 40

A 40.1 Bei den Jugendfeuerwehrspielen in Fleckendorf gibt es für einen der Teilnehmer folgende Aufgabe zu bewältigen:

Eine Wasserleitung soll so lange wie möglich ununterbrochen mit Wasser versorgt werden. Die Leitung wird über einen Trichter befüllt, in den 5 Liter passen. Aus ihm läuft in 10 Sekunden genau 1 Liter Wasser in die Leitung. Als Nachschub stehen in einer langen Reihe, jeweils mit 5 m Abstand, gefüllte 5-Liter-Wassereimer bereit. Beim Holen der Eimer geht man erfahrungsgemäß genau einen Meter pro Sekunde (die Eimer sind ja schwer ...) und man darf immer nur einen Eimer zur Zeit schleppen. Dafür geht das Befüllen *sehr* schnell. Zu Beginn steht man am Trichter und hat bereits einen 5-Liter-Eimer in der Hand, den man zum Start in den Trichter entleert.



- a) Wie lange kann man das Wasser ununterbrochen fließen lassen?
- b) Wie lange geht es, wenn der Einfülltrichter 10 Liter fasst?
- c) Und wie ist es, wenn er 15 Liter fasst?

A 40.2 Drei Mathematiker unterhalten sich:

Thomas sagt: „Ist 32 nicht eine *schöne* Zahl? Berechnet man die dritte Potenz dieser Zahl, also $32^3 = 32768$, so sieht man, dass das Ergebnis ebenfalls mit 32 beginnt.“

Ulrich sagt: „Mal was anderes: Ich vermute, dass die Dezimaldarstellung jeder der Zahlen $\sqrt[k]{10}$ mit $k \geq 2$ unendlich viele Neunen enthält!“

Benno sagt: „Wenn Ulrich mit seiner Vermutung Recht hat, dann gibt es unendlich viele schöne Zahlen, die nicht durch 10 teilbar sind, und ich kann euch zeigen, wie man beliebig große schöne Zahlen berechnen kann!“

- a) Zeige, dass Benno die Wahrheit sagt!
- b) Auch für höhere Exponenten gibt es *schöne* Zahlen, denn zum Beispiel ist

$$46416^4 = 4641633499322843136 \text{ und} \\ 14678^7 = 146780439427525678437261283712.$$

Zeige: Wenn Ulrich Recht hat, dann gibt es zumindest für jeden der Exponenten $3, 4, 5, \dots, 10$ unendlich viele schöne Zahlen, die nicht durch 10 teilbar sind!

A 40.3 Ausgehend von einem beliebigen positiven Bruch $\frac{a}{b}$ bildet Stephan den Bruch $\frac{a+7b}{a+b}$ und wiederholt diese Prozedur einige Male. Überrascht stellt er fest, dass sich sehr bald der Wert des Bruches kaum mehr ändert!

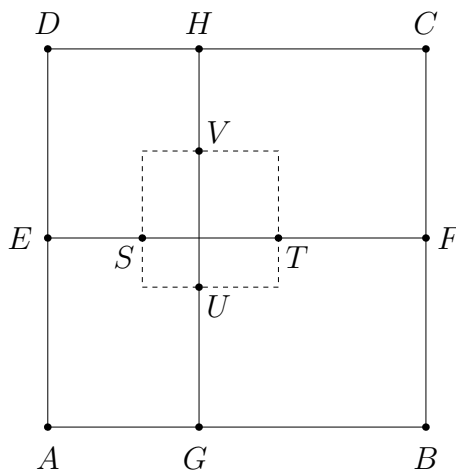
- Welchem Wert nähern sich die Brüche bei wiederholter Ausführung der Prozedur? (Anders gesagt: Gegen welchen Wert konvergiert die Folge der Brüche?)
- Wie ist die Antwort, wenn man in der Prozedur die Zahl „7“ durch irgendeine andere nichtnegative Zahl n ersetzt?
- Was geschieht für negative n ?

A 40.4 Konrad sagt zu Jonathan: „Hier habe ich ein Quadrat $ABCD$ mit Seitenlänge 1. In Gedanken habe ich darin achsenparallel ein zweites Quadrat versteckt. Du sollst herausfinden, wo dessen Mittelpunkt liegt.“

Jonathan erwidert: „Sag mir wenigstens, ob die Strecke EF (die die Seitenmitten von AD und BC verbindet) das Quadrat schneidet.“

Daraufhin Konrad: „Sie schneidet das Quadrat in zwei Punkten S und T , wobei S näher an E liegt als T . Ich sage dir zwar nicht, wo genau diese Schnittpunkte liegen, aber es gilt $\frac{ES}{FT} = 1/4$.“

Wo kann jetzt noch der Mittelpunkt des Quadrates liegen?



Jonathan fragt weiter: „Und wie ist es mit der Strecke GH (sie liegt parallel zur Seite AD und hat von ihr den Abstand $2/5$)?“

Konrad antwortet: „Auch sie schneidet das kleine Quadrat, und zwar in zwei Punkten U (näher an G) und V , und der Bruch $\frac{GU}{HV}$ hat den Wert $2/3$.“

Wie sieht die Situation mit dieser weiteren Information aus?

Aufgabenblatt 41

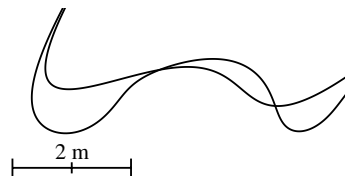
A 41.1 Fußball-Superstar Matthias Lothar hat zur Saisonhalbzeit in weniger als 75 % aller Spiele ein Tor geschossen, wurde aber in mehr als 75 % der bisherigen Spiele vom Schiedsrichter mit einer gelben Karte verwarnt.

Nach einer kräftigen Standpauke des Trainers verbessert sich Lothar, so dass er am Ende der Saison tatsächlich in mehr als 75 % aller Spiele ein Tor geschossen hat und in weniger als 75 % der Spiele verwarnt wurde.

Muss es dann notwendigerweise einen Zeitpunkt geben, zu dem Lothar in genau 75 % der bisherigen Spiele ein Tor geschossen hat? Muss es einen Zeitpunkt geben, zu dem Lothar in genau 75 % der bisherigen Spiele verwarnt wurde?

Anmerkung: Dass in der Bundesliga ein Spieler nach zu vielen gelben Karten gesperrt wird, vernachlässigen wir der Einfachheit halber ...

A 41.2 Fahrraddieb Paul Langfinger hinterließ unvorsichtigerweise mit einem Beutestück folgende Spur im Schnee:



Dabei stammt eine der beiden Kurven vom Vorderrad, die andere vom Hinterrad. In welche Richtung sollte man rennen, um Paul eventuell noch einzuholen?

A 41.3 Die Mathematiker-Bank bietet ihren Kunden zehnstellige Kontonummern. Nun sind die meisten Mathematiker recht eigen und wünschen, dass jede Ziffer ihrer Kontonummer eine Primzahl ist. Danach richtet sich die Bank auch und weiß zusätzlich noch, dass Mathematiker bisweilen etwas zerstreut sind und Zahlen verwechseln – daher sollen sich zwei beliebige Kontonummern in wenigstens fünf Stellen unterscheiden.

- a) Zeige, dass die Bank höchstens 4096 Konten für Mathematiker einrichten kann.
- b) Zeige, dass die Bank sogar nur höchstens 2404 Konten bereitstellen kann.

A 41.4 Ein Polynom $p(x)$ habe ganzzahlige Koeffizienten und mindestens sieben verschiedene ganzzahlige Nullstellen. Zeige, dass dann das Polynom $q(x) = p(x) - 2004$ überhaupt keine ganzzahlige Nullstelle hat.

Gilt dies auch noch, wenn $p(x)$ mindestens sechs verschiedene ganzzahlige Nullstellen hat?

Aufgabenblatt 42

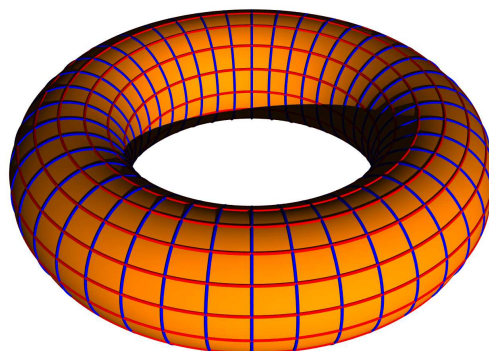
A 42.1 Denke dir eine beliebige Zahl, in der die Einerziffer größer als alle anderen Ziffern ist und in der die Ziffern von links nach rechts an keiner Stelle kleiner werden. Solche Zahlen sind zum Beispiel 567 oder auch 11122345558.

Multipliziere die von dir gedachte Zahl mit 9, ziehe 1 ab und bilde die Quersumme der erhaltenen Zahl. Multipliziere das Ergebnis mit 5 und addiere 2.

Was ist das Ergebnis? Erhält man immer dieses Ergebnis?

A 42.2 Gegeben seien 180 verschiedene Punkte in der Ebene. Zeige, dass es unter ihnen drei Punkte A, B, C so gibt, dass $\angle ABC \leq 1^\circ$ ist.

A 42.3 Die Oberfläche des Planeten Omega hat die Form eines Torus und ist durch 582 Breitenkreise (auf dem Titelbild rot) und 2004 Längskreise (auf dem Titelbild blau) in Bezirke eingeteilt.



In einigen Bezirken sollen neue Rundfunkstationen errichtet werden, wobei allerdings darauf geachtet werden muss, dass keine zwei Stationen in Bezirken errichtet werden, die zwischen den gleichen zwei benachbarten Breiten- oder Längskreisen liegen. Außerdem dürfen keine zwei Stationen durch einen diagonalen Weg, also einen Weg, der ausgehend von einem Bezirk stets durch den rechts oben (bzw. rechts unten, links oben oder links unten) benachbarten Bezirk verläuft, verbunden sein.

Wie viele Bezirke mit neuen Rundfunkstationen kann es auf Omega höchstens geben?

A 42.4 In einem Koordinatensystem sind genau alle ganzzahligen Gitterpunkte (a, b) mit $1 \leq a \leq 42$ und $1 \leq b \leq 42$ rot gefärbt. Wie viele Quadrate gibt es, deren Eckpunkte sämtlich rot gefärbt sind?

Aufgabenblatt 43

A 43.1 Finde alle Paare (a, b) von dreistelligen natürlichen Zahlen a und b , für die die sechstellige Zahl z , die man durch Hintereinanderschreiben von a und b erhält, durch das Produkt $a \cdot b$ teilbar ist.

A 43.2 Kann man mehr oder weniger als die Hälfte aller natürlichen Zahlen von 1 bis 10^{20} als Summe einer Quadratzahl, einer vierten Potenz einer natürlichen Zahl und einer fünften Potenz einer natürlichen Zahl schreiben?

Hinweis: Die Zahl 5 besitzt zum Beispiel die Darstellung $2^2 + 0^4 + 1^5$, die Zahl 7 besitzt keine solche Darstellung.

A 43.3 Pablo und Salvador spielen folgendes Spiel:

Pablo zeichnet ein rotes Dreieck auf ein Blatt Papier. Anschließend zeichnet Salvador vier weiße, zu dem roten Dreieck kongruente Dreiecke auf Papier und schneidet sowohl diese als auch das rote Dreieck aus. Diese fünf kongruenten Dreiecke legt er irgendwie auf den Tisch (dabei darf er sie auch seitenverkehrt hinlegen). Anschließend muss Pablo versuchen, die weißen Dreiecke so auf dem Tisch zu verschieben (ohne sie zu drehen!), dass sie das rote Dreieck, welches nicht bewegt werden darf, vollständig abdecken.

Zeige, dass Pablo das Spiel gewinnen kann, ganz egal wie Salvador spielt!

Gewinnt Pablo auch noch, wenn Salvador die Form des roten Dreiecks auswählen darf?

A 43.4 In dem alten buddhistischen Kloster Wan-Dan (nahe Hanoi) beschäftigen sich die Mönche seit alters her mit einem heiligen Brauch:

Sie haben 2000 Edelsteine zur Verfügung, die sich alle voneinander unterscheiden. Zu Beginn des Ritus wird an einem Morgen eine gerade Anzahl $2n$ von Steinen ausgewählt. Sodann werden, um zugleich die Vielfältigkeit und die Ausgewogenheit der Welt zu versinnbildlichen, die $2n$ Steine in andächtiger Ruhe dreimal täglich, am Morgen, am Mittag und am Abend, auf eine kupferne und eine irdene Schale aufgeteilt, und zwar so, dass in jede Schale n Steine kommen.

Hierbei wird strengstens darauf geachtet, dass jede mögliche Verteilung der Steine auf die beiden Schalen im Laufe des Rituals genau einmal vorkommt. Für die Zukunft des Klosters ist nun entscheidend, wann das Ende des Rituals erreicht wird: Geschieht es des Abends, so verheißt die Zukunft Gutes. Ansonsten aber droht schweres Unheil.

Für wie viele Zahlen $2n$ an gewählten Edelsteinen mit $1 \leq n \leq 1000$ können die Mönche beruhigt in die Zukunft blicken?

Aufgabenblatt 44

A 44.1 Wie oft am Tag stehen der Minuten- und der Stundenzeiger einer Uhr senkrecht aufeinander und wann geschieht dies nach Mitternacht zum ersten Mal?

A 44.2 Kirstin und Lars stellen sich zusammen mit 2005 weiteren Kindern im Kreis auf, wobei Kirstin nicht neben Lars steht. Abwechselnd berühren die beiden dann jeweils einen ihrer direkten Nachbarn, worauf dieser Nachbar den Kreis verlassen muss. Gewonnen hat, wer von den beiden als letztes im „Kreis“ steht. Wenn Kirstin beginnt, wer von beiden kann bei klugem Spiel gewinnen?

A 44.3 Olaf schreibt die Zahlen 1 und 2 nebeneinander in eine Reihe. Er berechnet das Produkt $1 \cdot 2 = 2$ und fügt die Ziffer 2 hinten an die Reihe an. Danach nimmt Olaf die nächsten beiden Ziffern 2 und 2 und fügt das Produkt 4 wieder hinten an die Reihe an. Im nächsten Schritt erhält Olaf analog die Ziffer 8 und fügt sie an. Danach muss er $4 \cdot 8 = 32$ berechnen und die beiden neuen Ziffern 3 und 2 anfügen. Bis dahin hat die entstandene Reihe also die Gestalt

1, 2, 2, 4, 8, 3, 2.

Nun nimmt Olaf wieder das nächste Paar benachbarter Zahlen, deren Produkt noch nicht berechnet wurde, also 8 und 3, und fügt die Ziffern des Produktes $8 \cdot 3 = 24$ hinten an die Reihe an. Nach zwei weiteren Schritten hat die Reihe dann die Form

1, 2, 2, 4, 8, 3, 2, 2, 4, 6, 4.

Wenn Olaf die Reihe immer weiter so fortsetzt: An welcher Stelle der Reihe kommt die erste 0 vor? Wo die erste 5, die erste 7 und die erste 9?

A 44.4 Die Mönche des Klosters Wan-Dan im nordvietnamesischen Tonking-Gebirge beherbergen in ihrem Gewölbekeller seit Jahrtausenden einen wertvollen Schatz, nämlich einen riesigen, gläsernen Bergkristall, in dem große Mengen an Gold, Silber und Platin eingeschlossen sind. Einer uralten Prophezeiung zufolge müssen die Weisen des Klosters noch in diesem Jahr den Kristall durch einen einzigen ebenen Schnitt so teilen, dass in jedem der beiden entstehenden Teile (die bei ungünstiger Form des Kristalls auch aus mehreren Brocken bestehen dürfen) die gleiche Menge an Gold, an Silber und an Platin ist. Sollte der Schnitt nicht eben oder die Edelmetalle nicht gleichmäßig aufgeteilt sein, so droht dem Kloster ewiges Unheil. Zeige, dass die Mönche ihr Kloster retten können!

Aufgabenblatt 45

A 45.1 Der Stamm des Kastanienbaumes in unserem Garten hat einen Durchmesser von vier Metern. Er gabelt sich in drei Äste auf, von denen jeder den halben Durchmesser des Stammes hat, und auch jeder dieser drei Äste gabelt sich wieder in drei kleinere Äste mit halb so großem Durchmesser wie der vorherige Ast auf. Dies gilt ebenso für jeden Ast, dessen Durchmesser mindestens drei Millimeter beträgt; kleinere Zweige gabeln sich nicht weiter auf. An jedem Ast bzw. Zweig (auch an Ästen, die sich noch weiter verzweigen) hängen genau drei Blätter und genau drei Kastanien.

Wie viele Kastanien hängen an dem Baum?

A 45.2 Zeige, wie man ein gleichseitiges Dreieck in drei gleichschenklige Trapeze zerschneiden kann.

Kann man auch ein Quadrat in eine endliche Anzahl von gleichschenkligen Trapezen zerschneiden, wobei keines der Trapeze ein Rechteck ist?

Hinweis: Ein Trapez heißt gleichschenklig, wenn es bezüglich der Geraden, die durch die Mittelpunkte der beiden parallelen Seiten des Trapezes verläuft, spiegelsymmetrisch ist.

Weil dies ein Ferienblatt ist, legen wir noch etwas drauf und schreiben einen kleinen Wettbewerb aus: Wer uns die Zerlegung mit der kleinsten Anzahl an Trapezen schickt, bekommt einen symbolischen Preis.

Und wer Gefallen an dem Zerlegen gefunden hat, sei ermutigt herauszufinden, welche Arten von Dreiecken man in solche Trapeze zerlegen kann!

A 45.3 Olaf ist immer noch mit seiner Zahlenfolge

$$1, 2, 2, 4, 8, 3, 2, 2, 4, 6, 4, \dots$$

beschäftigt. Zur Erinnerung: Beginnend mit den Ziffern 1 und 2 multipliziert Olaf immer zwei benachbarte Ziffern und schreibt das Ergebnis der Rechnung hinten ans Ende der Reihe.

Enttäuscht, dass seine Folge keine der Ziffern 0, 5, 7 und 9 enthält, fragt er sich nun, ob die Folge der Ziffern wenigstens irgendwann periodisch wird. Kannst du ihm diese Frage beantworten?

Hinweis: Eine Folge $a_1, a_2, a_3, \dots$ von Zahlen heißt periodisch, wenn es eine positive ganze Zahl k gibt, für die $a_{n+k} = a_n$ für alle $n \geq 1$ gilt.

A 45.4 Das uns bereits bekannte, ansonsten aber unscheinbare und abgelegene Kloster Wan-Dan birgt viele weitere Geheimnisse. So besteht die Klosterbibliothek

aus einem sehr langen Regal, auf dem die alten Schriften vor sehr langer Zeit in 999 Bänden durchnummeriert von links nach rechts in einer Reihe angeordnet standen. Seitdem durfte zu keinem Zeitpunkt mehr als eines der kostbaren Bücher aus dem Regal zur Ausleihe entnommen werden. Außerdem musste, den heiligen Regeln des Konfusius folgend, ein entnommenes Buch stets so an eine neue Stelle des Regals einsortiert werden, dass zwischen dem alten und neuen Standort eine gerade Anzahl anderer Bücher steht. Ein Nichtbeachten dieses Rituals resultiert – wie immer – in großem Unheil für das Kloster.

Eines morgens schreitet der Bibliothekar nun bei seinem Rundgang das Regal der 999 Bücher von rechts nach links ab und liest dabei still die Nummern der Bücher: „Band 1“, „Band 2“, „Band 3“, . . . , bis er am Ende des Regals bei „Band 999“ ankommt.

Nach kurzem Nachdenken erschrickt er zutiefst und schlägt Alarm. Warum?

Aufgabenblatt 46

A 46.1 Es ist Wahlzeit, und da wird ja immer fleißig gerechnet ... Svenja zum Beispiel überlegt sich am Wahltag, ob sie noch wählen gehen will. Sie spekuliert: „Wenn ich nicht wähle, fällt meine Partei in meinem Wahlbezirk (Wahllokal) bestimmt unter die 5-Prozent-Hürde. Wenn ich aber wählen gehe, könnte es sogar sein, dass sie auf einen zweistelligen Wert kommt.“

Welche Annahmen hat Svenja über die Wählerschaft ihrer Partei und die Wahlbeteiligung insgesamt in ihrem Wahlbezirk gemacht? (Kannst du dir vorstellen, wo Svenja wohnt?)

A 46.2 Zu Ehren des 46. Aufgabenblattes: Finde alle Paare (a, b) positiver ganzer Zahlen, für die

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = \frac{3}{46}$$

gilt.

A 46.3 Christoph hat in seinem Sparschwein Ein- und Zwei-Euro-Münzen (und keine anderen). Wenn er zufällig zwei davon herausnimmt, dann hat er mit genau 50-prozentiger Wahrscheinlichkeit exakt drei Euro herausgenommen. Er weiß auch noch von einer früheren Zählung, dass er mindestens 170 Münzen im Sparschwein hat. Außerdem ist er sich sicher, dass es nicht gleich viele Ein- und Zwei-Euro-Münzen sind. Kann er sich mit dem Geld im Sparschwein seinen großen Wunsch, einen Computer für 289 Euro, kaufen?

A 46.4 Um seiner Tochter Rapanuia eine Freude zu machen, verwandelt Lord Stevenson die Osterinsel, auf der sie gerade im Urlaub weilen, in eine Schatzinsel. Bekanntermaßen stehen auf der Osterinsel 638 Moais, kolossale Steinstatuen unbekannten Zweckes. Jeweils in der Mitte zwischen zwei Moais versteckt der Lord einen Goldtaler. Allerdings versteckt er an keinem Ort mehr als einen Taler. Zeige, dass Rapanuia mindestens 1273 Goldtaler finden kann.

Könnte der Lord – wäre er nur stark genug – die Steinfiguren so umstellen, dass er nicht mehr als 1273 Goldtaler verstecken muss?

Aufgabenblatt 47

A 47.1 Kann man in dem folgenden Satz die Buchstaben a, b, c, d, e, f durch Ziffern von 0 bis 9 so ersetzen, dass die Aussage des Satzes wahr wird?

In diesem Satz gibt es genau a Ziffern „0“, genau b Ziffern „1“, genau c Ziffern „2“, genau d gerade Ziffern, genau e ungerade Ziffern und genau f Primzahlen.

A 47.2 Max hat würfelförmige Bauklötzchen, und zwar einen mit Seitenlänge 7 cm, je fünf mit Seitenlänge 4 cm und 3 cm, sechs mit Seitenlänge 2 cm und sogar zwölf mit Seitenlänge 1 cm.

Kann Max einen voll ausgefüllten Quader bauen und dabei alle zur Verfügung stehenden Klötzchen verwenden?

A 47.3 Genau eine der folgenden Zahlen ist eine Primzahl. Welche?

- a) $2^{25964951} - 1$;
- b) $12345678910111213 \dots 200520062007$;
- c) $12345678987654321^2 + 12345678987654321 + 1$.

A 47.4 Zwei Punkte A und B liegen auf verschiedenen Seiten bezüglich einer Geraden g in der Ebene, wobei A näher an g liegt als B . Gibt es dann immer einen Punkt P auf der Geraden g , für den die Differenz $\overline{BP} - \overline{AP}$ maximal ist? Wie kann man einen solchen Punkt P nur mit Zirkel und Lineal konstruieren?

Aufgabenblatt 48

A 48.1 Finde alle vierstelligen Zahlen mit der Eigenschaft, dass die Zahl, die man aus ihr durch Ziffernumkehr erhält, genau viermal so groß ist wie die ursprüngliche Zahl.

Gibt es auch eine 2005-stellige Zahl mit dieser Eigenschaft?

Hinweis zur Erläuterung: 1234 ist zum Beispiel keine solche Zahl, denn $4 \cdot 1234 \neq 4321$.

A 48.2 Andre Becker und Boris Agassi stehen sich in einem Tennis-Match gegenüber. Beide Spieler sind in etwa gleich gut; das Match gewinnt, wer als Erster drei Sätze für sich entscheidet.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden volle fünf Sätze gespielt?

Ein Jahr später ist Agassi verletzungsbedingt etwas schwächer, und es stellt sich heraus, dass es nur noch mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{8}{27}$ zu einem Fünf-Satz-Match kommt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Agassi in diesem Fall einen einzelnen Satz?

A 48.3 Eine Ebene schneide einen Kegel in einer Ellipse. Des Weiteren seien k und K diejenigen beiden Kugeln, die den Kegel von innen in einem ganzen Kreis sowie die Ebene berühren. Hierbei berühre k die Ebene in A und K die Ebene in B . Zeige, dass dann A und B die beiden Brennpunkte der Ellipse sind, dass also für jeden Punkt P auf dem Rand der Ellipse die Summe der Abstände $\overline{AP} + \overline{BP}$ gleich ist. Drücke diesen Wert auch durch die Radien der beiden Kugeln und den Abstand ihrer Mittelpunkte aus!

A 48.4 Forscher finden im vietnamesischen Urwald die Überreste eines lange verlassenen Klosters. In den Ruinen entdecken sie eine Art Schachbrett mit besonderen Figuren: *Mönche*, das sind Figuren, die sich im Prinzip wie ein König beim Schach bewegen, aber nur in zwei der acht möglichen Richtungen ziehen dürfen. Beim Einsetzen der Figur kann der Spieler diese beiden Richtungen frei wählen.

Als Gegenpol zu dem auch schon in früheren Zeiten vorhandenen Bestreben, alles schnell zu erledigen und kurze Wege zu finden, sollten die Mitglieder des Klosters möglichst lange Wege finden.

Zwei der Aufgaben zu den Mönchsfiguren lauteten daher:

- Es sei auf dem 8 mal 8 Felder großen Brett ein Zielfeld vorgegeben. Wo muss man einen Mönch einsetzen und ihm welche Zugrichtungen zuweisen, damit man das Zielfeld mit so vielen Schritten wie möglich erreicht (aber auch wirklich erreicht), ohne ein Feld doppelt zu betreten?

- Wie sieht es aus, wenn man *zwei* horizontal oder vertikal nebeneinanderliegende Felder als Zielfelder vorgibt, die in beliebiger Reihenfolge erreicht werden sollen?

Weil dies die 4. Aufgabe ist, noch eine Idee für die, die es besonders knifflig lieben: Schafft man es mit einem Mönch auch, *drei* beliebig vorgegebene Felder in irgendeiner Reihenfolge nacheinander zu erreichen?

Aufgabenblatt 49

A 49.1 Bei Familie Lösche wird Ästhetik groß geschrieben: Man versucht, die vier Kerzen am Adventskranz möglichst gleichmäßig niederzubrennen; am schönsten ist es, wenn sie am Heiligen Abend alle gleich weit heruntergebrannt sind. Wie üblich wird am ersten Advent genau eine Kerze angezündet, am zweiten Advent werden genau zwei, am dritten Advent genau drei und am vierten Advent werden alle vier Kerzen angezündet und jede angezündete Kerze brennt für genau eine Stunde, bevor der Sohn der Familie sie auspusten darf. Können die Lösches es schaffen, dass die Kerzen zu Weihnachten alle gleich weit abgebrannt sind?

Wie sähe es aus, wenn es n Adventssonntage und dementsprechend n Kerzen gäbe?

A 49.2 Die Firma „Niko & Laus“ GmbH hat eine tolle Geschäftsidee: Sie will rechteckige Adventskalender mit ganzzahligen Seitenlängen (in Zentimetern) herstellen, bei denen das n -te Türchen ebenfalls rechteckig mit ganzzahligen Seitenlängen ist und genau den Flächeninhalt $n \text{ cm}^2$ hat. Dabei sollen die Türchenseiten parallel zu den Seiten des Kalenders liegen.

Passt ein solcher Kalender auf ein Rechteck, dessen Seiten beide kürzer als 24 cm sind? Wenn ja, was ist die kleinstmögliche Fläche eines solchen Kalenders?

Hinweis: Die Türchen des Kalenders dürfen auch direkt aneinander oder auch direkt an den Rand des Kalenders stoßen.

A 49.3 Auch der Weihnachtsmann denkt (öko-)logisch! Er will für Peter einen Fußball mit Durchmesser 30 cm und sechs Tennisbälle mit Durchmesser von je 8 cm in einer quaderförmigen Schachtel verpacken. Welches ist die Schachtel mit der kleinsten Oberfläche, für die dies möglich ist?

A 49.4 Denke dir eine natürliche Zahl n , wie zum Beispiel $n = 12$. Nun mache eine Liste der Teiler von n , in unserem Fall also 1, 2, 3, 4, 6, 12. Anschließend bestimme für jeden dieser Teiler die Anzahl seiner Teiler und schreibe diese Anzahlen in eine zweite Liste.

In unserem Beispiel hat 1 genau einen Teiler, 2 hat zwei Teiler, ebenso 3; 4 hat drei Teiler, 6 hat vier Teiler und 12 hat sechs Teiler. Unsere zweite Liste ist daher 1, 2, 2, 3, 4, 6. Zu guter Letzt addiere die Kuben dieser Zahlen, im Beispiel ergibt das $1^3 + 2^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 6^3 = 324$.

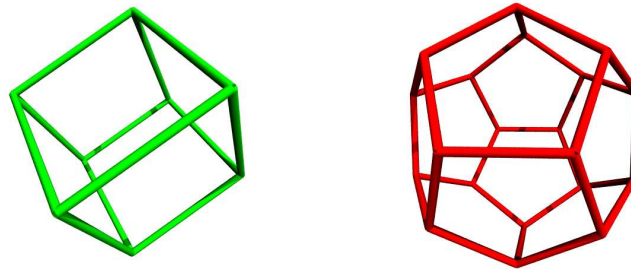
Zeige, dass das Ergebnis stets eine Quadratzahl ist!

Aufgabenblatt 50

A 50.1 Finde alle natürlichen Zahlen mit der Eigenschaft, dass die Differenz von zweitgrößtem und zweitkleinstem positiven Teiler dieser Zahl genau 1001 ist!

A 50.2 Der Lehrer hat den Schülern einer Klasse drei positive Zahlen vorgegeben, und als Hausaufgabe sollen diese sich zwei der Zahlen aussuchen, sie addieren und die Summe schließlich mit der dritten vorgegebenen Zahl multiplizieren. Beim Überprüfen der Hausaufgaben stellt der Lehrer fest, dass einige der Schüler als Ergebnis 50, andere 2000 und wieder andere 2006 erhalten haben, und alle diese Ergebnisse sind richtig. Welche Zahlen hatte der Lehrer vorgegeben?

A 50.3 Der nordamerikanische Würfelkäfer läuft auf seiner Suche nach Beute bekanntlich ständig auf einem Rundweg entlang einiger Kanten des großen grünen Würfelstrauches (siehe Abbildung), wobei der Rundweg keine Kante des Würfels doppelt enthält. Wie viele Kanten enthält ein solcher Weg höchstens?



Der Würfelstrauch und der Dodekaederbusch

Die Dodekaederspinne hat das gleiche Beutesuchverhalten wie der Würfelkäfer, nur lebt sie auf dem feuerroten Dodekaederbusch (siehe Abbildung), der nur in Südasien beheimatet ist. Biologen vermuten, dass sie einen größeren Anteil der Kanten des Busches ablaufen kann, als es dem Würfelkäfer auf seinem Strauch möglich ist. Mathematiker bezweifeln dies. Warum? Wie lang ist ein längster Rundweg auf dem Busch?

Zusatzfrage: Um weiteren Fragen der Biologen zuvorzukommen, beantworte dieselbe Frage für die kürzlich entdeckte Tetraederfliege, den Oktaederwurm und die sehr seltene Ikosaederameise!

A 50.4 Die beiden Cousins Anna und Beate haben sich seit Jahren nicht gesehen und sind zur Geburtstagsfeier ihrer Großtante eingeladen. Dummerweise haben die beiden vor dem Fest keine Gelegenheit, sich wegen eines Geschenks abzusprechen.

Jede von ihnen weiß: Wenn sie ein Geschenk mitbringt, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Tante damit unzufrieden ist (und es infolgedessen am ganzen Abend bleibt), genau 50 Prozent. Sie muss allerdings auch nicht unbedingt ein Geschenk mitbringen; bekommt die Tante aber von beiden nichts, ist sie ebenso unzufrieden. Beide Cousins sind von Beruf Mathematikerinnen und haben einen Spielwürfel zur Hand. Zeige, dass die beiden bei geeigneter Strategie mit einer Wahrscheinlichkeit von $1/3$ ein zufriedenes Geburtstagsfest feiern können!

Teil II

Lösungen

Lösungen zu Aufgabenblatt 26

L 26.1 Die Zahl, deren Dezimaldarstellung aus genau $2n$ Einsen besteht, ist gerade ein Neuntel der Zahl, die aus genauso vielen Neunen besteht. Letztere ist aber gerade die Zahl $10^{2n} - 1$.

Die Zahl, die aus $2n$ Einsen besteht, ist also $\frac{1}{9}(10^{2n} - 1)$.

Genauso sieht man, dass die Zahl, die aus n Zweien besteht, als $\frac{2}{9}(10^n - 1)$ geschrieben werden kann.

Die gesuchte Differenz kann man deswegen folgendermaßen umschreiben:

$$\begin{aligned}\frac{1}{9}(10^{2n} - 1) - \frac{2}{9}(10^n - 1) &= \frac{1}{9}(10^{2n} - 1 - 2 \cdot 10^n + 2) \\ &= \frac{1}{9}(10^{2n} - 2 \cdot 10^n + 1) \\ &= \left(\frac{1}{3}(10^n - 1)\right)^2.\end{aligned}$$

Die Zahl in Klammern ist nun die mit genau n Dreien geschriebene natürliche Zahl. Es gilt also stets:

$$\underbrace{111 \dots 1}_{2n \text{ Einsen}} - \underbrace{222 \dots 2}_{n \text{ Zweien}} = \left(\underbrace{333 \dots 3}_{n \text{ Dreien}}\right)^2.$$

L 26.2

- a) Da alle Eier gleich groß sind und aneinandergereiht sind, bilden die Mittelpunkte der Querschnitte ein regelmäßiges Achteck. Sei M der Mittelpunkt des Osternestes und seien A und B die Mittelpunkte zweier aneinandergrenzender Ostereier (vgl. Skizze). Sei r der Radius eines Eies. Sei P der in der Skizze eingezeichnete Berührungspunkt zweier Kreise und a der Abstand von M zu P . Der Zeichnung kann man die Beziehung $a = r + y$ entnehmen, wobei y die Länge der Seite AN im gleichschenkelig rechtwinkligen Dreieck ABN ist. Es gilt also $y = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{2r}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot r$ und deswegen

$$a = r + y = r + \sqrt{2} \cdot r = (1 + \sqrt{2}) \cdot r.$$

Nun kann man im rechtwinkligen Dreieck AMP den Satz des Pythagoras anwenden und findet:

$$x = \sqrt{a^2 + r^2} = \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2 + 1} \cdot r = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \cdot r.$$

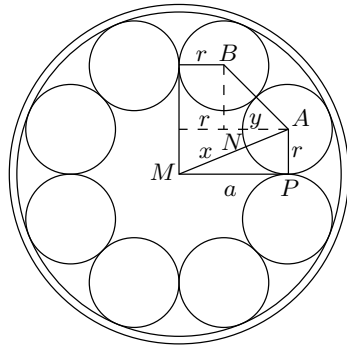


Abbildung 26.1: Skizze 2

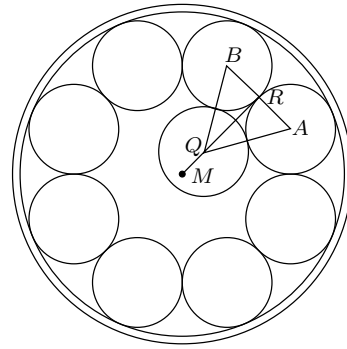


Abbildung 26.2: Skizze 3

Also ist der Durchmesser d des Osternestes:

$$d = 2x + 2r = \left(2\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} + 2 \right) \cdot 2 \text{ cm} \approx 14,45 \text{ cm}.$$

- b) Im Folgenden zeigen wir, dass jedes weitere Ei, das in das Osternest gelegt wird, den Mittelpunkt des Osternestes überdeckt. Dadurch ist gezeigt, dass keine zwei weiteren Eier mehr ins Nest gelegt werden können.

Ein weiteres Ei liegt möglichst weit vom Mittelpunkt des Nestes entfernt, wenn es wie in Skizze 3 platziert ist (das Ei mit Mittelpunkt Q). Das Dreieck ABQ ist nun ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge $2r$. Ist R die Mitte der Strecke AB , so ist QR die Höhe des Dreiecks, und damit gilt:

$$\overline{QR} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2r = \sqrt{3} \cdot r.$$

Nach Teil a) ist $\overline{MA} = x = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \cdot r$ und nach dem Satz des Pythagoras im Dreieck ARM ist:

$$\begin{aligned} \overline{RM}^2 &= \overline{MA}^2 - \overline{RA}^2 \\ &= (4 + 2\sqrt{2}) \cdot r^2 - r^2 \\ &= (3 + 2\sqrt{2}) \cdot r^2. \end{aligned}$$

Und damit:

$$\begin{aligned} \overline{MQ} &= |\overline{RM} - \overline{RQ}| = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} \cdot r - \sqrt{3} \cdot r \\ &= \left(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3} \right) \cdot r. \end{aligned}$$

Der Mittelpunkt M liegt genau dann „im Ei“, wenn $\overline{MQ} < 1 \cdot r$ gilt. Diesen Nachweis bekommt man durch Äquivalenzumformung der Ungleichung:

$$\begin{aligned}\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3} &< 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} &< 1 + \sqrt{3} \quad (\text{Quadrieren}^1) \\ \Leftrightarrow 3 + 2\sqrt{2} &< 1 + 2\sqrt{3} + 3 \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{2} &< 1 + 2\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist offensichtlich erfüllt.

Bemerkung: Traut man dem Taschenrechner eine gewisse Genauigkeit zu (Achtung: Diese Vorgehensweise ist mathematisch nicht ganz korrekt, da Rundungsfehler das Ergebnis verfälschen könnten), so erhalten wir mit seiner Hilfe leicht $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3} \approx 0,68 < 1$.

L 26.3

- a) Hier muss man also die Anzahl der Möglichkeiten zählen, aus den fünf gegebenen Farben drei verschiedene auszuwählen.

Für die erste Farbe hat man fünf Möglichkeiten, für die zweite vier und für die dritte dann noch drei Möglichkeiten. Das sind zusammen $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ Möglichkeiten. Dabei wird aber jede Kombination sechsmal gezählt, nämlich in jeder der sechs möglichen Anordnungen dreier Farben.

Daher gibt es genau 10 Farbkombinationen.

Etwas kürzer kann man auch direkt benutzen, dass die gesuchte Anzahl entsprechend der Definition des Binomialkoeffizienten gerade $\binom{5}{3} = 10$ ist.

- b) (Lösung von Jannis, Klasse 9)

Es gibt zehn mögliche verschiedene Farbenpaare unter den fünf Farben. Auf einem Ei sind stets drei verschiedene Farbenpaare vertreten, auf sieben Eiern insgesamt also 21 Farbenpaare.

Da es aber nur zehn verschiedene gibt, muss nach Schubfachprinzip eines der Paare mindestens dreimal vorkommen. Da jedes Ei mit drei verschiedenen Farben bemalt ist, liegen diese Paare auf drei unterschiedlichen Eiern. Es gibt also drei Eier, die in wenigstens zwei Farben übereinstimmen.

L 26.4 Wir lösen die Aufgabe gleich ganz allgemein, indem wir bestimmen, wie viele Stockwerke (bzw. Stabilitätsgrade von Eiern) man mit einer gegebenen Zahl

¹Im Allgemeinen ist Quadrieren keine Äquivalenzrelation ($(-1)^2 = 1^2$, aber $-1 \neq 1$)! Hier rechnen wir aber nur mit positiven Zahlen.

von Probe-Eiern und einer gegebenen Zahl von Versuchen auseinanderhalten kann. Diese Zahl bezeichnen wir mit $s(v, e)$; dabei steht v für die Anzahl der Versuche, e für die Anzahl der Probe-Eier.

Wenn man nur ein Ei zur Verfügung hat, ist die Antwort einfach, da das Ei ja erst kaputtgehen darf, wenn man schon weiß, dass es beim Fall aus dem direkt darunterliegenden Stockwerk nicht kaputtgeht. Also muss man beim ersten Stockwerk anfangen; wenn es heil bleibt, versucht man es mit den zweiten Stockwerk usw. Damit kommt man mit v Versuchen bis zum v -ten Stockwerk, es gilt also

$$s(v, 1) = v.$$

Ebenso gilt offensichtlich

$$s(1, e) = 1.$$

Hat man mehr als ein Ei und mehr als einen Versuch, startet man in einem (noch zu bestimmenden) Stockwerk n . Bleibt das Ei heil, weiß man, dass es auch bei Würfeln von den darunterliegenden Stockwerken heil bleibt. Man muss demnach nur noch oberhalb des n -ten Stockwerkes suchen. Dafür hat man nach wie vor e Eier und einen Versuch weniger zur Verfügung.

Geht das Ei kaputt, muss man in den Stockwerken unter dem n -ten suchen und hat dafür sowohl ein Ei als auch einen Versuch weniger. Es ist also für $e, v > 1$:

$$s(v, e) = 1 + s(v - 1, e) + s(v - 1, e - 1).$$

Mit dieser Rekursionsformel kann man schnell eine Tabelle mit der maximalen Stockwerksanzahl anfertigen. Hier sind die ersten zehn Zeilen und Spalten:

Versuche	Eier									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	3	6	7	7	7	7	7	7	7	7
4	4	10	14	15	15	15	15	15	15	15
5	5	15	25	30	31	31	31	31	31	31
6	6	21	41	56	62	63	63	63	63	63
7	7	28	63	98	119	126	127	127	127	127
8	8	36	92	162	218	246	254	255	255	255
9	9	45	129	255	381	465	501	510	511	511
10	10	55	175	385	637	847	967	1012	1022	1023

Daraus ergibt sich, dass man für 20 Stockwerke und zwei Eier maximal sechs Versuche benötigt. Hat man drei Eier, braucht man nur höchstens fünf Versuche.

Mit ein wenig Überlegung kann man der Tabelle auch entnehmen, wie man im konkreten Fall vorgehen muss, um die Belastbarkeit zu ermitteln. In unserem Fall muss der erste Versuch im 5. oder 6. Stockwerk erfolgen, denn es muss ein Stockwerk im Intervall $[20 - s(5, 2), s(5, 1) + 1]$ sein, damit man mit den restlichen Versuchen noch in jedem Fall auskommt.

Zum Beispiel kann man nach folgendem Schema vorgehen, links für zwei, rechts für drei Eier. (Zu deuten ist das Schema so: bleibt das Ei heil, muss man beim folgenden Versuch in das nächsthöher gelegene Stockwerk der folgenden Spalte gehen, ansonsten – sofern man noch nicht die Lösung hat – zum nächstniedriger gelegenen. [Diese Darstellung ist der Lösung von Helmut entlehnt.]):

Mit 2 Eiern:							Mit 3 Eiern:					
Stock- werk	Versuch						Stock- werk	Versuch				
	1.	2.	3.	4.	5.	6.		1.	2.	3.	4.	5.
20						X	20				X	
19					X		19			X		
18				X			18		X			
17						X	17					X
16					X		16				X	
15			X				15					X
14						X	14			X		
13					X		13					X
12				X			12				X	
11		X					11	X				
10						X	10					X
9					X		9				X	
8				X			8					X
7			X				7			X		
6	X						6					X
5						X	5				X	
4					X		4		X			
3				X			3					X
2			X				2				X	
1		X					1			X		

Dass oberhalb der Diagonale in der Tabelle der Werte $s(v, e)$ Zweierpotenzen weniger eins stehen, ist übrigens kein Zufall: Wenn man mehr Eier als Versuche hat, ist man nicht mehr durch die Nebenbedingung des möglichen Verlusts von Eiern beeinflusst. Dann kann man die Suche so gestalten, dass man immer v -mal probieren muss, bis man zu einem Ergebnis kommt. Den 2^v möglichen Ausgängen dieser Versuche entsprechen die 2^v möglichen Ergebnisse „Ei hält keinen Sturz aus“, „Ei hält Sturz bis genau zum 1. Stockwerk aus“ usw. bis „Ei hält Sturz bis (mindestens) zum $(2^v - 1)$ -ten Stockwerk aus“.

Man kann sogar eine geschlossene Formel für die Einträge in der Tabelle angeben, ohne dass wir sie hier beweisen wollen. Sie lautet:

$$s(v, e) = \left(\sum_{i=0}^e \binom{v}{i} \right) - 1.$$

(Auch hieran sieht man wieder, dass $s(v, e) = 2^v - 1$ für $e \geq v$ ist, da dies aus einer bekannten Beziehung für die Binomialkoeffizienten folgt.)

Lösungen zu Aufgabenblatt 27

L 27.1 Die Ungleichungskette $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ lässt sich in die beiden Ungleichungen $x - 1 < \lfloor x \rfloor \Leftrightarrow x < \lfloor x \rfloor + 1$ und $\lfloor x \rfloor \leq x$ zerlegen, die man äquivalent zu der Kette $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ zusammensetzen kann.

Ersetzt man zunächst den Gaußklammernausdruck durch eine ganze Zahl n , wird es vielleicht klarer: Eine ganze Zahl n ist genau dann die Gaußklammer $\lfloor z \rfloor$ einer reellen Zahl z , wenn gilt: $z - 1 < n \leq z$ bzw. äquivalent $n \leq z < n + 1$.

Hier ist $\lfloor z \rfloor = 2003$ vorgegeben (mit $z = \frac{\lfloor 2003x \rfloor}{2003}$); also gelten folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} & \left\lfloor \frac{\lfloor 2003x \rfloor}{2003} \right\rfloor = 2003 \\ \Leftrightarrow & \quad 2003 \leq \frac{\lfloor 2003x \rfloor}{2003} < 2004 \\ \Leftrightarrow & \quad 2003 \cdot 2003 \leq \lfloor 2003x \rfloor < 2003 \cdot 2004 \\ \Leftrightarrow & \quad 2003 \cdot 2003 \leq 2003x < 2003 \cdot 2004 \\ \Leftrightarrow & \quad 2003 \leq x < 2004. \end{aligned}$$

Die Gleichung ist also genau für die reellen Zahlen x mit $2003 \leq x < 2004$ erfüllt.

L 27.2 Wir benötigen folgende Aussage:

Gegeben sei ein Dreieck mit den Seitenlängen $a \leq b \leq c$. Dann ist das Dreieck genau dann spitzwinklig, wenn $a^2 + b^2 > c^2$ ist.

Diese Aussage kann man sich relativ leicht herleiten. Zunächst eine Herleitung „zu Fuß“: Wenn man zwei Seitenlängen a und b gegeben hat, kann man die Seiten natürlich im rechten Winkel zusammenlegen und mit einer Seite der Länge c mit $c^2 = a^2 + b^2$ zu einem rechtwinkligen Dreieck ergänzen. Ein kleinerer Winkel erfordert eine kürzere dritte Seite, ein größerer entsprechend eine längere. Mit $a^2 + b^2 > c^2$ ist also zumindest derjenige Winkel spitz, der der Seite c gegenüberliegt. Die Ungleichungen $a^2 + c^2 > b^2$ und $b^2 + c^2 > a^2$ gelten aber ohnehin wegen der Voraussetzung $a \leq b \leq c$, womit die beiden anderen Winkel in jedem Fall spitz sind.

Kürzer ist die Herleitung, wenn man z. B. den Kosinussatz heranzieht; dieser besagt ja, dass gilt: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$; dabei ist γ der Winkel, der der Seite c gegenüberliegt. Und der Kosinus ist genau dann größer als null, wenn $\gamma < 90^\circ$ gilt.

Nun sei angenommen, es gäbe fünf Stäbe mit den Längen $a \leq b \leq c \leq d \leq e$, von denen man keine drei zu einem spitzwinkligen Dreieck zusammenlegen kann. Dann gelten die Ungleichungen

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &\leq c^2, \\ b^2 + c^2 &\leq d^2 \quad \text{und} \\ c^2 + d^2 &\leq e^2. \end{aligned}$$

Zusammengenommen ergibt sich die Ungleichungskette

$$a^2 + b^2 \leq c^2 \leq d^2 - b^2 \leq e^2 - c^2 - b^2 \leq e^2 - 2ab,$$

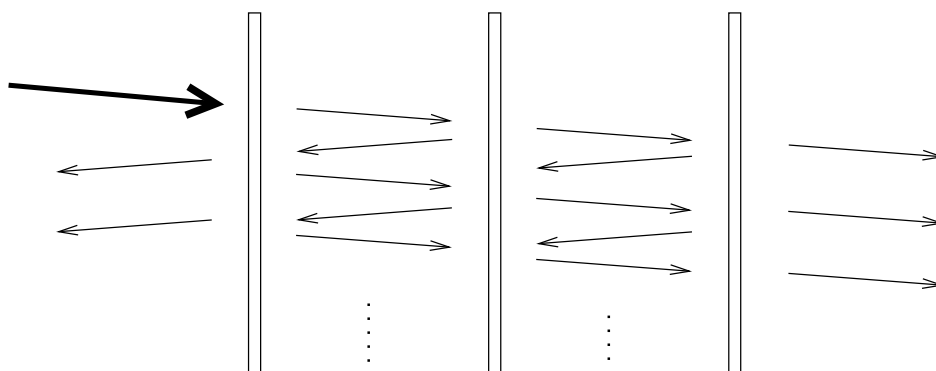
da ja außerdem $a \leq b \leq c$ gelten sollte.

Daraus folgt aber insbesondere

$$(a + b)^2 \leq e^2,$$

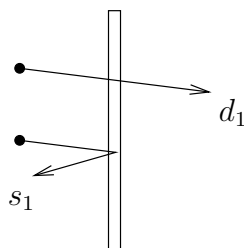
und dies steht im Widerspruch dazu, dass man aus den Stäben mit den Längen a , b und e ein Dreieck legen können soll, denn dies geht nur, wenn $a + b > e$ ist.

L 27.3 Der Weg der Lichtstrahlen durch ein Fenster von Glasoflex:

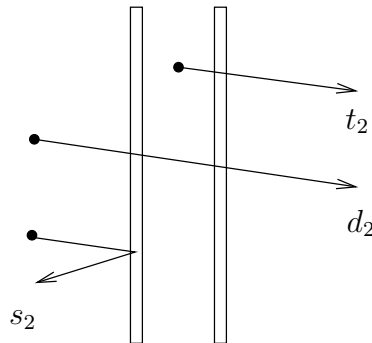


Lösungsvariante A:

In dieser Lösung betrachten wir zuerst, wie viel Licht durch eine oder zwei Scheiben hindurchgeht und wie viel Licht an zwei Scheiben insgesamt gespiegelt wird. Diese Daten nutzen wir anschließend, um auszurechnen, wie viel Licht durch drei Scheiben hindurchfällt.



Die Angaben für eine Scheibe entnehmen wir der Aufgabenstellung. Durch eine Scheibe geht $d_1 = 0,7$ (=70%) des einfallenden Lichtes (statt mit Prozent rechnen wir mit Dezimalzahlen von 0 bis 1), und $s_1 = 0,2$ wird gespiegelt. (Dass der Rest absorbiert wird, wird hier nicht weiter benötigt.)



Sei t_2 der Anteil an dem vor der zweiten Scheibe ankommenden Licht, der insgesamt durch diese Scheibe geht (unter Berücksichtigung, dass davor eine erste Scheibe steht). Dann gilt

$$t_2 = 0,7 + 0,2 \cdot 0,2 \cdot t_2,$$

denn der 0,7-fache Teil geht sofort durch die zweite Scheibe hindurch und zusätzlich wird der 0,2-fache Teil an der zweiten Scheibe gespiegelt, davon wird der 0,2-fache Teil an der (Rückseite der) ersten Scheibe gespiegelt, und für das nun an die Scheibe ankommende Licht ist genau t_2 der Faktor, der beschreibt, welcher Anteil hiervon durch die Scheibe fällt (direkt und nach weiteren Spiegelvorgängen). Also gilt

$$t_2 = \frac{0,7}{1 - (0,2)^2} = \frac{70}{96}.$$

Da vor der zweiten Scheibe bereits die erste Scheibe nur 70 % des Lichtes durchlässt, gilt für den Faktor d_2 , der beschreibt, wie viel Licht durch zwei Scheiben insgesamt hindurchkommt:

$$d_2 = 0,7 \cdot t_2 = \frac{7^2}{96} = \frac{49}{96}.$$

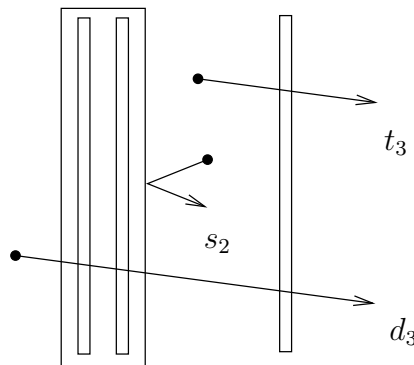
Außerdem brauchen wir für später noch den Anteil s_2 an Licht, der insgesamt von zwei Scheiben gespiegelt wird. Dieser berechnet sich als

$$s_2 = 0,2 + 0,7 \cdot 0,2 \cdot t_2,$$

denn der 0,2-fache Teil des ankommenden Lichtes wird sofort an der ersten Scheibe gespiegelt. Zusätzlich fällt der 0,7-fache Teil durch die erste Scheibe hindurch, davon wird der 0,2-fache Teil an der zweiten Scheibe gespiegelt und von diesem (von innen) vor der ersten Scheibe eintreffenden Licht kommt genau der t_2 -fache Teil – denn wir betrachten die Situation einfach spiegelbildlich – wieder durch die erste Scheibe. Also gilt

$$s_2 = 0,2 + 0,7 \cdot 0,2 \cdot \frac{70}{96} = \frac{29}{96}.$$

Drei Scheiben:



Sei t_3 der Anteil an dem vor der dritten Scheibe ankommenden Licht, der insgesamt durch diese dritte Scheibe geht (unter Berücksichtigung, dass davor noch zwei Scheiben stehen). Dann gilt

$$t_3 = 0,7 + 0,2 \cdot s_2 \cdot t_3,$$

denn der 0,7-fache Teil geht sofort durch die dritte Scheibe hindurch; zusätzlich wird der 0,2-fache Teil an der dritten Scheibe gespiegelt, davon wird der s_2 -fache Teil von den ersten beiden Scheiben zusammen zurückgespiegelt, und dann beschreibt wieder genau der Faktor t_3 , wie viel Licht hiervon insgesamt noch durch die dritte Scheibe hindurchgelassen wird.

Also gilt

$$t_3 = 0,7 \cdot \left(1 - 0,2 \cdot \frac{29}{96}\right)^{-1} = \frac{7}{10} \cdot \frac{960}{902}.$$

Da vor der dritten Scheibe die ersten beiden Scheiben nur den d_2 -fachen Anteil des Lichtes durchfallen lassen, gilt für den Faktor d_3 , der beschreibt, wie viel Licht durch drei Scheiben insgesamt hindurchkommt:

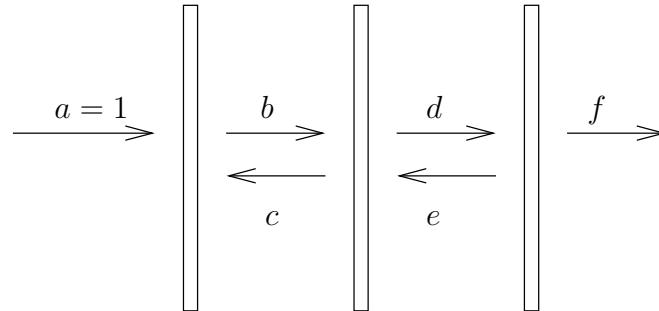
$$d_3 = d_2 \cdot t_3 = \frac{7^2}{96} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{960}{902} = \frac{7^3}{902} = \frac{343}{902}.$$

Also fallen insgesamt $\frac{34300}{902} \% \approx 38 \%$ des einfallenden Lichtes durch ein aus drei Scheiben bestehendes Fenster der Firma Glasoflex.

Lösungsvariante B:

Im folgenden Abschnitt verfolgen wir einen anderen Lösungsweg und betrachten zusammenfassend, wie viel Licht in welchem Abschnitt in welcher Richtung strahlt – vgl. Abbildung: Die den Pfeilen zugeordneten Variablen stehen jeweils für den Anteil am eingestrahltten Licht. Das Licht kommt von der linken Seite auf das Fenster (voller Anteil, daher $a = 1$). (Der Teil des Lichtes, der nach links wieder wegstrahlt,

ist hier nicht von Interesse und wird daher nicht betrachtet.) Zwischen der ersten und der zweiten Scheibe gehen Lichtstrahlen in beide Richtungen, genauso zwischen der zweiten und der dritten. Auf der anderen Seite strahlt nur Licht heraus.



Nun betrachten wir, woher das jeweilige Licht kommt, und erhalten ein lineares Gleichungssystem in den Variablen b , c , d , e und f . Die Lösung der Aufgabe ist der Wert von f .

Licht zum Pfeil b kommt entweder direkt von draußen durch die erste Scheibe hindurch – also 70 % davon bzw. 0,7 (wir rechnen wieder mit Dezimalzahlen statt mit Prozent) – oder es ist aus Richtung c an der ersten Scheibe gespiegelt. Das ergibt:

$$b = 0,7 \cdot 1 + 0,2 \cdot c. \quad (27.1)$$

Und entsprechend ergeben sich die Gleichungen für die anderen Variablen:

$$c = 0,2 \cdot b + 0,7 \cdot e \quad (27.2)$$

$$d = 0,7 \cdot b + 0,2 \cdot e \quad (27.3)$$

$$e = 0,2 \cdot d \quad (27.4)$$

$$f = 0,7 \cdot d. \quad (27.5)$$

Einsetzen von (27.4) in (27.3) ergibt

$$\begin{aligned} d &= 0,7 \cdot b + 0,04 \cdot d \\ \Leftrightarrow 0,96 \cdot d &= 0,7 \cdot b \\ \Leftrightarrow b &= \frac{96}{70} d, \end{aligned} \quad (27.6)$$

Einsetzen von (27.4) und (27.2) in (27.1) liefert

$$\begin{aligned} b &= 0,7 + 0,2 \cdot c = 0,7 + 0,04 \cdot b + 0,028 \cdot d \\ \Leftrightarrow 0,96 \cdot b &= 0,7 + 0,028 \cdot d. \end{aligned} \quad (27.7)$$

Schließlich erhält man aus dem Einsetzen von (27.6) in (27.7):

$$\begin{aligned} \frac{96^2}{7000}d &= 0,7 + 0,028 \cdot d = 0,7 + \frac{196}{7000}d \\ \Leftrightarrow \frac{9020}{7000}d &= 0,7 \\ \Leftrightarrow d &= \frac{490}{902}, \end{aligned}$$

woraus nach (27.5) wie beim ersten Lösungsweg

$$f = 0,7 \cdot d = \frac{343}{902} \approx 38 \%$$

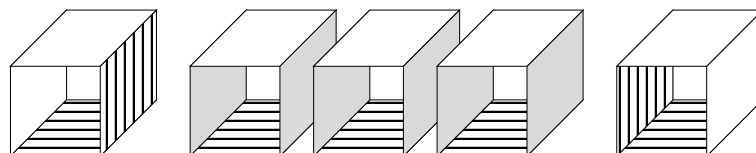
folgt.

(Eine kleine Testrechnung kann übrigens zeigen, dass zumindest die Tendenz der Lösung richtig ist: Würde kein Licht reflektiert, aber nach wie vor nur 70 % durch eine Scheibe durchgelassen, würden $0,7^3 = \frac{343}{1000}$ des Lichtes durchkommen. Mit Reflexion muss es mehr sein, was die Rechnung bestätigt.)

L 27.4 Bei nur einem Würfel ist nur die Zahl auf der Tischseite verdeckt. Wir erhalten die maximale Summe an Augenzahlen aller sichtbaren Würfelzahlen, wenn die kleinste Zahl des Würfels – die Eins – verdeckt ist, und entsprechend die minimale Summe, wenn die Sechs verdeckt ist:

$$A(1) = 21 - 1 \quad \text{und} \quad a(1) = 21 - 6.$$

Folglich gilt für die Differenz $d(1) = 5$.



Bei zwei oder mehr Würfeln haben wir zwei äußere Würfel, bei denen jeweils die Unterseite und die Seite, die an den Nachbarwürfel grenzt, verdeckt sind, und $n - 2$ (bei $n = 2$ Würfeln gibt es davon $n - 2 = 0$, also keine) innere Würfel. Bei jedem der beiden äußeren Würfel sind mindestens eine Eins und eine Zwei und höchstens eine Sechs und eine Fünf nicht zu sehen. Bei den inneren Würfeln sind die Unterseite (wieder mindestens eine Eins und höchstens eine Sechs) und außerdem noch die zwei Seiten, die jeweils an den Nachbarwürfel grenzen, verdeckt. Da diese beiden Seiten auf dem Würfel einander gegenüberliegen, ist ihre Summe in jedem Fall 7. Somit erhalten wir

$$A(n) = n \cdot 21 - [2 \cdot (1 + 2) + (n - 2) \cdot 1 + (n - 2) \cdot 7],$$

$$a(n) = n \cdot 21 - [2 \cdot (6 + 5) + (n - 2) \cdot 6 + (n - 2) \cdot 7],$$

und folglich ist

$$d(n) = 2 \cdot (11 - 3) + (n - 2)(6 - 1) = 5(n - 2) + 16 = 5n + 6.$$

Anzahl an Würfeln n	1	2	3	4	5	6	7	...	14	15	16	...
Differenz $d(n)$	5	16	21	26	31	36	41	...	76	81	86	...
Quadratzahl ?		ja				ja				ja		

Als Differenzen $d(n)$ erhalten wir die 5 und alle Zahlen, die auf 1 oder 6 enden und größer 15 sind.

Um herauszufinden, welche davon nun Quadratzahlen sind, betrachten wir die Endziffer einer Quadratzahl. Diese hängt nur von der Endziffer der Zahl, die wir quadriert haben, ab:

Endziffer		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Endziffer des Quadrates		0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Die Quadratzahlen, die unter den Differenzen $d(n)$ auftauchen, sind also

$$\begin{array}{cccc} & 4^2, & 6^2, & 9^2, \\ (10+1)^2, & (10+4)^2, & (10+6)^2, & (10+9)^2, \\ (20+1)^2, & (20+4)^2, & (20+6)^2, & (20+9)^2, \\ (30+1)^2, & (30+4)^2, & (30+6)^2, & (30+9)^2, \\ (40+1)^2, & (40+4)^2, & (40+6)^2, & (40+9)^2, \\ (50+1)^2, & (50+4)^2, & (50+6)^2, & (50+9)^2, \\ \dots & & & \end{array}$$

Die k -te Quadratzahl ist das Quadrat von

$$10 \cdot \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor + \begin{cases} 1, & \text{wenn } k \equiv 0 \pmod{4} \\ 4, & \text{wenn } k \equiv 1 \pmod{4} \\ 6, & \text{wenn } k \equiv 2 \pmod{4} \\ 9, & \text{wenn } k \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Für $k = 1000$ ist dies $(10 \cdot 250 + 1)^2 = 6\,255\,001$, als Differenz $d(n)$ ergibt sich diese Zahl nach der Formel $6\,255\,001 = 5n + 6$, also für $n = 1\,250\,999$.

Somit erhalten wir die 1000. Quadratzahl für $n = 1\,250\,999$ Würfel.

Lösungen zu Aufgabenblatt 28

L 28.1 Rechnerische Lösung:

Da die x -Koordinate der Punkte in beiden Gleichungen nur zum Quadrat vorkommt, gilt für jeden Punkt (x, y) , der im Schnitt der beiden Mengen liegt, dass auch der Punkt $(-x, y)$ im Schnitt liegt. Sollen also beide Mengen genau einen Punkt gemeinsam haben, so muss für diesen Punkt $x = 0$ gelten. Damit gilt für die y -Koordinate: $y^2 = 1$ und $y = t$.

Somit gilt: $t^2 = 1$, d. h. $t = 1$ oder $t = -1$.

Die einzigen möglichen Werte von t sind also 1 und -1 .

Berechnen wir für diese beiden Werte alle Punkte, die die zwei Mengen gemeinsam haben.

Fall $t = 1$: Aus $x^2 + y^2 = 1$ und $y = x^2 + 1$ folgt $y - 1 + y^2 = 1$.

$$\Rightarrow y^2 + y - 2 = 0$$

$$\Rightarrow y_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}$$

$$\Rightarrow y_1 = 1 \quad \text{und} \quad y_2 = -2.$$

Für $y_1 = 1$ erhält man durch Einsetzen in die erste Gleichung wie gewünscht $x = 0$ und eine Probe zeigt, dass der Punkt $(0, 1)$ wirklich beide Gleichungen erfüllt. Für $y_2 = -2$ erhält man $x^2 = -3$, d. h. keine Lösung.

Somit ist $t = 1$ ein gesuchter Wert.

Fall $t = -1$: Aus $x^2 + y^2 = 1$ und $y = x^2 - 1$ folgt $y + 1 + y^2 = 1$.

$$\Rightarrow y^2 + y = 0$$

$$\Rightarrow y(y + 1) = 0$$

$$\Rightarrow y_1 = 0 \quad \text{und} \quad y_2 = -1.$$

Für $y_1 = 0$ erhält man nun $x^2 = 1$, d. h. $x = 1$ oder $x = -1$. Eine Probe zeigt, dass die beiden Punkte $(-1, 0)$ und $(1, 0)$ tatsächlich beide Bedingungen erfüllen. Somit liegen schon zwei Punkte im Schnitt der beiden Mengen, und $t = -1$ ist deswegen keiner der gesuchten Werte.

Also ist $t = 1$ der einzige Wert, bei dem die beiden Mengen genau einen Punkt gemeinsam haben.

Geometrische Lösung:

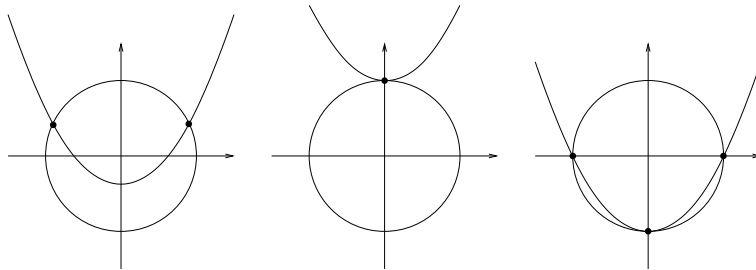
Die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ beschreibt einen Kreis mit Radius 1 um den Ursprung $(0, 0)$ der Ebene; $y = x^2 + t$ ist eine um t auf der y -Achse verschobene (nach oben geöffnete) Normalparabel. Auch hier sieht man sofort, dass beide Figuren symmetrisch zur y -Achse sind (d. h. im Vergleich zu ersten Lösung: mit (x, y) ist auch

$(-x, y)$ Schnittpunkt). Ein einfacher Schnittpunkt kann also nur auf der y -Achse (vgl. oben $x = 0$) liegen und muss somit der Scheitelpunkt $(0, t)$ der Parabel sein. Auch hier bleiben nur die beiden Schnittpunkte des Kreises mit der y -Achse, nämlich $(0, 1)$ und $(0, -1)$, zu betrachten.

Für $t = 1$ ist sofort ersichtlich, dass es keinen weiteren Schnittpunkt geben kann, denn die anderen Punkte der Parabel liegen alle oberhalb dieses Schnittpunktes, die des Kreises unterhalb.

Für $t = -1$ müssen wir ein wenig mehr überlegen. Anschaulich sieht man, dass der Kreis in seinem „Südpol“ flacher als die Parabel ist, so dass die Parabel sich zunächst im Inneren des Kreises bewegt und es noch einen weiteren Schnittpunkt geben muss.

Mathematisch korrekter ist aber sicherlich, weitere Schnittpunkte (die sich von einer Zeichnung gut erraten lassen), nämlich $(-1, 0)$ und $(1, 0)$, anzugeben.



Also ist $t = 1$ der einzige Wert, bei dem die beiden Mengen genau einen Punkt gemeinsam haben.

L 28.2 Siegfried wird die Prinzessin nicht bekommen, denn er kann nur den zweiten Drachen töten. Beim ersten müht er sich vergeblich.

Um dies einzusehen, überlegt man sich zunächst, wie sich die Anzahl der Köpfe nach einem Schlag und dem anschließenden Nachwachsen ändert. Da bei 13 abgeschlagenen Köpfen 22 nachwachsen, ändert sich die Kopfzahl hierbei insgesamt um +9, genauso sieht man, dass ein Abschlagen von 17, 20 bzw. 5 Köpfen zu einer Nettoänderung¹ der Kopfzahl von -15, -6 und +12 führt.

Die wichtige Beobachtung ist nun, dass all diese Nettoänderungen durch 3 teilbar sind. Die Gesamtzahl der Köpfe ändert sich also stets um Vielfache von 3 und daher bleibt der Rest, den die Kopfzahl bei Division durch 3 lässt, unverändert. Zu Beginn hat der Drache 1000 Köpfe, was bei Division durch 3 den Rest 1 lässt. Also können nie 333 Köpfe erreicht werden, weil 333 durch 3 teilbar ist, also den Rest 0 lässt.

Der zweite Drache hat nicht soviel Glück. Ihm kann Siegfried zunächst 47-mal 20 Köpfe abschlagen, worauf jeweils wieder 14 nachwachsen. Die Gesamtzahl an Köpfen beträgt danach $1000 - 47 \cdot 20 + 47 \cdot 14 = 718$. Danach kann er ihm wieder 47-mal 17 Köpfe abschlagen, jedesmal wachsen dem Drachen dann sofort 2 Köpfe nach und

¹„Netto“ heißt dabei: Unter Berücksichtigung aller sich direkt ergebenden Konsequenzen.

es verbleiben ihm $718 - 47 \cdot 17 + 47 \cdot 2 = 13$ Köpfe. Die letzten 13 Köpfe entfernt Siegfried dann mit einem Hieb.

Zur vollständigen Lösung muss noch geprüft werden, ob Siegfried jeden Hieb auch ausführen kann (bei einer rechnerischen Lösung, die nur mit den Nettoänderungen arbeitet, kann es passieren, dass Siegfried z. B. 20 Köpfe abschlagen soll, obwohl nur noch 19 vorhanden sind). Dies macht hier jedoch keine Probleme: Im ersten Durchgang werden $47 \cdot 20 = 940$, also insgesamt weniger als 1000 Köpfe abgeschlagen. Vor dem vorletzten Hieb muss der Drache noch $13 + (17 - 2) = 28$ Köpfe haben. Somit hat Siegfried noch reichliche Auswahlmöglichkeiten, 17 Köpfe zu entfernen, erst recht bei den anderen 17er-Hieben zuvor.

L 28.3

Der einfachste Ansatz wäre sicherlich, die Möglichkeiten zu zählen, die zum Gewinn von Zacharias führen, und durch die Anzahl aller Wurfmöglichkeiten zu teilen. Je nach Methode kann dies aber schnell unübersichtlich werden. Eleganter finden wir die folgende Argumentation:

Um die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu berechnen, betrachten wir zusätzlich auch den Fall, dass Zacharias öfter als Yvonne „Adler“ wirft.

Da Zahl und Adler gleich häufig sind, ist die Wahrscheinlichkeit, dass Zacharias öfter als Yvonne Zahl wirft, genauso groß wie die Wahrscheinlichkeit, dass er öfter als Yvonne Adler wirft.

Wie wir gleich zeigen werden, sind diese beiden Ereignisse komplementär zueinander (d. h. der eine Fall tritt genau dann ein, wenn es der andere nicht tut). Damit ist die Wahrscheinlichkeit jeweils $\frac{1}{2}$.

Da Zacharias öfter als Yvonne die Münze wirft, muss er eine der beiden Münzseiten (Zahl oder Adler) auch öfter erhalten. Da er aber nur einmal mehr wirft, kann nur eine der beiden Seiten bei ihm öfter als bei Yvonne vorkommen. Es tritt also tatsächlich genau einer der beiden Fälle (**entweder** Zahl **oder** Adler öfter) ein.

L 28.4

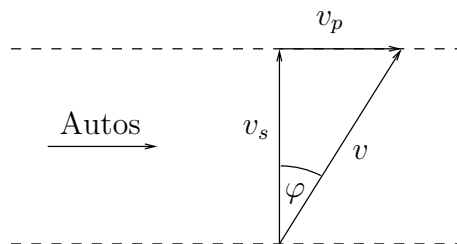
- a) Peter braucht genau eine Sekunde, um den 2 m breiten Gefahrenbereich mit seiner Geschwindigkeit von 2 m/s zu durchqueren. Die effektive Breite der Lücke zwischen den Autos, d. h. die Breite des Bereiches, in dem er bei Eintritt in den Fahrbahnbereich die Straße heil überquert, berechnet sich aus der tatsächlichen Breite (10 m bzw. 5 m) minus der Strecke, die die Autos in einer Sekunde zurücklegen. Denn Peter muss zum einen natürlich die Straße betreten, wenn gerade kein Auto vor seiner Nase ist, und er muss nach links noch so viel Platz haben, wie ein Auto in der Zeit zurücklegt, die er zum Überqueren braucht, sonst wird ihn das nächste Auto erfassen.

Die Wahrscheinlichkeit ergibt sich dann aus dem Quotienten der effektiven Breite, sofern diese größer gleich null ist, und der Länge eines „repräsentativen

Bereichs“, d. h. der Länge von einem Auto plus einer Lücke. Ist die effektive Breite kleiner als null, ist die Wahrscheinlichkeit offensichtlich null.

Das ergibt für den Normalverkehr eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{10-10 \cdot 1}{10+5} = 0$ und für den Berufsverkehr von $\frac{5-1,5 \cdot 1}{5+5} = 0,35$.

- b) Wir können den Fall ignorieren, dass Peter den Autos entgegenläuft – seine Chancen würden nur schlechter werden. Wir betrachten seine Geschwindigkeit in die beiden Komponenten v_s senkrecht zur und v_p parallel zur Fahrtrichtung aufgeteilt.



Es gilt $v_s^2 + v_p^2 = v^2 = 4$. Peter braucht jetzt $t = \frac{2}{v_s}$ Sekunden, um die Straße zu überqueren. Da er aber ein wenig nach rechts geht, hat die effektive Breite der Lücke den Wert

$$l_{\text{Lücke}} - t \cdot v_{\text{Auto}} + t \cdot v_p \\ = l_{\text{Lücke}} - \frac{2}{\sqrt{4 - v_p^2}} \cdot v_{\text{Auto}} + \frac{2}{\sqrt{4 - v_p^2}} \cdot v_p ,$$

sofern dies nicht größer als die Breite der Lücke $l_{\text{Lücke}}$ wird – das hieße nämlich, dass Peter dann von hinten in ein Auto hineinrennt.

Für den Normalverkehr ergibt sich als optimaler Wert (aus der Bestimmung der Nullstelle der Ableitung) $v_p = 0,4$ (mit $\varphi \approx 11,5^\circ$) und damit eine Wahrscheinlichkeit von

$$\frac{10 - \frac{2}{\sqrt{3,84}} \cdot 10 + \frac{2}{\sqrt{3,84}} \cdot 0,4}{15} \approx 0,0135 .$$

Im Berufsverkehr geht Peter sogar schneller als die Autos. Damit kann er $v_p = v_{\text{Auto}}$ erreichen (mit $\varphi \approx 48,6^\circ$), so dass er die volle Lücke zwischen den Autos ausnutzen kann. Hier ist die Wahrscheinlichkeit also $\frac{5}{5+5} = \frac{1}{2}$.

Lösungen zu Aufgabenblatt 29

L 29.1 a) Hier sind beide Zahlen gleich groß. Dies kann man folgendermaßen einsehen:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{32} + \sqrt{98} &= \sqrt{16 \cdot 2} + \sqrt{49 \cdot 2} \\
 &= 4 \cdot \sqrt{2} + 7 \cdot \sqrt{2} \\
 &= 11 \cdot \sqrt{2} \\
 &= 5 \cdot \sqrt{2} + 6 \cdot \sqrt{2} \\
 &= \sqrt{25 \cdot 2} + \sqrt{36 \cdot 2} \\
 &= \sqrt{50} + \sqrt{72}.
 \end{aligned}$$

b) Gibt man beide Terme in einen gewöhnlichen Taschenrechner mit 8-stelliger Anzeige ein, so ergeben beide Terme den Wert 14,346888. Man könnte also, wie im ersten Teil der Aufgabe, wieder vermuten, dass beide Zahlen gleich sind.

Dies ist jedoch falsch und zeigt einmal mehr, wie die beschränkte Rechengenauigkeit eines Taschenrechners zu falschen Vermutungen führen kann.

Hier nun also die exakte (zugegebenermaßen etwas längliche) Rechnung, die gleich in der logisch richtigen Reihenfolge aufgeschrieben ist (die Lösungsfindung erfolgte „natürlich“ in der umgekehrten Reihenfolge):

$$\begin{aligned}
 &144 \cdot 28 \cdot 82 = 330624 < 330625 = 575^2 \\
 \Rightarrow &12 \cdot \sqrt{28 \cdot 82} < 575 \\
 \Rightarrow &9 + 12 \cdot \sqrt{28 \cdot 82} + 4 \cdot 28 \cdot 82 < 575 + 9 + 4 \cdot 28 \cdot 82 = 4 \cdot 33 \cdot 74 \\
 \Rightarrow &(3 + 2 \cdot \sqrt{28 \cdot 82})^2 < (2 \cdot \sqrt{33 \cdot 74})^2 \\
 \Rightarrow &3 + 2 \cdot \sqrt{28 \cdot 82} < 2 \cdot \sqrt{33 \cdot 74} \\
 \Rightarrow &28 + 2 \cdot \sqrt{28 \cdot 82} + 82 < 33 + 2 \cdot \sqrt{33 \cdot 74} + 74 \\
 \Rightarrow &(\sqrt{28} + \sqrt{82})^2 < (\sqrt{33} + \sqrt{74})^2 \\
 \Rightarrow &\sqrt{28} + \sqrt{82} < \sqrt{33} + \sqrt{74}.
 \end{aligned}$$

L 29.2 Wir betrachten zunächst – soweit möglich – die optimalen Strategien der einzelnen Spieler. Dabei muss man in der Argumentation ein wenig aufpassen, denn die Strategien hängen unter Umständen voneinander ab.

Sobald einer der Kontrahenten getroffen wurde, ist die Situation jeweils klar: die beiden anderen werden aufeinander zielen. Vorher aber ist etwas Überlegen vonnöten. Falls Smith, der beste Schütze, noch die Auswahl aus beiden anderen hat, wird er nicht auf den schlechtesten Schützen, Jones, zielen, denn dann wird als Nächstes

der bessere der beiden anderen Schützen, Miller, auf ihn schießen, und das heißt, dass er eine schlechtere Überlebenschance (20 %) hätte, als wenn er (Smith) Miller erschießt und dann Jones auf ihn zielt (50 %). Es bliebe noch die Überlegung, ob es sich für Smith lohnen kann, in die Luft zu schießen.

Wenn Miller noch die Auswahl hat, macht es für ihn keinen Sinn, auf Jones zu schießen, denn wenn Jones tot ist, wird als nächstes Smith auf ihn schießen und natürlich auch treffen. Daher wird Miller entweder auf Smith zielen oder in die Luft schießen.

Sofern Jones noch eine Auswahl hat, wird er nicht auf Miller schießen, denn wenn er trifft, wird er selbst sofort darauf von Smith erschossen. Sollte er auf Smith zielen und ihn treffen, gibt es das Duell Miller – Jones, und Miller ist an der Reihe. Die Überlebenschance für Jones ist dann $1/9$ (Rechnung siehe unten). Wenn er dagegen in die Luft schießt (oder auch nicht trifft), gibt es noch drei Fälle:

- a) Entweder erschießt Smith Miller. Dann ist Jones an der Reihe, schießt auf Smith und trifft mit 50-prozentiger Wahrscheinlichkeit. Trifft er nicht, wird er von Smith erschossen. Seine Überlebenschance beträgt also immerhin 50 %.
- b) Oder es erschießt Miller Smith. Dann gibt es das Duell Jones – Miller, wobei Jones beginnt; dieses überlebt Jones zu $5/9$ (Rechnung siehe unten).
- c) Oder es passiert gar nichts. (Denn wie oben gezeigt, wird keiner auf Jones schießen.) Dieser Fall kann nur auftreten, wenn Smith in die Luft schießt.

In jedem Fall steht Jones besser da, als wenn er Smith trifft, also sollte er in die Luft schießen.

Nun zurück zu Smith und Miller. Jeder möchte ja das Duell lebend *verlassen*. Also werden nicht beide bis in alle Ewigkeit in die Luft schießen.¹

Da Smith also weiß, dass irgendwann Miller auf ihn schießen wird, wird er nicht in die Luft schießen, denn wenn Miller tot ist, hat Smith eine Überlebenschance von 50 Prozent, wenn aber Miller später auf ihn schießt, nur von höchstens 20 Prozent. Da nun Smith mit seinem ersten Schuss Miller erschießen würde, wird Miller nicht darauf warten, sondern auf Smith schießen, wenn er an der Reihe ist, denn offenbar

¹Wir haben hier ein interessantes, paradox klingendes Phänomen: Falls sich einer von beiden dafür entscheidet, nur in die Luft zu schießen, müsste auch der andere in die Luft schießen. Denn sonst würde er sich unnötig ernstlicher Lebensgefahr aussetzen. (Solange beide nur in die Luft schießen, passiert niemandem etwas, denn Jones greift ohnehin nicht ein. Sobald jedoch einer tot ist, wird keiner mehr in die Luft schießen.)

In dieser erst einmal sehr gut klingenden Strategie ist jedoch ein Kreisschluss enthalten: In die Luft zu schießen, lohnt sich für einen Cowboy nur, wenn es auch der *später* schießende Gegner tun wird. Dessen Verhalten ist aber nicht vorherzusagen.

Diese mathematische Sackgasse lässt sich durch ein Argument „von außen“ lösen; im Wilden Westen z. B. dadurch, dass unsere Cowboys schießwütig sind, den anderen nicht trauen und nicht so lange am Kampfplatz bleiben wollen, dass sie verdursten, also wie gesagt möglichst das Duell *verlassen* wollen.

hat er eine bessere Überlebenschance, wenn Jones auf ihn zielt. Folglich wird außer Jones keiner in die Luft schießen.

Damit kommen wir zur Berechnung der Überlebenswahrscheinlichkeiten. Zunächst interessiert das Duell Miller – Jones. Wenn Miller beginnt, ist er in 80 % der Fälle sofortiger Überlebender. In den restlichen 20 % trifft zu gleichen Teilen Jones bzw. es hat keiner getroffen und es geht wieder von vorne los. Damit stehen die Chancen von Miller und Jones im Verhältnis 8 zu 1, sie sind also $8/9$ bzw. $1/9$.

Wenn Jones beginnt, ergibt sich entsprechend ein Verhältnis der Chancen von Jones und Miller von 5 zu 4, sie sind demnach $5/9$ bzw. $4/9$.

Berechnen wir nun die Überlebenswahrscheinlichkeiten insgesamt:

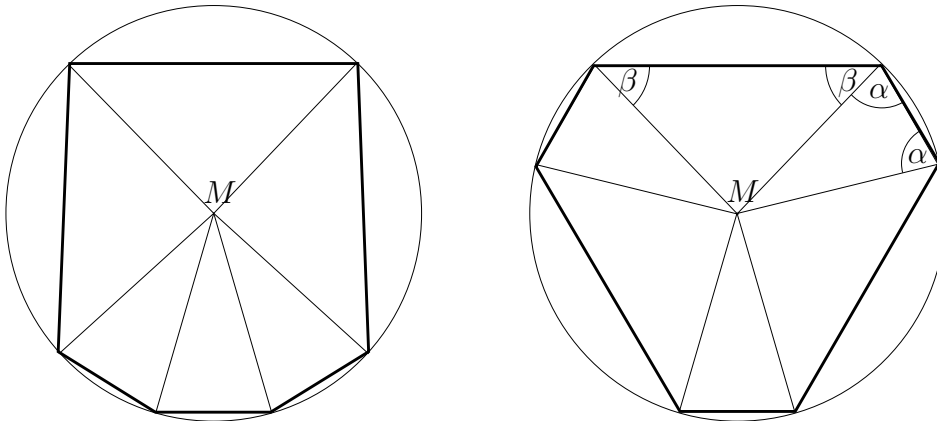
- i) Smith beginnt. Er erschießt Miller, dann schießt Jones auf ihn. Dies überlebt er mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ (und erschießt dann Jones, ist also Sieger). Jones überlebt ebenso mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$; Miller gar nicht.
- ii) Miller beginnt. Er schießt auf Smith. Wenn er trifft (zu 80 Prozent), gibt es das Duell Jones – Miller, Jones beginnt. Wenn Miller nicht trifft (in 20 Prozent der Fälle), ist die Situation wie in i), denn sollte davor noch Jones an der Reihe sein, wird dieser ja in die Luft schießen. Die Wahrscheinlichkeiten sind also für Smith: $8/10 \cdot 0 + 2/10 \cdot 1/2 = 1/10$; für Miller: $8/10 \cdot 4/9 + 2/10 \cdot 0 = 32/90$; für Jones: $8/10 \cdot 5/9 + 2/10 \cdot 1/2 = 49/90$.
- iii) Jones beginnt. Da er in die Luft schießt, sind wir mit 50 Prozent Wahrscheinlichkeit in Fall i) und mit 50 Prozent Wahrscheinlichkeit in Fall ii), je nachdem, wer als Nächster dran ist.

Da jeder mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ beginnt, setzt sich die Gesamtwahrscheinlichkeit also zu gleichen Teilen aus den Wahrscheinlichkeiten der ersten beiden Fälle zusammen. Das ergibt:

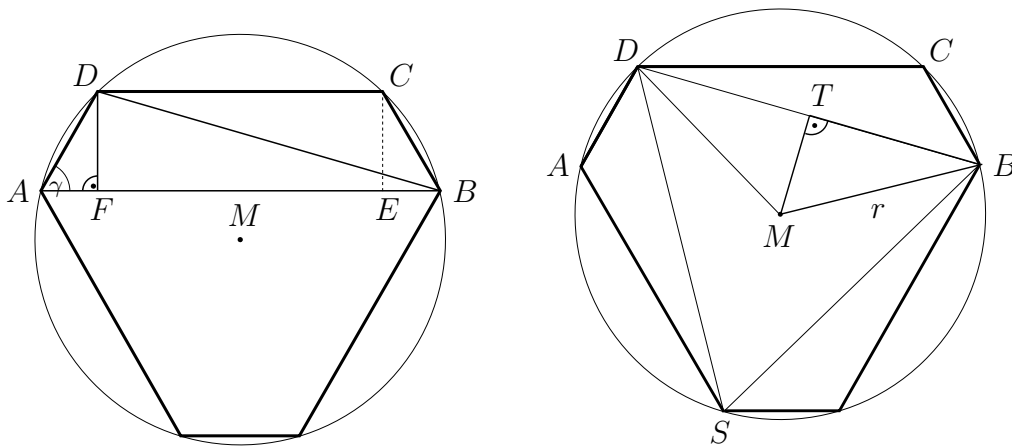
- Smith hat eine Chance von $1/2 \cdot 1/2 + 1/2 \cdot 1/10 = 27/90 = 0,3$.
- Miller hat eine Chance von $1/2 \cdot 0 + 1/2 \cdot 32/90 = 16/90 = 0,1777 \dots$
- Jones hat eine Chance von $1/2 \cdot 1/2 + 1/2 \cdot 49/90 = 47/90 = 0,5222 \dots$

Und die Moral von der Geschicht' (Zitat von Zirkelteilnehmer Manuel): „Nicht nur beim Kampf gegen Drachen, sondern auch im Wilden Westen sind Mathematikkenntnisse wichtiger fürs Überleben als der Umgang mit Schwert und Colt.“

L 29.3 Bevor wir irgendetwas berechnen, „zerlegen“ wir unser Wappen und setzen es neu zusammen: Wir verbinden die sechs Eckpunkte mit dem Mittelpunkt M des Kreises und erhalten so sechs gleichschenklige Dreiecke, deren Schenkel alle die Länge r und deren Basis die Länge 2 bzw. 5 haben. Diese Dreiecke ordnen wir jetzt wie in der zweiten Skizze abwechselnd – eines mit Basis 2, dann wieder eines mit Basis 5 – an. Diese Umordnung ändert nichts an der Größe des Kreises.



Die Basiswinkel in den Dreiecken mit Basis 2 seien α , die Basiswinkel in den Dreiecken mit Basis 5 seien β . Dann erhält man für die Summe der Winkel am Mittelpunkt M : $3 \cdot (180^\circ - 2 \cdot \alpha) + 3 \cdot (180^\circ - 2 \cdot \beta) = 6 \cdot (180^\circ - \alpha - \beta)$. Andererseits ist der volle Umfang ja gerade 360° . Somit gilt $360^\circ = 6 \cdot (180^\circ - \alpha - \beta)$, also $\alpha + \beta = 120^\circ$. Betrachten wir das Dreieck $ABCD$ (siehe folgende Skizze). Da die Winkelsumme in jedem Viereck 360° ist und die Winkel an C und D jeweils $\alpha + \beta = 120^\circ$ betragen, gilt für den Winkel γ an A bzw. an B : $\gamma = \frac{1}{2}(360^\circ - 2 \cdot 120^\circ) = 60^\circ$. Da $\angle DFA$ ein rechter Winkel ist, ist das Dreieck AFD ein „halbes gleichseitiges“ Dreieck, somit folgt, dass AF die Länge $\frac{1}{2}\overline{AD} = 1$ hat, und FD hat nach dem Satz von Pythagoras die Länge $\overline{FD} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.



Aus Symmetriegründen folgt, dass $\overline{EB} = 1$ gilt, daher hat FB die Länge $5 + 1 = 6$ (es ist $CDFE$ ein Rechteck und somit $\overline{FE} = \overline{DC} = 5$). Nach Pythagoras² hat dann die Strecke BD die Länge $\sqrt{6^2 + 3} = \sqrt{39}$.

²Diese Länge kann man auch ohne diese Vorüberlegungen unter Benutzung des Kosinussatzes $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ (in einem Dreieck mit den Standardbezeichnungen) berechnen: Im Dreieck BCD ergibt sich: $\overline{BD}^2 = 2^2 + 5^2 - 2 \cdot 2 \cdot 5 \cos 120^\circ = 29 - 20(-\cos 60^\circ) = 29 + 20 \cdot \frac{1}{2} = 39$.

Es ist BDS ein gleichseitiges Dreieck. Damit ist der Höhenfußpunkt T im Dreieck MBD der Mittelpunkt der Seite BD , und BTM ist ein rechtwinkliges Dreieck mit Winkel 30° an B und 60° an M . Auch dieses Dreieck können wir als Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks – wie auch schon oben das Dreieck AFD – betrachten: Es folgt zuerst $\overline{MT} = \frac{1}{2}\overline{MB}$ und dann mit Pythagoras die Beziehung³: $\overline{TB} = \sqrt{\overline{MB}^2 - \overline{MT}^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{MB}$.

Mit Hilfe von $\overline{TB} = \frac{1}{2}\sqrt{39}$ erhalten wir damit für den gesuchten Radius

$$r = \overline{MB} = \sqrt{13}.$$

Also muss die Metallplatte mindestens einen Radius von $\sqrt{13}$ Längeneinheiten haben.

L 29.4 Für die Frage a) lautet die Antwort „ja“, für die Fragen b) und c) lautet sie jeweils „nein“.

Wie man schnell nachrechnen kann, bilden die Ziffern 1, 3 und 7 eine Lösung. Die Zahlen 137, 173 und 317 sind nämlich Primzahlen und es ist $371 = 7 \cdot 53$, $713 = 23 \cdot 31$ und $731 = 17 \cdot 43$. Ebenso bilden die Ziffern 3, 7 und 9 eine Lösung, da 379, 397, 739 und 937 Primzahlen sind und $793 = 13 \cdot 61$ und $973 = 7 \cdot 139$ gilt.

Wir werden jetzt zeigen, dass dies sogar die einzigen möglichen Tripel sind. Dies war zwar in der Aufgabe nicht gefragt, aber die Methode, die anderen Tripel auszuschließen, zeigt auch, dass es mit vier und mehr Ziffern keine Lösung gibt.

Nehmen wir an, wir hätten Ziffern a, b, c mit der gesuchten Eigenschaft und eine der Ziffern, zum Beispiel c , wäre gerade, dann sind die Zahlen abc und bac beide gerade, d. h. sie haben den gemeinsamen Teiler 2. Also müssen alle Ziffern ungerade sein. Ist nun eine Ziffer gleich 5, so sind die Zahlen $ab5$ und $ba5$ beide durch 5 teilbar und somit wieder nicht teilerfremd. Als mögliche Ziffern bleiben also nur 1, 3, 7 und 9. Dieselbe Überlegung führt dazu, dass auch für die mehrstelligen Zahlen nur diese vier Ziffern zur Verfügung stehen. Somit muss Frage c) verneint werden. Für Frage b) muss nur das Ziffernquadrupel (1, 3, 7, 9) untersucht werden und für Frage a) die Zifferntripel (1, 3, 7), (3, 7, 9) (siehe oben), (1, 3, 9) (siehe Beispiel) und (1, 7, 9). Die Zahlen 791 ($= 7 \cdot 113$) und 917 ($= 7 \cdot 131$) sind aber beide durch 7 teilbar.

Bei den vierstelligen Zahlen mit den Ziffern 1, 3, 7 und 9 sind zum Beispiel 1397, 3179, 7931 und 9713 alle durch 11 teilbar.

³Diese Beziehung können wir auch unter Benutzung von Winkelfunktionen berechnen: $\frac{\overline{TB}}{\overline{MB}} = \sin 60^\circ$, also $\overline{TB} = \sin 60^\circ \overline{MB} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{MB}$.

Lösungen zu Aufgabenblatt 30

L 30.1 Nein, das kann nicht passieren.

Färbt man die Felder des Brettes wie üblich abwechselnd schwarz und weiß, wobei man mit schwarz in einer Ecke beginnt, so sieht man, dass es insgesamt 61 schwarze und 60 weiße Felder gibt. Die Nachbarfelder von schwarzen Feldern sind dabei stets weiße Felder und umgekehrt. Die 61 Spielfiguren, die zu Beginn auf den schwarzen Feldern stehen, können demnach nach dem erneuten Aufstellen nicht alle auf (weißen) Nachbarfeldern landen.

L 30.2 Nina kann sich zum Beispiel die drei Zahlen 2, 3, 4 denken. Deren Produkt ist 24 und deswegen kann Michael in keinem Fall andere Teiler als die Teiler von 24, nämlich 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, nennen.

Andererseits müssen, damit die Summe der drei von Nina gedachten Zahlen ungerade ist, genau zwei der drei Zahlen gerade sind. Dies sind dann die erste und die letzte Zahl. Von zwei aufeinanderfolgenden geraden Zahlen ist aber eine sogar durch 4 teilbar. Damit ist das Produkt in jedem Fall durch 8 teilbar. Da unter drei aufeinanderfolgenden Zahlen auch stets eine durch 3 teilbar ist (und 3 und 8 teilerfremd sind), muss das Produkt der von Nina gedachten Zahlen stets durch 24 teilbar sein. Michael kann also in der Tat in jedem Fall die Teiler 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 nennen und wie oben gesehen auch keine anderen.

L 30.3 Eine Person sitze auf einem fest gewählten Platz. Ihr „Partner“ (mit gleichem Essen) kann ihr nun gegenüber sitzen (1. Fall; eine Möglichkeit) oder aber mit genau einem Platz Abstand (2. Fall; zwei Möglichkeiten [rechts oder links]) von ihr Platz nehmen.

Im ersten Fall kann man auf einen festen der übrigen Plätze einen der vier übrigen Studenten setzen. Dessen Partner hat dann noch zwei Möglichkeiten und die übrigen beiden Studenten können sich dann noch auf zwei verschiedene Arten setzen. Das ergibt $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ Varianten.

Im zweiten Fall hat man für den Platz zwischen den beiden zuerst betrachteten Studenten noch vier Möglichkeiten, ihn zu besetzen, gegenüber diesem Platz muss dann aber der Partner dazu sitzen, damit die restlichen beiden nicht nebeneinandersitzen. Diese können aber noch untereinander tauschen, was noch einen Faktor 2 ergibt. Das sind hier also nur $4 \cdot 2 = 8$ Möglichkeiten. Dies müssen wir aber mal 2 nehmen, da es zwei Möglichkeiten für den 2. Fall gab, so dass wir insgesamt auf $16 + 2 \cdot 8 = 32$ Möglichkeiten kommen.

Anmerkung: Manchen Einsensendern war offenbar nicht ganz klar, dass wir jeweils zwischen den beiden Studenten mit gleichem Essen unterscheiden wollten. Tut man

dies nicht (betrachtet man also nur die Anordnungen der Essen), so ergibt das natürlich auch eine interessante Fragestellung. Im ersten Fall (die beiden Studenten mit einem fest gewählten Essen sitzen sich gegenüber) erhält man dann drei Möglichkeiten (zwei dafür, dass sich die anderen auch gegenüber sitzen, bei einer sitzen sie sich nicht gegenüber) und im zweiten Fall noch zwei Möglichkeiten (zwischen links und rechts wird nicht mehr unterschieden, aber man kann wählen, mit welchem Essen sich die Studenten gegenüber sitzen sollen), insgesamt also fünf Möglichkeiten.

L 30.4 Wir betrachten zunächst nur ein einziges auf dem Tisch liegendes Deckchen und zeigen folgende Hilfsaussage:

Behauptung: Wenn eines der beschriebenen Häkeldeckchen auf dem Tisch liegt, dann wird der Mittelpunkt des Tisches von dem Deckchen bedeckt, genauer gesagt liegt der Mittelpunkt im Inneren des Quadrates, das das Deckchen darstellt.

Zum **Beweis** nehmen wir das Gegenteil an: dass wir ein Deckchen so hingelegt haben, dass der Tischmittelpunkt M nicht in dessen Innerem liegt.

Verlängert man die vier Kanten des Deckchenquadrats zu Geraden, so muss es mindestens eine geben, bezüglich der M auf der anderen Seite als das Deckchenquadrat liegt – oder im Grenzfall auf ihr liegt. Wir drehen den Tisch so, dass $ABCD$ links unterhalb dieser Geraden liegt (bzw. bei seitenparalleler Auflage des Deckchens unterhalb davon) und führen Bezeichnungen ein, die sich aus der folgenden Skizze ergeben:

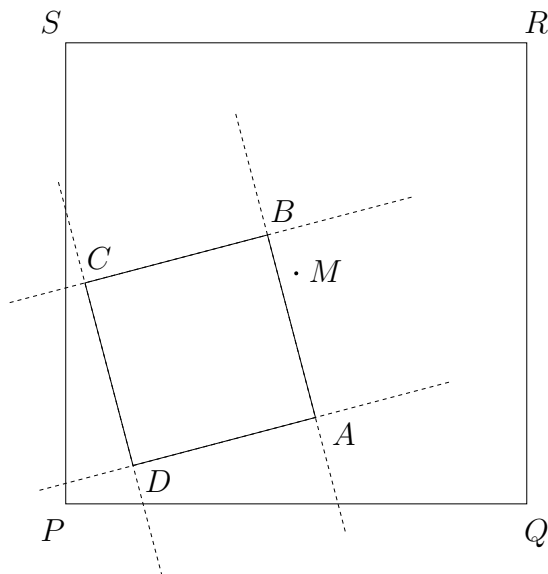


Abbildung 30.1: Was wäre, wenn ...

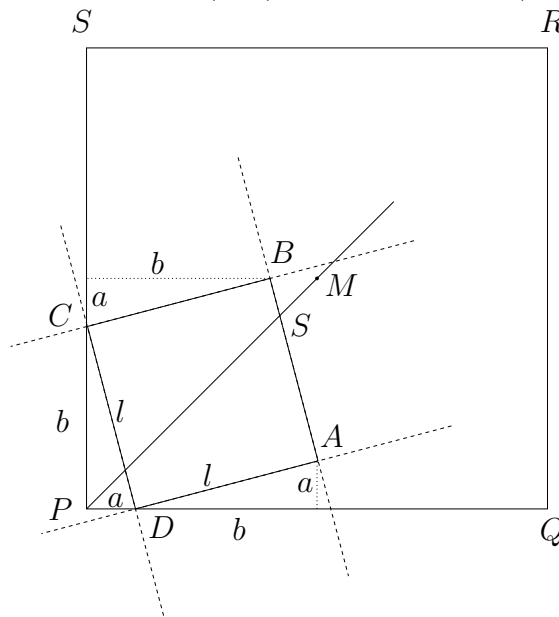
Nach Wahl der Lagebeziehungen können wir die Decke noch so weit wie möglich nach links und nach unten verschieben, ohne dass M unter die Decke gerät. Wir können also annehmen, dass D auf PQ und C auf PS liegt.

Zur Vereinfachung der Notation werde die Seitenlänge der Decke mit $l = 40$ cm bezeichnet.

Nun werden Koordinaten eingeführt: P liege im Ursprung, D auf $(a, 0)$ und C auf $(0, b)$. Dann hat A die Koordinaten $(a+b, a)$ und B die Koordinaten $(b, a+b)$. Dabei gilt nach der Dreiecksungleichung: $a + b \geq l > 0$ und außerdem $a^2 + b^2 = l^2$.

Im Fall $a = 0$ läge nun offenbar M im Inneren des Deckchens, denn $l > \frac{PQ}{2}$. Wir können also $a > 0$ annehmen.

Die Geradengleichung der Geraden (AB) lautet dann $y = (x - b) \cdot (-b)/a + (a + b)$.



Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Diagonalen $x = y$ berechnet sich aus:

$$\begin{aligned}
 x &= (x - b) \cdot (-b)/a + a + b \\
 \Leftrightarrow ax &= -b(x - b) + a^2 + ab \\
 \Leftrightarrow (a + b)x &= a^2 + ab + b^2 = 1/2 \cdot (a^2 + 2ab + b^2 + a^2 + b^2) \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{1}{2(a + b)}((a + b)^2 - 2(a + b)l + l^2 + 2(a + b)l) \\
 &= \frac{1}{2(a + b)}(a + b - l)^2 + l \\
 &\geq l.
 \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt S hat also Koordinaten (s, s) mit $s \geq l$. Es hat M die Koordinaten $(l - 0,25 \text{ cm}, l - 0,25 \text{ cm})$. Das heißt, dass S gleichzeitig weiter von P entfernt sein soll als M und auf der Geraden (AB) liegen soll, bezüglich der P und M nicht auf derselben Seite liegen (allenfalls liegt M auf (AB) , dann müssten M und S zusammenfallen) – ein Widerspruch. Damit ist unsere Annahme falsch und die Behauptung bewiesen.

Nun ist der Rest einfach: Jede ordnungsgemäß platzierte Tischdecke muss also den Mittelpunkt des Tisches echt überdecken. Damit würde aber eine zweite Decke eine erste teilweise überdecken, was nicht sein soll, und somit kann Lisa immer nur eine Decke auflegen.

Lösungen zu Aufgabenblatt 31

L 31.1 Der Schalter der Lampe mit der Nummer n wird während der gesamten Prozedur offenbar genau so oft betätigt, wie n Teiler hat, denn die k -te Person betätigt den Schalter n genau dann, wenn $k|n$ gilt.

Bei einer natürlichen Zahl n , die keine Quadratzahl ist, treten die Teiler aber immer in Paaren auf. Zu einem Teiler k gibt es immer einen sogenannten komplementären Teiler k' , für den $k \cdot k' = n$ ist, und dabei ist $k \neq k'$, denn ansonsten wäre $n = k^2$ eine Quadratzahl. Wir können also die Teiler einer Nicht-Quadratzahl n in Paare komplementärer Teiler aufteilen. Eine solche Zahl hat daher stets geradzahlig viele Teiler. (Beispiel: $12 = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$).

Genauso sieht man, dass Quadratzahlen $n = k^2$ stets ungeradzahlig viele Teiler haben, denn auch ihre Teiler lassen sich wieder in Paare komplementärer Teiler aufteilen, wobei nur k als einzelner übrig bleibt (denn er ist sein eigener komplementärer Teiler).

Daher werden Schalter, deren Nummer keine Quadratzahl ist, geradzahlig oft betätigt und die zugehörigen Lampen sind somit am Ende der Prozedur genau wie zu Beginn aus. Schalter, deren Nummer eine Quadratzahl ist, werden ungeradzahlig oft betätigt und somit sind die entsprechenden Lampen nach der Prozedur angeschaltet.

Wegen $44^2 = 1936 < 2003 < 2025 = 45^2$ gibt es genau 44 unter den 2003 Lampen, deren Nummer eine Quadratzahl ist, so dass am Ende der Prozedur genau 44 Lampen an sind.

L 31.2 Wenn für zwei reelle Zahlen x, y die Gleichung $2x^2 - 2xy + y^2 = 0$ gilt, so kann man dies umschreiben zu $x^2 + (x - y)^2 = 0$. Da Quadrate von null verschiedener Zahlen positiv sind, muss also $x = 0$ und $x - y = 0$ gelten. Daraus folgt aber auch $y = 0$. Demnach kann $(x + 41)^2 + (y - 17)^2 + 33$ nur einen Wert annehmen, nämlich $(0 + 41)^2 + (0 - 17)^2 + 33 = 2003$.

Diesen Wert nimmt der Term auch an, denn in der Tat ist $x = y = 0$ Lösung von $2x^2 - 2xy + y^2 = 0$.

L 31.3 Angenommen, es gäbe für ein solches $n \geq 10$ keine Kubikzahl zwischen n und $3 \cdot n$.

Dann gäbe es eine natürliche Zahl k mit $k^3 \leq n$ und $(k + 1)^3 \geq 3n$. Daraus folgt

dann $k \leq \sqrt[3]{n}$ und $k + 1 \geq \sqrt[3]{3n} = \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{n}$. Hieraus folgt für $n \geq 27$ weiter:

$$\begin{aligned}
 1 &= (k + 1) - k \\
 &\geq \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n} \\
 &= \left(\sqrt[3]{3} - 1 \right) \cdot \sqrt[3]{n} \\
 &\geq \left(\sqrt[3]{3} - 1 \right) \cdot 3 \\
 &> 1.
 \end{aligned}$$

Die letzte Abschätzung folgt aus $81 > 64$, was nach Ziehen der dritten Wurzel zu $3 \cdot \sqrt[3]{3} > 4$ wird.

Also erhält man für $n \geq 27$ einen Widerspruch zur obigen Annahme. Damit gibt es in diesem Fall stets eine Kubikzahl zwischen n und $3 \cdot n$.

Für die übrigen Fälle $10 \leq n < 27$ ist offenbar $27 = 3^3$ eine Kubikzahl zwischen n und $3 \cdot n$. Damit ist die Aussage auch hier bewiesen.

L 31.4 Die übersichtlichste Prozedur ist wohl diejenige, bei der in jedem Schritt genau eine Karte neu eingeordnet wird. Dazu wird der Stapel in 1 und $2, 3, \dots, 52$ getrennt und zum Stapel $2, 3, \dots, 52, 1$ gemacht. Im n -ten Schritt ($n \in \{2, \dots, 51\}$) wird der vorhandene Stapel $n, n + 1, n + 2, \dots, 52, n - 1, n - 2, \dots, 1$ in die Stapel $n + 1, n + 2, \dots, 52, n - 1, n - 2, \dots, 1$ und n getrennt und anschließend zum Stapel $n + 1, n + 2, \dots, 52, n, n - 1, n - 2, \dots, 1$ zusammengefügt. Nach der 51. Operation liegt der gewünschte Stapel $52, 51, \dots, 3, 2, 1$ vor.

Es geht also zumindest mit 51 Operationen.

Dagegen geht es nicht mit weniger als 6 Operationen. Zur Begründung: Wir definieren einen *Block* von Karten als eine Folge von Karten $i, i + 1, i + 2, \dots, i + j$, die in dieser Reihenfolge im Stapel vorhanden ist, und die Folge soll zu keiner Seite fortsetzbar sein, also maximal gewählt sein. So hat zum Beispiel der Stapel $2, 1, 3, 4, 6, 5, 7$ die Blöcke 1 und $2, 3, 4, 5$ und $6, 7$.

Am Anfang unserer Umordnungsaktion liegt somit genau ein Block vor. Wir machen die folgende Beobachtung: Die Karten in jedem der beiden Teilstapel, die bei der ersten Operation gebildet werden, können beim Zusammenlegen ihre Reihenfolge nicht ändern. Es werden nur die beiden Blöcke von Zahlen $1, \dots, k$ und $k + 1, \dots, 52$ *ineinandergefügt*. Bei der zweiten Operation können durch das Teilen in zwei Stapel bestenfalls beide Blöcke aus der ersten Teilung wiederum in je zwei Blöcke getrennt werden, so dass maximal vier Blöcke entstehen. Es ist unschwer zu erkennen, dass nach n Operationen höchstens 2^n Blöcke vorliegen können. Zur vollständigen Umordnung des Stapels ist es jedoch nötig, 52 Blöcke gebildet zu haben. Da $2^5 = 32 < 52$ ist, kann dies mit fünf Operationen noch nicht erfolgt sein.

Bemerkung: Mit sechs Operationen ist die Umordnung möglich, und der vorangehende Absatz liefert auch einen Hinweis, wie man dies (nur) erreichen kann: Man

muss die Blöcke so spalten und ineinanderfügen, dass man in den nachfolgenden Schritten immer noch weiter so viele Blöcke wie möglich spalten kann (ungefähr jedenfalls, weil wir nur 52 und nicht 64 Karten haben). Man muss sie also insbesondere so weit wie möglich ineinander verschränken. (Auf diese Weise bekommt man mit sechs Operationen tatsächlich bis zu $2^6 = 64$ Karten umgeordnet.) Eine Möglichkeit dazu ist die folgende, sie ist direkt von der einzigen Möglichkeit für 64 Karten abgeleitet:

Zu Beginn	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52
1. Teilen	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32 und 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52
Nach erster Operation	33, 1, 34, 2, 35, 3, 36, 4, 37, 5, 38, 6, 39, 7, 40, 8, 41, 9, 42, 10, 43, 11, 44, 12, 45, 13, 46, 14, 47, 15, 48, 16, 49, 17, 50, 18, 51, 19, 52, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32
2. Teilen	33, 1, 34, 2, 35, 3, 36, 4, 37, 5, 38, 6, 39, 7, 40, 8, 41, 9, 42, 10, 43, 11, 44, 12, 45, 13, 46, 14, 47, 15, 48, 16 und 49, 17, 50, 18, 51, 19, 52, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32
Nach zweiter Operation	49, 33, 17, 1, 50, 34, 18, 2, 51, 35, 19, 3, 52, 36, 20, 4, 37, 21, 5, 38, 22, 6, 39, 23, 7, 40, 24, 8, 41, 25, 9, 42, 26, 10, 43, 27, 11, 44, 28, 12, 45, 29, 13, 46, 30, 14, 47, 31, 15, 48, 32, 16
3. Teilen	49, 33, 17, 1, 50, 34, 18, 2, 51, 35, 19, 3, 52, 36, 20, 4, 37, 21, 5, 38, 22, 6, 39, 23, 7, 40, 24, 8 und 41, 25, 9, 42, 26, 10, 43, 27, 11, 44, 28, 12, 45, 29, 13, 46, 30, 14, 47, 31, 15, 48, 32, 16
Nach dritter Operation	49, 41, 33, 25, 17, 9, 1, 50, 42, 34, 26, 18, 10, 2, 51, 43, 35, 27, 19, 11, 3, 52, 44, 36, 28, 20, 12, 4, 45, 37, 29, 21, 13, 5, 46, 38, 30, 22, 14, 6, 47, 39, 31, 23, 15, 7, 48, 40, 32, 24, 16, 8
4. Teilen	49, 41, 33, 25, 17, 9, 1, 50, 42, 34, 26, 18, 10, 2, 51, 43, 35, 27, 19, 11, 3, 52, 44, 36, 28, 20, 12, 4 und 45, 37, 29, 21, 13, 5, 46, 38, 30, 22, 14, 6, 47, 39, 31, 23, 15, 7, 48, 40, 32, 24, 16, 8
Nach vierter Operation	49, 45, 41, 37, 33, 29, 25, 21, 17, 13, 9, 5, 1, 50, 46, 42, 38, 34, 30, 26, 22, 18, 14, 10, 6, 2, 51, 47, 43, 39, 35, 31, 27, 23, 19, 15, 11, 7, 3, 52, 48, 44, 40, 36, 32, 28, 24, 20, 16, 12, 8, 4

5. Teilen	49, 45, 41, 37, 33, 29, 25, 21, 17, 13, 9, 5, 1, 50, 46, 42, 38, 34, 30, 26, 22, 18, 14, 10, 6, 2 und 51, 47, 43, 39, 35, 31, 27, 23, 19, 15, 11, 7, 3, 52, 48, 44, 40, 36, 32, 28, 24, 20, 16, 12, 8, 4
Nach fünfter Operation	51, 49, 47, 45, 43, 41, 39, 37, 35, 33, 31, 29, 27, 25, 23, 21, 19, 17, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1, 52, 50, 48, 46, 44, 42, 40, 38, 36, 34, 32, 30, 28, 26, 24, 22, 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2
6. Teilen	51, 49, 47, 45, 43, 41, 39, 37, 35, 33, 31, 29, 27, 25, 23, 21, 19, 17, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1 und 52, 50, 48, 46, 44, 42, 40, 38, 36, 34, 32, 30, 28, 26, 24, 22, 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2
Nach sechster Operation	52, 51, 50, 49, 48, 47, 46, 45, 44, 43, 42, 41, 40, 39, 38, 37, 36, 35, 34, 33, 32, 31, 30, 29, 28, 27, 26, 25, 24, 23, 22, 21, 20, 19, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1

Lösungen zu Aufgabenblatt 32

L 32.1 Angenommen, Wesen A würde die Wahrheit sagen. Dann bekäme Tobias aufgrund der ersten Aussage genau zwei CDs, wegen der letzten Aussage höchstens zwei Bücher und wegen der dritten Aussage dann kein Stofftier, was nicht sein kann. Demnach ist Wesen A das Weihnachtsteufelchen und Wesen B das Engelchen.

Ist nun c die Anzahl der CDs, b die Anzahl der Bücher und s die Anzahl der Stofftiere, die Tobias bekommt, so erhält man mit der wahren zweiten Aussage $c + b + s = 9$. Die wahre vierte Aussage liefert $c > s$ und die Aussage fünf, die ja falsch ist, liefert $b > c$. Das heißt aber $c \geq s + 1$ und $b \geq s + 2$. Da die dritte Aussage falsch sein muss, kann auch nicht $b = s + 2$ sein, sondern es muss sogar $b \geq s + 3$ gelten. Setzt man das in $c + b + s = 9$ ein, so folgt $9 \geq (s + 1) + (s + 3) + s = 3s + 4$ bzw. $s \leq \frac{5}{3}$. Somit muss $s = 1$ sein.

Wegen der falschen ersten Aussage (und wegen $c > s$) ist dann $c \geq 3$. Wäre sogar $c \geq 4$, so folgte mit $b > c$ auch $b \geq 5$, was aber $c + b + s = 9$ widerspricht.

Also ist $c = 3$ und damit $b = 5$.

Tobias bekommt also ein Stofftier, drei CDs und fünf Bücher.

L 32.2 Wir bestimmen zuerst alle lupfigen Zahlen zwischen 10 und 100. Da keine Zahl durch 0 teilbar ist, sind die Ziffern einer lupfigen Zahl nicht 0. Wir können also eine lupfige Zahl k schreiben als $k = 10 \cdot a + b$ mit $1 \leq a \leq 9$ und $1 \leq b \leq 9$. Nun ist k durch b teilbar und daher auch $k - b = 10 \cdot a$, d. h. es gibt eine natürliche Zahl m mit $10 \cdot a = m \cdot b$. Weiter ist k durch a teilbar und damit auch $k - 10 \cdot a = b$. Also gibt es eine natürliche Zahl n mit $b = n \cdot a$. Man sieht fast sofort, dass die Existenz von solchen m und n umgekehrt auch die Lupfigkeit von k zur Folge hat.

Damit ist $10 \cdot a = m \cdot b = m \cdot n \cdot a$ und daher $10 = m \cdot n$. Also sind n und m Teiler von 10, d. h. gleich 1, 2, 5 oder 10.

Wäre $n = 10$, so wäre $b = 10 \cdot a > 9$. Für $n = 5$ erhält man wieder wegen $b \leq 9$ als einzige Möglichkeit $a = 1$ und $b = 5$, d. h. man erhält die lupfige Zahl 15.

Für $n = 2$ erhält man als Bedingung $a \leq 4$ und dies liefert die lupfigen Zahlen $10 \cdot a + 2 \cdot a = 12 \cdot a$ für $a = 1, 2, 3$ oder 4. Zuletzt erhält man für $n = 1$ die neun Zahlen der Form $11 \cdot a$ mit $1 \leq a \leq 9$.

Die Summe dieser Zahlen ist nun

$$15 + 12 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) + 11 \cdot (1 + 2 + \dots + 9) = 15 + 12 \cdot 10 + 11 \cdot 45 = 630.$$

Die Summe aller lupfigen Zahlen zwischen 10 und 100 beträgt also 630.

L 32.3 Da die Dosen Seitenlänge 5 cm haben, wurden insgesamt $\frac{65}{5} \cdot \frac{215}{5} \cdot \frac{305}{5} = 34099$ Dosen geliefert. Wenn Peter keine Dose unterschlagen hätte, dann könnte man

34099 als Summe zweier Quadratzahlen schreiben.

Der Chef kommt zu seiner Schlussfolgerung, weil man die Zahl 34099 nicht auf diese Weise zerlegen kann, wie im Folgenden gezeigt wird.

Wir betrachten Reste bei Division durch 4:

Eine gerade Quadratzahl ist stets durch 4 teilbar, da sie das Quadrat einer durch 2 teilbaren Zahl ist. Ist die Quadratzahl ungerade, d. h. das Quadrat einer ungeraden Zahl $2k + 1$, so ist die Quadratzahl $(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$ eine Zahl, die bei Division durch 4 den Rest 1 lässt.

Für die Summe zweier Quadratzahlen bleiben also bei Division durch 4 als mögliche Reste die Zahlen $0 = 0 + 0$, $1 = 0 + 1$ und $2 = 1 + 1$. Die Zahl 34099 lässt allerdings bei Division durch 4 den Rest 3, denn es ist $34099 = 4 \cdot 8524 + 3$. Also lässt sich 34099 nicht als Summe zweier Quadratzahlen schreiben, was Peters Chef zweifellos erkannt hatte.

Peter muss tatsächlich noch mehr Dosen unterschlagen haben, denn auch die Zahl 34098 lässt sich nicht als Summe zweier Quadratzahlen schreiben.

Um dies einzusehen, betrachten wir Reste bei der Division durch 3:

Ist eine natürliche Zahl n durch 3 teilbar, so ist ihr Quadrat n^2 auch durch 3 und sogar durch 9 teilbar. Ist n nicht durch 3 teilbar, d. h. lässt sich n schreiben als $n = 3k + 1$ oder $n = 3k + 2$, so gilt für n^2 :

$$n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3 \cdot (3k^2 + 2k) + 1$$

bzw.

$$n^2 = (3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3 \cdot (3k^2 + 4k + 1) + 1.$$

Also lässt n^2 in diesen Fällen Rest 1. Für die Reste einer Summe zweier Quadrate bei Division durch 3 bleiben also die Möglichkeiten 0, 1 und 2, wobei der Rest 0 genau dann auftritt, wenn beide Quadratzahlen durch 3 teilbar sind. In diesem Fall ist die Summe also sogar durch 9 teilbar.

Die Zahl 34098 ist nun durch 3 teilbar ($34098 = 3 \cdot 11366$), weshalb gerade dieser eben genannte Fall eintreten müsste.

Allerdings ist 34098 nicht durch 9 teilbar. Somit lässt sich 34098 nicht als Summe zweier Quadratzahlen schreiben.

Peter kann also auch nicht diese Anzahl an Keksdosen aufgebaut haben.

Eine genau entsprechende Betrachtung bezüglich der Teilbarkeit durch 7 zeigt, dass Peter auch nicht 34097 Keksdosen aufgebaut haben kann.

Bemerkung:

Auf ähnliche Weise (und mit etwas mehr Geduld) lässt sich sogar zeigen, dass Peter mindestens 11 (!) Keksdosen unterschlagen haben muss, da 34088 die größte Zahl kleiner als 34099 ist, die sich als Summe zweier Quadratzahlen schreiben lässt.

Die gelegten Quadrate hätten dann Seitenlängen von $118 \cdot 5 \text{ cm} = 590 \text{ cm}$ bzw. $142 \cdot 5 \text{ cm} = 710 \text{ cm}$.

Ganz allgemein kann man zeigen, dass sich eine natürliche Zahl genau dann als Summe zweier Quadratzahlen schreiben lässt, wenn jeder ihrer Primfaktoren, der bei Division durch 3 den Rest 2 lässt, eine gerade Vielfachheit hat.

L 32.4 Seien die Kerzen von 1 bis 14 durchnummeriert (siehe Skizze).

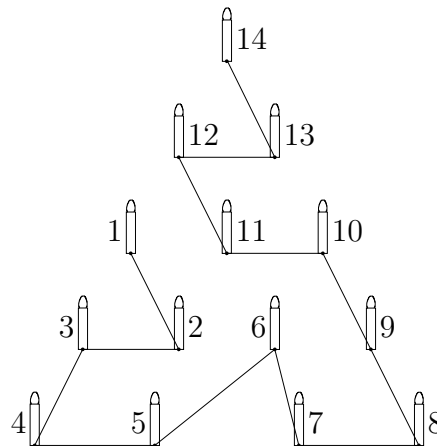


Abbildung 32.1: Die Kerzenkette von Familie Meier – durchnummeriert

Wir betrachten zuerst, wie sich die Ärgerpunkte der einzelnen Kerzen ändern, wenn man die Kette umdreht. Kerze 1 (K1) kommt an die Stelle von Kerze 14 (K14), also zwei Ebenen höher, bekommt somit 2 Ärgerpunkte dazu. Die Ärgerpunkte von K14 verringern sich also um 2. Genauso erhöhen sich bei den Kerzen K2, K3, K4 und K5 die Ärgerpunkte um 2 und die von K10, K11, K12 und K13 verringern sich um 2. Dagegen ändern sich die Ärgerpunkte von K6, K7, K8 und K9 nicht, da K6 und K9 bzw. K7 und K8 beim Umdrehen vertauscht werden.

Das Umdrehen der Kette lohnt sich genau dann, wenn sich die Gesamtsumme der Ärgerpunkte der noch funktionierenden Kerzen verringert, also genau dann, wenn unter den Kerzen K10, K11, K12, K13 und K14 mehr funktionierende Kerzen sind als unter den Kerzen K1, K2, K3, K4 und K5; sind es genauso viele, ist es egal, ob man die Kette umdreht oder nicht, und wenn unter den Kerzen K1, ..., K5 sogar noch mehr funktionieren als unter den Kerzen K10, ..., K14, dann würde man sich durch das Umdrehen sogar noch mehr Ärger einhandeln.

Nun ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich lohnt, die Kette umzudrehen, genauso groß wie die Wahrscheinlichkeit, dass es ungünstiger ist, wenn man die Kette umdreht, denn die umgedrehte Kette liefert ja genau die andere Situation. Wenn wir also die Wahrscheinlichkeit, dass es egal ist, ob man die Kette umdreht, berechnet haben, ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, dass es sich lohnt, die Kette umzudrehen, durch die Formel: $p(L) = \frac{1}{2}(1 - p(E))$, wobei $p(E)$ die Wahrscheinlichkeit für „egal“ und $p(L)$ diejenige für „lohnt sich“ ist.

Die Wahrscheinlichkeit $p(E)$ berechnet sich nun als Quotient der Anzahl der möglichen Situationen für dieses Ereignis (dass es egal ist, ob man die Kerzenkette umdreht) durch die Anzahl aller möglichen Situationen am Silvestermorgen. Damit es egal ist, ob man die Kette umdreht oder nicht, müssen unter den Kerzen K1, ..., K5 genauso viele bereits kaputt gewesen sein wie unter den Kerzen K10, ..., K14. Und insgesamt sind am Silvestervormittag ja 7 Kerzen schon ausgewechselt worden. Wäre in diesen zwei Gruppen je eine Kerze kaputtgegangen, so müssten von den vier Kerzen K6 bis K9 schon fünf kaputt gewesen sein, was offensichtlich nicht geht. Somit könnten in den zwei Fünfergruppen K1, ..., K5 und K10, ..., K14 je zwei Kerzen kaputtgegangen sein und noch drei der vier restlichen Kerzen; oder es könnten in den zwei Fünfergruppen je drei Kerzen kaputtgegangen sein und noch eine der restlichen vier.

Damit ist die Anzahl der möglichen Situationen, in denen es egal ist, ob man die Kette umdreht oder nicht, gerade:¹

$$\binom{5}{2} \binom{5}{2} \binom{4}{3} + \binom{5}{3} \binom{5}{3} \binom{4}{1} = 10 \cdot 10 \cdot 4 + 10 \cdot 10 \cdot 4 = 800.$$

Die Gesamtzahl der möglichen Situationen ist $\binom{14}{7} = 3432$ (7 der 14 Kerzen waren kaputt).

Damit ist $p(E) = \frac{800}{3432} = \frac{100}{429}$ und daher:

$$p(L) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{100}{429} \right) = \frac{329}{858} \approx 0,383.$$

Also ist es mit einer Wahrscheinlichkeit von ungefähr 38,3 % von Vorteil, die Kette am Silvestervormittag umzudrehen.

¹Dabei bezeichnet $\binom{n}{k}$ die Anzahl der k -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge. Hier speziell ist $\binom{5}{2}$ die Anzahl der Möglichkeiten, dass zwei der fünf Kerzen K1, ..., K5 (oder K10, ..., K14) kaputt sind.

Es heißt $\binom{n}{k}$ der Binomialkoeffizient „ n über k “ und berechnet sich als $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ mit $m! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (m-1) \cdot m$.

Lösungen zu Aufgabenblatt 33

L 33.1 Behauptung: Die gesuchte Zahl ist die 270.

Beweis: Zunächst ist festzustellen, dass 270 die geforderten Bedingungen erfüllt: Es ist

$$\begin{aligned} 270 &= 10 \cdot 27 = 1 \cdot 270 = 2 \cdot 135 = 3 \cdot 90 = 54 \cdot 5 = 5 \cdot 54 \\ &= 6 \cdot 45 = 27 \cdot 10 = 18 \cdot 15 = 9 \cdot 30. \end{aligned}$$

Damit bleibt noch zu zeigen, dass dies die kleinste Zahl mit der geforderten Eigenschaft ist.

Die gesuchte kleinste Zahl hat einen Teiler, dessen letzte Ziffer eine Null ist. Damit muss dieser Teiler durch 10 teilbar sein, mithin auch die Zahl selbst. (Dies folgt übrigens auch daraus, dass die Zahl je einen Teiler hat, dessen letzte Ziffer eine Zwei bzw. eine Fünf ist, man kann die Null also auch weglassen.)

Nun betrachten wir den geforderten Teiler, der auf eine Neun endet. Ist dieser Teiler größer oder gleich 29, so wäre die Zahl ein ganzzahliges Vielfaches des kleinsten gemeinsamen Vielfachen von 10 und diesem Teiler, und das ist gleich dem Produkt dieser beiden Zahlen, also größer als 270. Wäre der Teiler mit der Neun die 19, so wäre die Zahl entsprechend ein ganzzahliges Vielfaches von 190. Da 190 aber nur acht Teiler hat, insbesondere keinen mit einer Drei am Ende, kommt 190 nicht in Frage. Das nächste ganzzahlige Vielfache ist $380 > 270$.

Damit muss 9 ein Teiler der Zahl sein, die somit ein ganzzahliges Vielfaches von 90 ist. Sowohl 90 als auch 180 haben aber keinen Teiler, der auf die Ziffer Sieben endet, so dass 270 wirklich die kleinste Zahl ist.

L 33.2 Wenn die Zahl $\sqrt{x^2 + 33x + 1}$ eine natürliche Zahl ist, dann gilt $n^2 = x^2 + 33x + 1$ mit einer natürlichen Zahl n .

Um bei der folgenden quadratischen Ergänzung in der rechten Seite keine Brüche zu erhalten, multiplizieren wir die Gleichung mit 4. Dies liefert dann

$$\begin{aligned} (2n)^2 &= 4n^2 = 4x^2 + 4 \cdot 33x + 4 = ((2x)^2 + 2 \cdot (2x) \cdot 33 + 33^2) - 33^2 + 4 \\ &= (2x + 33)^2 - 33^2 + 4 \end{aligned}$$

bzw.

$$(2x + 33)^2 - (2n)^2 = 33^2 - 4 = (33 - 2)(33 + 2) = 31 \cdot 35.$$

Das bedeutet aber, dass das Paar $(a, b) = (2x + 33, 2n)$ eine Lösung der Gleichung $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2 = 5 \cdot 7 \cdot 31$ ist.

Es gibt jedoch bis auf die Reihenfolge nur die folgenden acht Möglichkeiten, $5 \cdot 7 \cdot 31$ als Produkt zweier ganzer Zahlen zu schreiben: $1 \cdot (5 \cdot 7 \cdot 31)$, $5 \cdot (7 \cdot 31)$, $7 \cdot (5 \cdot 31)$, $31 \cdot (5 \cdot 7)$, $(-1) \cdot (-5 \cdot 7 \cdot 31)$, $(-5) \cdot (-7 \cdot 31)$, $(-7) \cdot (-5 \cdot 31)$ und $(-31) \cdot (-5 \cdot 7)$.

Jede dieser Zerlegungen kann man auf zwei Arten auf die beiden Faktoren $(a - b)$ und $(a + b)$ verteilen. Da jedoch

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(a - 33) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}((a - b) + (a + b)) - 33 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}((a + b) + (a - b)) - 33 \right) \end{aligned}$$

gilt, liefern beide Möglichkeiten dasselbe x , so dass es dementsprechend auch höchstens folgende acht x gibt, für die der gegebene Wurzelausdruck eine natürliche Zahl sein kann: 255, 39, 24, 0, -288, -72, -57 und -33.

Eine kurze Probe durch Einsetzen in den gegebenen Ausdruck zeigt, dass diese x auch tatsächlich Lösungen sind.

Es gibt also genau acht ganzzahlige x der gesuchten Art.

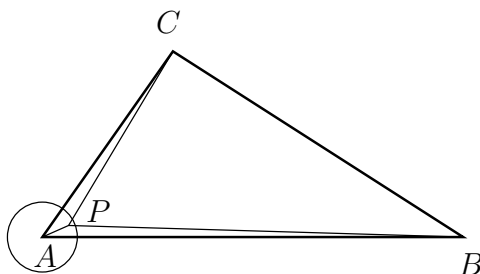
L 33.3 Aus drei Strecken mit den Längen a, b und c mit $a \geq b \geq c$ kann man genau dann ein Dreieck zusammensetzen, wenn $a < b + c$ gilt. Es reicht also für den ersten Aufgabenteil, diese Ungleichung nachzuweisen.

Sei P ein Punkt im Inneren von ABC . Durch Tausch der Bezeichnungen kann man erreichen, dass $\overline{PA} \geq \overline{PB}$ und $\overline{PA} \geq \overline{PC}$ gilt. Weiter gilt dann

$$\overline{PA} < \overline{BA} = \overline{BC} < \overline{BP} + \overline{PC}.$$

Hierbei folgt die erste Ungleichung aus der Tatsache, dass das Dreieck ABC vollständig im Kreis um A mit Radius $\overline{AB}$ liegt und die zweite Ungleichung folgt mit der im Dreieck BCP gültigen Dreiecksungleichung, und damit gilt die gesuchte Ungleichung.

Wenn ABC nicht gleichseitig ist, stimmt die Aussage nicht mehr. Wiederum durch Vertauschen der Bezeichnungen können wir erreichen, dass $\overline{AB} > \overline{AC}$ gilt. Sei $r = (\overline{AB} - \overline{AC})/3$ und sei P ein Punkt in der Schnittmenge des Inneren von ABC und des Inneren des Kreises mit Radius r um A .



Dann ist (mit mehrmaliger Anwendung der Dreiecksungleichung in verschiedenen

Variationen)

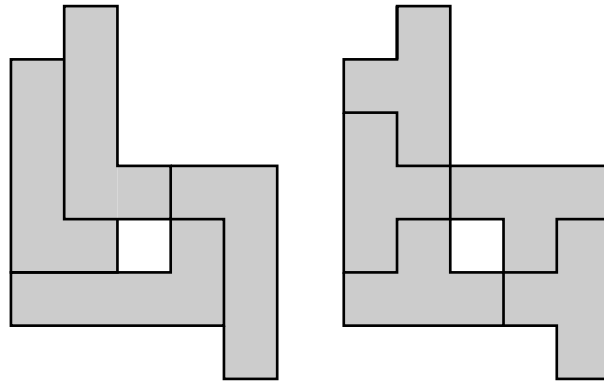
$$\begin{aligned}\overline{PA} + \overline{PC} &< \overline{PA} + \overline{PA} + \overline{AC} < 2r + \overline{AC} \\ &= \overline{AB} - r && \text{nach Wahl von } r \\ &< \overline{AB} - \overline{PA} < \overline{PB}.\end{aligned}$$

Somit kann aus den Strecken PA, PB und PC kein Dreieck gebildet werden.

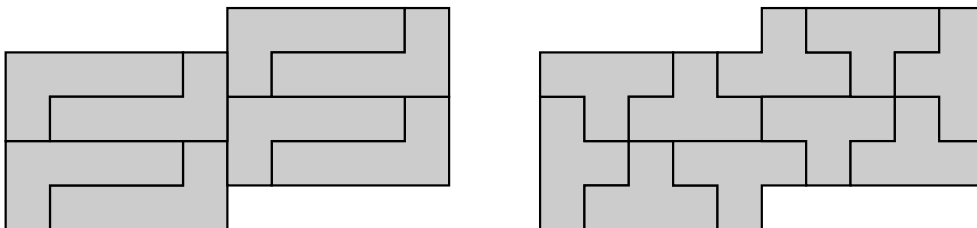
L 33.4 Da sich die gesuchte Fläche vollständig mit Fliesen der Form „T“ auslegen lässt, muss ihre Maßzahl (in Einheitsquadraten) durch 4 teilbar sein. Genauso folgt aus der Tatsache, dass man die Fläche vollständig mit „L“-Fliesen pflastern kann, dass die Maßzahl ein Vielfaches von 5 sein muss.

Zusammen folgt daher, dass die Fläche mindestens $\text{kgV}(4, 5) = 20$ Einheitsquadrate groß sein muss.

Eine solche Fläche mit genau 20 Einheitsquadraten gibt es auch, wie folgende Abbildung verdeutlicht:



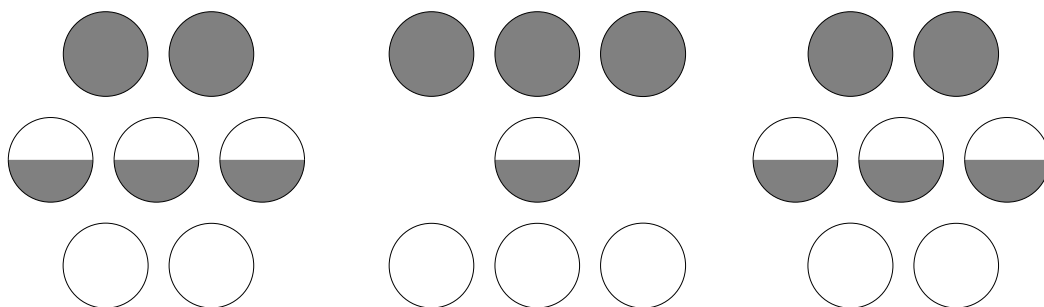
Bemerkung: Anscheinend gibt es keine solche Fläche mit 20 Einheitsquadraten, die kein „Loch“ hat. So etwas gibt es dann aber für 40 Einheitsquadrate, wie in der nächsten Abbildung dargestellt.



Lösungen zu Aufgabenblatt 34

L 34.1 Ja, das ist möglich.

Folgende Abbildung verdeutlicht eine der beiden Varianten:



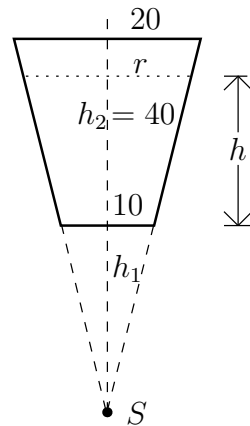
Zwei Piraten bekommen je zwei volle, drei halb volle und zwei leere Fässer, der dritte bekommt drei volle, ein halb volles und drei leere. Damit erhält jeder dreieinhalb Fässer Rum und insgesamt sieben Fässer.

Bemerkung: Die andere Möglichkeit wäre, dass zwei der Piraten je drei volle, ein halb volles und drei leere Fässer bekommen und der dritte ein volles, fünf halb volle und ein leeres.

Dass es keine anderen Möglichkeiten gibt, kann man sich so verdeutlichen: Insgesamt gibt es $7 + 7 \cdot 1/2 = 10,5 = 3 \cdot 3,5$ Fässer Rum, für jeden also dreieinhalb. Keiner darf demnach mehr als drei volle Fässer bekommen. Andererseits muss mindestens einer genau drei Fässer bekommen, ansonsten würden nicht alle sieben vollen Fässer verteilt werden. Dieser eine muss dann noch ein halb volles Fass erhalten (um genau seine dreieinhalb Fässer Rum zu bekommen) und noch drei leere, um auf sieben Fässer zu kommen. Für die Verteilung der weiteren vollen Fässer auf die beiden anderen Piraten gibt es dann noch genau die beiden Möglichkeiten 3:1 bzw. 2:2. Daraus ergeben sich dann die Anzahlen der halb vollen und leeren Fässer zwingend aus den Vorgaben.

L 34.2 Der Übersichtlichkeit halber lassen wir alle Einheitenangaben weg; wir rechnen durchweg in Zentimetern.

Das linke, schrägbewandete Gefäß hat folgenden Querschnitt:



Nach dem Strahlensatz mit Zentrum S gilt

$$\begin{aligned} \frac{h_1 + h_2}{20} &= \frac{h_1}{10} \\ \Leftrightarrow 10h_2 &= 10h_1 \\ \Leftrightarrow h_1 &= h_2 = 40. \end{aligned}$$

Ist das Gefäß bis zur Höhe h gefüllt, hat die Flüssigkeit nach demselben Strahlensatz an der Oberfläche den Radius

$$r = \frac{10(h + h_1)}{h_1} = \frac{10(h + 40)}{40} = \frac{1}{4}(h + 40)$$

und damit hat die eingefüllte Boule das Volumen (nach der bekannten Formel $V = \frac{\pi}{3}R^2H$ für das Volumen eines Kegels)

$$\begin{aligned} V_{\text{li}} &= \frac{\pi}{3} \left(\frac{1}{4}(h + 40) \right)^2 (h + 40) - \frac{\pi}{3} 10^2 \cdot 40 \\ &= \frac{\pi}{48} ((h + 40)^3 - 64000) \\ &= \frac{\pi}{48} (h^3 + 120h^2 + 4800h). \end{aligned} \quad (34.1)$$

Das rechte, zylindrische Gefäß enthält bei Befüllung bis zur Höhe h Boule im Volumen von

$$V_{\text{re}} = \pi \cdot h \cdot 15^2. \quad (34.2)$$

Nach Voraussetzung sollen die beiden Volumina (34.1) und (34.2) gleich sein, es gilt also

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{48} (h^3 + 120h^2 + 4800h) &= \pi \cdot 225h \\ \Leftrightarrow h^3 + 120h^2 + 4800h - 10800h &= 0 \\ \Leftrightarrow h(h^2 + 120h - 6000) &= 0. \end{aligned}$$

Die Nullstellen dieser Gleichung sind $h_1 = 0$, $h_2 = -60 + \sqrt{9600}$ und $h_2 = -60 - \sqrt{9600}$. Da die Gefäße nicht leer sein sollen, ist nur $h_2 = -60 + \sqrt{9600} \approx 37,98$ eine sinnvolle Lösung; dies ergibt für die Gesamtmenge an Bowle:

$$2 \cdot V_{\text{re}} = 2\pi \cdot h_2 \cdot 15^2 \approx 53692 \text{ cm}^2 \approx 53,7 \ell.$$

L 34.3 Ja, das kann sie. Hierzu kann sie sich zum Beispiel Folgendes überlegen. Wenn die vier gegebenen Zahlen a, b, c, d waren, dann sind die sechs gesuchten Produkte folgende: ab, ac, ad, bc, bd, cd .

Jessica weiß nun zwar nicht, welche fünf der sechs Produkte sie auf ihrem Zettel hat, aber sie weiß, dass man alle sechs Produkte in drei Paare (ab, cd) , (ac, bd) und (ad, bc) aufteilen kann, wobei das Produkt der beiden Zahlen in jedem Paar gleich $abcd$ ist. Auch wenn, wie im vorliegenden Fall, eines der sechs Produkte fehlt, muss sie also unter den übrigen fünf Produkten wenigstens zwei Paare von Zahlen finden, deren Produkt dasselbe (nämlich $abcd$) ist.

Nun bildet Jessica schnell alle Produkte von jeweils zwei der Zahlen 2, 3, 4, 5, 6. Das sind $2 \cdot 3 = 6$, $2 \cdot 4 = 8$, $2 \cdot 5 = 10$, $2 \cdot 6 = 12$, $3 \cdot 4 = 12$, $3 \cdot 5 = 15$, $3 \cdot 6 = 18$, $4 \cdot 5 = 20$, $4 \cdot 6 = 24$ und $5 \cdot 6 = 30$. Da nur die Zahl 12 mehr als einmal, nämlich genau zweimal vorkommt, weiß Jessica, dass $abcd = 12$ sein muss, und darüber hinaus weiß sie, dass zwei der oben erwähnten Paare (2, 6) und (3, 4) sind. Das dritte Paar enthält das fehlende Produkt p und die Zahl 5. Da $p \cdot 5 = abcd = 12$ gelten muss, kann Jessica zu guter Letzt schließen, dass $p = \frac{12}{5}$ sein muss.

Übrigens gibt es (bis auf die Reihenfolge) genau vier Möglichkeiten für die vier Zahlen a, b, c, d , welche zu den sechs Produkten 2, $\frac{12}{5}$, 3, 4, 5, 6 führen. Das sind $\frac{1}{5}\sqrt{30}$, $\frac{1}{3}\sqrt{30}$, $\frac{2}{5}\sqrt{30}$, $\frac{1}{2}\sqrt{30}$ und $\frac{2}{5}\sqrt{10}$, $\frac{1}{2}\sqrt{10}$, $\frac{3}{5}\sqrt{10}$, $\sqrt{10}$ sowie die beiden Möglichkeiten, die man durch Vorzeichenumkehr aus diesen beiden erhält.

L 34.4 Die ursprüngliche Tafel sei mit T bezeichnet. An einer zweiten Tafel T' sollen zu Beginn die Zahlen $1 + 1, \frac{1}{2} + 1, \frac{1}{3} + 1, \dots, \frac{1}{2004} + 1$ stehen. Außerdem sei vereinbart: Wenn man einen Schritt an T mit den Zahlen a und b ausführt, muss man an T' die beiden Zahlen $a + 1$ und $b + 1$ wegwischen und dafür ihr Produkt $(a + 1)(b + 1)$ anschreiben.

Dies ist stets möglich, denn wir zeigen im Folgenden: Zu jedem Zeitpunkt stehen an Tafel T' genau die Zahlen, die man aus den Zahlen von T durch Addition von 1 erhält.

Zu Beginn ist dies sicherlich der Fall.

Wählt man vor einem Schritt die Zahlen a, b an T aus, so gibt es also an T' die Zahlen $a + 1$ und $b + 1$. Nach dem Schritt steht statt a und b an T jetzt $ab + a + b$. An T' steht statt $a + 1$ und $b + 1$ nach dem Schritt aber $(a + 1)(b + 1) = (ab + a + b) + 1$. Damit ist die Aussage bewiesen.

Da es bei der Multiplikation reeller Zahlen nicht auf deren Reihenfolge ankommt,

steht nach 2003 Schritten an T' die Zahl

$$\begin{aligned} N' &= (1+1) \cdot \left(\frac{1}{2} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{3} + 1\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{2004} + 1\right) \\ &= \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{2005}{2004} \\ &= 2005. \end{aligned}$$

Also steht an der ursprünglichen Tafel T am Ende in jedem Fall die Zahl $N = N' - 1 = 2004$.

Lösungen zu Aufgabenblatt 35

L 35.1 Ein Jahr mit 365 Tagen besteht aus 52 Wochen plus einem einzelnen Tag, denn es ist $365 = 7 \cdot 52 + 1$. Das bedeutet, dass sich der Wochentag eines fest gegebenen Datums beim Übergang zum folgenden Jahr um einen Tag nach hinten verschiebt. Nach sieben Jahren ohne Schalttag(e) ist man also genau wieder bei demselben Wochentag wie zu Anfang.

Kommt ein Schalttag hinzu, verschiebt sich der Wochentag um einen weiteren Tag nach hinten, weil dieser Tag ebenfalls „überzählig“ ist. Das kommt nach unserem Kalender maximal einmal in vier bzw. somit maximal zweimal in sieben Jahren vor. Um nach sieben Jahren aber auf demselben Wochentag zu landen, braucht man eine durch sieben teilbare Zahl an Schalttagen. Dies ist nach obigen Überlegungen nur möglich, wenn es in den sieben Jahren gar keinen Schalttag gab. Normalerweise ist ja alle vier Jahre ein Schalttag eingefügt, aber alle 100 (jedoch nicht alle 400) Jahre fällt dieser nach dem Gregorianischen Kalender aus. Da wir davon ausgehen können, dass der älteste Deutsche nicht über 200 Jahre alt ist, muss er um das Jahr 1900 herum geboren worden sein, und zwar nach dem letzten Schalttag davor (1896), und seinen siebten Geburtstag muss er im Sommer vor dem ersten Schalttag nach 1900 (der war 1904) gefeiert haben, also im Sommer 1903 oder früher, also wurde er 1896 oder früher geboren. Beides zusammen ergibt, dass er im Sommer 1896 geboren worden sein muss. Demnach war er beim Interview 107 Jahre alt.

L 35.2 Wir nehmen natürlich an, dass das Puzzle eine gewöhnliche Form hat, d. h. dass es eindeutige Zeilen und Spalten gibt.

Dann sei s die Anzahl an Spalten und z die Anzahl an Zeilen. Das Puzzle hat damit $s \cdot z$ Teile, und der Rand hat $2s + 2z - 4$ Teile (die Ecken dürfen nicht doppelt gezählt werden).

Nach den genannten zwei Stunden des Puzzelns gilt also:

$$25 \cdot (2s + 2z - 4) = sz, \quad (35.1)$$

und umgeformt ergibt das (für $s \neq 50$):

$$z = \frac{50(s - 2)}{s - 50}.$$

Wenn man mit der Differentialrechnung vertraut ist, kann man nun das Produkt sz als Funktion von s auffassen und mit Hilfe der Ableitungen das Minimum der Funktion finden. Wir zeigen aber lieber, wie es auch ohne diese Theorie geht:

Zunächst ist festzustellen, dass $s > 50$ sein muss, denn für $50 > s \geq 2$ ist $z \leq 0$, und das ergibt genauso wenig Sinn wie $s = 1$. Für $s = 50$ (dadurch durften wir ja nicht

teilen) ergibt sich die Gleichung (35.1) zu $25 \cdot 96 + 50z = 50z \Leftrightarrow 25 \cdot 96 = 0$ und damit ein Widerspruch. Außerdem können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $s \leq z$ gilt. Ferner stellen wir fest, dass z umso kleiner wird, je größer s wird, denn für $x > 0, s > 50$ gelten die Äquivalenzen

$$\begin{aligned} & \frac{50(s-2)}{s-50} > \frac{50(s+x-2)}{s+x-50} \\ \Leftrightarrow & (s+x-50)(s-2) > (s+x-2)(s-50) \\ \Leftrightarrow & (s-50)(s-2) + x(s-2) > (s-50)(s-2) + x(s-50) \\ \Leftrightarrow & s-2 > s-50, \end{aligned}$$

und das Letztere ist eine wahre Aussage.

Schließlich sollen sowohl s als auch z ganzzahlig sein. Daher muss $s-50$ ein Teiler von $50(s-2)$ sein. Da ein Teiler von $s-2$ nur dann ebenso ein Teiler von $s-50$ sein kann, wenn er auch die Differenz $(s-2) - (s-50) = 48$ teilt, muss $s-50$ demnach unter den Teilern von $50 \cdot 48 = 2400 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^2$ zu finden sein. (Und wir können mit der Suche aufhören, sobald z kleiner als s wird.)

Für die Suche füllen wir also die folgende Tabelle aus:

$s-50$	$s-2$	s	z	sz
1	49	51	2450	124950
2	50	52	1250	65000
3	51	53	850	45050
4	52	54	650	35100
5	53	55	530	29150
6	54	56	450	25200
8	56	58	350	20300
10	58	60	290	17400
12	60	62	250	15500
15	63	65	210	13650
16	64	66	200	13200
20	68	70	170	11900
24	72	74	150	11100
25	73	75	146	10950
30	78	80	130	10400
32	80	82	125	10250
40	88	90	110	9900
48	96	98	100	9800
50	98	100	98	9800

Somit hat das Puzzle 9800 Teile und der Rand besteht aus 392 Teilen.

Einen noch raffinierteren Lösungsweg hat unser Teilnehmer Manuel Hohmann gefunden: Er bezeichnet die Gesamtanzahl an Teilen mit n , löst die Formel $sz = n$ nach $z = \frac{n}{s}$ auf und setzt dies in $n = 25 \cdot (2s + 2z - 4)$ ein. Damit erhält er für den Wert von s eine quadratische Gleichung mit Parameter n :

$$\begin{aligned} n &= 25 \cdot \left(2s + 2\frac{n}{s} - 4\right) \\ \Leftrightarrow \quad ns &= 50s^2 + 50n - 100s \\ \Leftrightarrow \quad s^2 - \frac{100+n}{50}s + n &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung hat die Lösungen

$$s_{1,2} = \frac{1}{100} \left(100 + n \pm \sqrt{10000 - 9800n + n^2} \right);$$

die beiden Werte müssen genau die beiden Kantenlängen liefern, weil ihr Produkt (vgl. Vieta!) n ist.

Für $2 \leq n \leq 9798$ ist $10000 - 9800n + n^2 < 0$, daher gibt es keine reelle Lösung. $n = 1$ scheidet offenbar als unsinnig aus und für $n = 9799$ ist $10000 - 9800n + n^2 = 201$ kein Quadrat einer ganzen Zahl, aber für $n = 9800$ ist $s = 98$ und $z = 100$ (oder umgekehrt). Damit muss dieses n das kleinstmögliche sein.

L 35.3 Ein Näherungsbruch, dessen Dezimaldarstellung bis zur zehnten Nachkommastelle mit der Dezimaldarstellung von $\sqrt{2}$ übereinstimmt, ist leicht gefunden, wenn man einen Taschenrechner zur Hand hat, der einem die zehn Nachkommastellen liefert: Mit

$$\sqrt{2} = 1,4142135623\dots$$

stimmt sicherlich

$$\frac{14142135623}{10000000000}$$

bis zur zehnten Nachkommastelle mit $\sqrt{2}$ überein.

Sehr befriedigend ist das allerdings noch nicht, weil Zähler und Nenner ja recht groß sind.

„Schönere“ Lösungen erhält man z.B. mit dem Heron-Verfahren: Zur Berechnung der Quadratwurzel der Zahl a wählt man zunächst einen Startwert x_0 , am einfachsten a selbst, und dann definiert man rekursiv

$$x_{n+1} := \frac{x_n + a/x_n}{2}.$$

Die Idee dahinter ist in aller Kürze, dass man sich den Wert x_n als eine Seitenlänge eines Rechtecks vorstellt, wozu man dann die andere Seitenlänge so bastelt, dass dessen Flächeninhalt gleich a ist (also a/x_n). Wäre das Rechteck ein Quadrat, hätte

man als Seitenlänge die Wurzel von a . Also sucht man ein neues Rechteck, dessen Seitenlängen näher beieinanderliegen als bei dem vorigen. Als eine Seitenlänge kann man nun am einfachsten den arithmetischen Mittelwert der beiden vorigen Seitenlängen nehmen. Das neue Rechteck ist garantiert näher an der Lösung dran, weil vorher die lange Seitenlänge zu lang und die kurze zu kurz war.

Man kann berechnen, dass dieses Verfahren „quadratisch konvergiert“, d. h. grob gesagt, dass sich die Zahl der richtigen Stellen in jedem Schritt mindestens verdoppelt. Es ist also ein recht schnelles Verfahren. Außerdem liefert es für einen rationalen Startwert offensichtlich auch nur rationale Näherungswerte. Für $x_0 = a = 2$ ergibt sich:

$$x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = \frac{17}{12}, \quad x_3 = \frac{577}{408}, \quad x_4 = \frac{665857}{470832}, \dots$$

Mit x_4 kann man bereits aufhören, denn die Differenz der beiden Kantenlängen und damit der maximale Fehler in der Näherung ist

$$\begin{aligned} \left| \frac{665857}{470832} - \frac{2}{\frac{665857}{470832}} \right| &= \frac{665857^2 - 2 \cdot 470832^2}{665857 \cdot 470832} = \frac{1}{665857 \cdot 470832} \\ &= \frac{1}{313506783024} < 10^{-11} \end{aligned}$$

und die Näherung

$$\frac{665857}{470832} = 1,4142135623746 \dots$$

hat an der elften Nachkommastelle weder eine Null noch eine Neun.

Falls sich jemand mit diesem Problem noch allgemeiner beschäftigen will, so sei an dieser Stelle noch das Stichwort *Kettenbruch* genannt; damit hat man ebenfalls ein brauchbares Hilfsmittel, um Näherungsbrüche mit kleinen Nennern, aber guter Näherung zu erhalten.

Dass es keinen Bruch mit einem Nenner $< 50\,000$ gibt, der $\sqrt{2}$ auf zehn Nachkommastellen genau annähert, erkennt man z. B. wie folgt:

Wir nehmen an, wir hätten so einen Bruch p/q mit $q < 50\,000$ und $|\sqrt{2} - p/q| < 10^{-10}$ (Letzteres ist ja sicherlich der Fall, wenn die ersten zehn Nachkommastellen übereinstimmen). Es gilt:

$$\left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right| \cdot \left| \sqrt{2} + \frac{p}{q} \right| = \left| 2 - \frac{p^2}{q^2} \right| = \frac{1}{q^2} |2q^2 - p^2| \geq \frac{1}{q^2}.$$

Die letzte Abschätzung erhält man dabei wie folgt: Wir können annehmen, dass p und q teilerfremd sind. Dann kann $2q^2 - p^2$ nicht null sein, denn sonst müsste 2 ein Teiler von p^2 sein, also auch von p . Damit wäre aber 4 ein Teiler von p^2 , mithin auch von $2q^2$, folglich wäre 2 ein Teiler von q^2 und von q . Das steht jedoch im Widerspruch zur Teilerfremdheit. Da aber mit Sicherheit $2q^2 - p^2$ eine ganze Zahl ist, muss ihr Betrag mindestens 1 sein.

Wegen $2\sqrt{2} \approx 2,828$ ist in jedem Fall $\sqrt{2} + p/q < 3$. Aus der vorigen Gleichungskette folgt damit nun:

$$|\sqrt{2} - \frac{p}{q}| \geq \frac{1}{3 \cdot q^2}.$$

Für $q < 50\,000$ hat der letzte Bruch den Wert

$$\frac{1}{3 \cdot 50\,000^2} = \frac{1}{7\,500\,000\,000} = \frac{4}{3} \cdot 10^{-10},$$

also kann die Näherung nicht so genau sein wie gefordert. Jonas hat sich verrechnet.

L 35.4 Der Lösungsweg wird zunächst allgemein beschrieben:

Gegeben seien drei Punkte A, B, C auf der Erdoberfläche durch ihren Längengrad ϕ und ihren Breitengrad θ (im Bogenmaß), wobei östliche Länge und nördliche Breite als positiv gerechnet werden.

Wir legen die Erde in ein kartesisches Koordinatensystem mit Ursprung im Mittelpunkt, die positive x -Achse gehe durch den Punkt $\phi = 0, \theta = 0$, die positive y -Achse durch $\phi = \pi/2, \theta = 0$ und die positive z -Achse gehe durch $\phi = 0, \theta = \pi/2$ (Nordpol). Man rechnet nach, dass dann

$$x_P = R \cos \theta_P \cos \phi_P, \quad y_P = R \cos \theta_P \sin \phi_P, \quad z_P = R \sin \theta_P \quad (35.2)$$

gilt, wobei R der Erdradius ist und P ein beliebiger Punkt auf der Erde.

Im Folgenden identifizieren wir Punkte mit ihren Ortsvektoren.

Alle Punkte, die von A und B im Raum gleich weit entfernt liegen, liegen auf der Ebene mit Normalenvektor $A - B$ durch den Punkt $\frac{1}{2}(A + B)$.

Alle Punkte, die von A und C im Raum gleich weit entfernt liegen, liegen auf der Ebene mit Normalenvektor $A - C$ durch den Punkt $\frac{1}{2}(A + C)$.

Die Punkte des Raumes, die von allen drei Punkten gleich weit entfernt liegen, liegen also auf der Schnittgeraden dieser beiden Ebenen, welche dann senkrecht sowohl auf $A - B$ als auch auf $A - C$ steht und durch den Ursprung geht (denn dieser liegt gleich weit entfernt von A, B, C). Diese Gerade hat also die Gleichung

$$g(t) = t \cdot (A - B) \times (A - C), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (35.3)$$

(Mit „ $\times$ “ wird das Kreuzprodukt im dreidimensionalen Vektorraum bezeichnet.) Die Gerade schneidet die Erdkugel genau zweimal, nämlich in

$$M_1 = \frac{(A - B) \times (A - C)}{|(A - B) \times (A - C)|} \quad \text{und} \quad M_2 = -M_1. \quad (35.4)$$

Hat man M_1 und M_2 bestimmt, erhält man Längen- und Breitengrade durch die Umkehrung zu (35.2), nämlich:

$$\theta_{M_1} = \arcsin(z_{M_1}/R), \quad \phi_{M_1} = \arctan(y_{M_1}/x_{M_1}) \quad (\pm\pi) \quad (35.5)$$

und analog für M_2 . Das $\pm\pi$ ist wegen der Uneindeutigkeit von $\arctan$ anzupassen, um das richtige Vorzeichen von x_{M_1} bzw. y_{M_1} zu erhalten.

Nun setzen wir konkret unsere Werte ein:

Wir rechnen mit $R = 1$, da der Wert von R offenbar keine Rolle für das Ergebnis spielt.

Ort	θ (Grad/Bogen)	ϕ (Grad/Bogen)
Washington	$38^\circ 54' / 0,678933$	$-77^\circ 2' / -1,344490$
Brasilia	$-15^\circ 46' / -0,275180$	$-47^\circ 55' / -0,836304$
Tokio	$35^\circ 42' / 0,623083$	$139^\circ 46' / 2,439390$

Ort	x	y	z
Washington	0,174625	-0,758399	0,627963
Brasilia	0,644995	-0,714248	-0,271720
Tokio	-0,619961	0,524526	0,583541

Mit diesen Orten als A, B, C (in dieser Reihenfolge), erhält man

$$(A - B) \times (A - C) = \begin{pmatrix} -0,470370 \\ -0,044151 \\ 0,899683 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,794586 \\ -1,282925 \\ 0,044422 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,152265 \\ 0,735770 \\ 0,638531 \end{pmatrix}$$

und

$$\left| \begin{pmatrix} 1,152265 \\ 0,735770 \\ 0,638531 \end{pmatrix} \right| = 1,508905,$$

also

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0,763643 \\ 0,487619 \\ 0,423175 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M_2 = -M_1. \quad (35.6)$$

Wegen

$$\arcsin(0,423175) = 0,43695 \cong 25^\circ 2'$$

und

$$\arctan(0,487619/0,763643) = 0,568279 \cong 32^\circ 34'$$

liegt M_1 also bei $25^\circ 2'$ nördlicher Breite und $32^\circ 34'$ östlicher Länge.

Analog sieht man, dass M_2 bei $25^\circ 2'$ südlicher Breite und $147^\circ 26'$ westlicher Länge liegt. M_1 liegt in Ägypten ziemlich direkt am Nil etwa zwischen Luxor und Idfu.

M_2 liegt mitten im Pazifik.

Also treffen sich die drei in Ägypten bei Luxor.

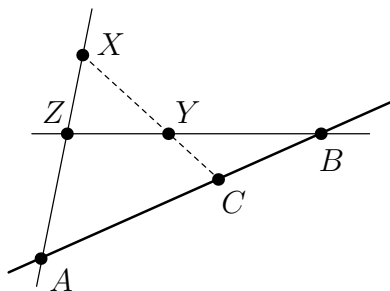
Bemerkung: Viele Einsender haben versucht, den gesuchten Ort zu bestimmen, indem sie in einem Atlas den Kreismittelpunkt des durch die drei Städte gegebenen Dreiecks bestimmten. Dies führt nicht zur richtigen Lösung.

Das liegt daran, dass die Erdoberfläche eine Kugeloberfläche ist, welche im Gegensatz zum ebenen Atlas eine Krümmung aufweist. Eine Konsequenz dieser Tatsache ist, dass in einem Atlas nie die wahren Abstände zwischen allen Orten wiedergegeben werden können.

Lösungen zu Aufgabenblatt 36

L 36.1 Da die Melone zu Beginn zu 99 Prozent aus Wasser besteht, enthält sie 1 Prozent an anderen (festen) Stoffen. Das entspricht 40 Gramm. Nach dem Verdunsten eines Teils des Wassers machen diese 40 Gramm entsprechend der Aufgabenstellung 2 Prozent der Gesamtmasse aus. Also wiegt die Melone dann nur noch $40 \cdot \frac{100}{2} = 2000$ Gramm. Die Melone verliert folglich insgesamt die Hälfte ihres Gewichts.

L 36.2 Der dritte Wächter kann jeden Punkt auf der Verbindungsstrecke zwischen den Positionen der ersten beiden Wächter wählen. Warum? Seien A und B die Positionen der ersten beiden Wächter und sei C ein Punkt auf deren Verbindungsstrecke. Sei weiter X irgendein Punkt des Raumes. Wenn man nun von C aus den Punkt X nicht sehen könnte, so gäbe es einen Punkt Y auf der Strecke CX , auf dem ein Hindernis liegt.



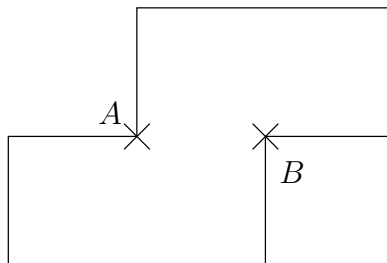
Andererseits sieht der Wächter bei A den gesamten Raum, also insbesondere auch X . Daher muss die gesamte Strecke AX im Raum verlaufen (d. h. hindernisfrei sein) und deswegen liegt auch insbesondere der Schnittpunkt Z der Geraden durch B und Y mit AX im Inneren des Raumes und es gibt dort kein Hindernis. Schließlich sieht auch der Wächter bei B alles, insbesondere auch Z , und somit müsste die gesamte Strecke BZ im Raum liegen, was der Lage von Y widerspräche.

Also gibt es keinen solchen Punkt Y und die gesamte Strecke CX ist von C aus frei einsichtig. Somit sieht der Wächter bei C jeden Punkt im Raum.

Anmerkungen: Einen Raum wie unseren Museumsraum, in dem es einen Punkt gibt, von dem aus man den gesamten Raum einsehen kann (oder anders formuliert: in dem jede Verbindungsstrecke von diesem Punkt zu einem anderen Punkt in diesem Raum komplett in dem Raum liegt), nennt man *sternförmig*.

Und mit unserem Beweis haben wir gezeigt, dass die Menge aller Punkte, von denen aus man den gesamten Raum einsehen kann, konvex ist. (Die Definition von *konvex* ist genau diejenige, dass zu je zwei Punkten einer Menge auch die Verbindungsstrecke zu der Menge gehört.)

Es gibt auch Beispiele, bei denen man den dritten Wächter auf keinen anderen Ort als die Strecke zwischen den beiden anderen Wächtern stellen kann:



L 36.3 Es ist $2048 = 2^{11}$, und das bedeutet, dass man elfmal den dritten binomischen Satz anwenden und damit zwölf Faktoren erhalten kann:

$$\begin{aligned}
 3^{2048} - 1 &= (3^{1024} + 1)(3^{1024} - 1) \\
 &= (3^{1024} + 1)(3^{512} + 1)(3^{512} - 1) \\
 &= (3^{1024} + 1)(3^{512} + 1)(3^{256} + 1)(3^{256} - 1) \\
 &\dots \\
 &= (3^{1024} + 1)(3^{512} + 1)(3^{256} + 1)(3^{128} + 1)(3^{64} + 1)(3^{32} + 1) \\
 &\quad \cdot (3^{16} + 1)(3^8 + 1)(3^4 + 1)(3^2 + 1)(3^1 + 1)(3^1 - 1).
 \end{aligned}$$

Damit ist man allerdings noch nicht fertig, da wir die Existenz von zwölf *verschiedenen* Primfaktoren in der Zerlegung zeigen sollen. Deswegen zeigen wir jetzt, dass diese Faktoren paarweise 2 als größten gemeinsamen Teiler (ggT) haben. Für diesen Zweck seien $r > s$ zwei natürliche Zahlen. Es ist

$$\begin{aligned}
 3^{2^r} + 1 &= 3^{2^r} - 1 + 2 \\
 &= (3^{2^{r-1}} + 1)(3^{2^{r-1}} - 1) + 2 \\
 &\dots \\
 &= (3^{2^{r-1}} + 1)(3^{2^{r-2}} + 1) \dots (3^{2^s} + 1)(3^{2^s} - 1) + 2,
 \end{aligned}$$

also ein Vielfaches von $(3^{2^s} + 1)$ zuzüglich 2. Somit muss der ggT von $3^{2^r} + 1$ und $3^{2^s} + 1$ ein Teiler von 2 sein. Da $(3^{2^t} + 1)$ offenbar für jedes ganze $t \geq 0$ gerade ist, ist der ggT genau 2.

Da $3^1 - 1 = 2$ gilt, ist auch $\text{ggT}(3^{2^r} + 1, 3^1 - 1) = 2$ für $r \geq 1$.

Da jeder Faktor $3^{2^r} + 1$ mit $r \geq 0$ größer als 2 ist, liefert folglich jeder dieser elf Faktoren (mindestens) einen „eigenen“ Primfaktor zu der Zerlegung. Leider liefert $3^1 + 1 = 2 \cdot 2$ auf diese Weise nur den Faktor 2; damit kann man den Faktor 2, der ja ansonsten noch vorkommt und außerdem der einzige Teiler von $3^1 - 1$ ist, nicht zusätzlich nutzen. Wir brauchen also noch einen weiteren Primfaktor. $3^4 + 1 = 2 \cdot 41$

hilft nicht weiter, aber es ist $3^8 + 1 = 6562 = 2 \cdot 17 \cdot 193$ und somit haben wir mindestens zwölf verschiedene Primfaktoren.

Um exakt herauszufinden, wie viele (verschiedene) Primfaktoren die Zahl hat, bedarf es wohl schwerer Geschütze und einiger Rechenzeit. So viel Zeit und Geduld hatten wir dann auch nicht ... Immerhin hat *Mathematica* sehr schnell herausgefunden, dass die Faktoren $(3^{128} + 1)/2$ bis $(3^{1024} + 1)/2$ keine Primzahlen sind. $(3^{16} + 1)/2$ bis $(3^{64} + 1)/2$ sind Primzahlen und *Pari* hat uns dann noch in angemessener Zeit verraten, dass $(3^{128} + 1)/2$ fünf verschiedene Primfaktoren besitzt, deren kleinster 257 ist.

L 36.4 Da man im ersten Jahr nur eine Eisenbahnstrecke von 1571 km Länge bauen kann, müssen wir zeigen, dass es unter den fünf Städten auf Kappa zwei gibt, die einen Abstand von höchstens 1571 km haben. (Dabei ist mit dem Abstand natürlich derjenige auf der Kugeloberfläche gemeint.) Da wir jedoch nicht wissen, wo die Städte auf Kappa liegen, müssen wir zeigen, dass es bei jeder Anordnung ein Paar von Städten mit Abstand höchstens 1571 km gibt.

Wir beweisen dieses indirekt, indem wir das Gegenteil annehmen und zum Widerspruch führen. Das Gegenteil bedeutet hier: Wir gehen davon aus, dass die fünf Städte so auf Kappa verteilt sind, dass je zwei von ihnen mehr als 1571 km voneinander entfernt sind.

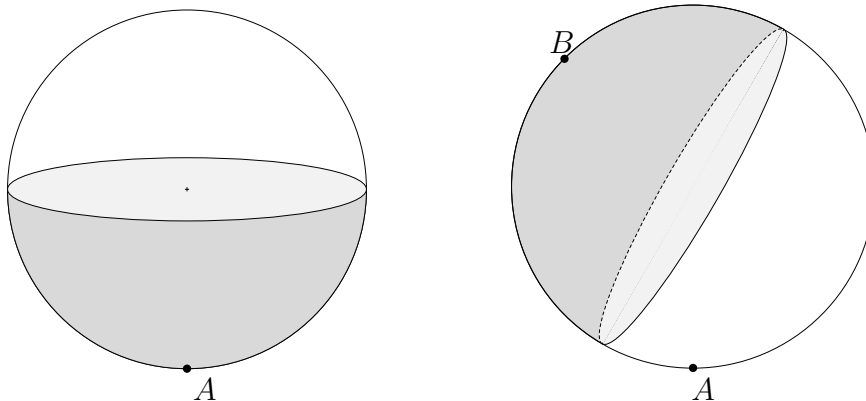
Da Kappa einen Radius von 1000 km hat, beträgt sein Umfang

$$2\pi \cdot 1000 \text{ km} = 6283,18 \dots \text{ km} < 6284 \text{ km} = 4 \cdot 1571 \text{ km}.$$

Mit den Geldmitteln im ersten Jahr kann man also ein Viertel des Umfangs und ein klein wenig mehr mit Eisenbahnschienen bebauen.

Indem wir gegebenenfalls die Kugel drehen, können wir davon ausgehen, dass die erste Stadt *A* „unten“, also auf dem Südpol liegt. Alle Punkte auf dem Äquator haben dann einen Abstand von weniger als 1571 km zu dieser Stadt, und alle Punkte auf der Südhalbkugel haben noch kleineren Abstand.

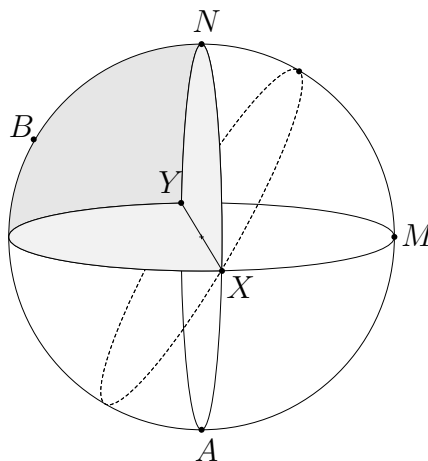
Daher liegen gemäß unserer Annahme alle anderen vier Städte auf der Nordhalbkugel.



Sei B eine Stadt auf der Nordhalbkugel. Auch sie definiert eine Halbkugel, auf der keine weitere Stadt liegen kann.

Falls die Stadt B direkt auf dem Nordpol liegt, so kann sich auch auf der Nordhalbkugel keine weitere Stadt mehr befinden, auf Kappa lägen insgesamt also nur die zwei Städte A und B , was nicht sein kann.

Aber egal, wo B auf der Nordhalbkugel liegt, die Halbkugel mit Zentrum B enthält immer den Nordpol. Und da B nicht der Nordpol sein kann, hat diese Halbkugel auch ein Stück mit der Südhalbkugel gemeinsam. Seien X und Y die beiden Schnittpunkte der Halbkugelhänder. Da die Ränder jeweils maximal große Kreise (sogenannte Großkreise) auf der Kugeloberfläche sind, liegen sich die beiden Punkte genau gegenüber, d. h. sie teilen jeden der beiden Kreise in zwei gleich große Hälften. Da wir nicht wissen, auf welchem Grad nördlicher Breite die Stadt B liegt, wissen wir auch nicht, wie weit ihre Halbkugel über den Nordpol reicht, aber in jedem Fall darf keine weitere Stadt in derjenigen Hälfte der Nordhalbkugel liegen, die durch den halben Äquator von X bis Y und durch den Nordpol begrenzt wird.



Die andere Hälfte der Nordhalbkugel halbieren wir noch ein letztes Mal: Sei M der Mittelpunkt zwischen X und Y auf dem Äquator (der, der nicht auf der Halbkugel um B liegt). Dann teilt der Kreis durch den Südpol, den Nordpol und M die rechte Nordpolhälfte in zwei gleich große Teile (gekrümmte Dreiecke), auf denen die Eckpunkte X , M und N bzw. Y , M und N jeweils größtmöglichen Abstand von einem Viertelkugelumfang haben. Mit anderen Worten: Je zwei Punkte auf einem Dreieck haben einen geringeren Abstand als 1571 km.

Das bedeutet aber, dass in jedem der Dreiecke höchstens eine Stadt liegen kann. Aber dann gibt es nur vier Städte auf Kappa.

Da es auf Kappa jedoch fünf Städte gibt, erhalten wir einen Widerspruch. Die Annahme, dass alle Städte mindestens 1571 km auseinanderliegen, muss also falsch sein. Folglich gibt es (mindestens) zwei Städte auf Kappa, die höchstens 1571 km voneinander entfernt sind, und zwischen diesen können wir (oder die Kappaianer) schon im ersten Jahr eine Eisenbahnlinie bauen.

Lösungen zu Aufgabenblatt 37

L 37.1 Ist $n = 10a + b$ die Nummer eines Aufgabenblattes mit Einerziffer b und Zehnerziffer a , so steht das Blatt unter einem guten Stern, wenn es eine natürliche Zahl m so gibt, dass $n - ab = 10a + b - ab = m^2$ gilt.

Subtrahiert man in dieser Gleichung auf beiden Seiten 10, so erhält man:

$$m^2 - 10 = 10a + b - ab - 10 = (a - 1)(10 - b).$$

Hierbei gilt wegen $37 \leq n \leq 99$ auch $3 \leq a \leq 9$ und $0 \leq b \leq 9$ und deswegen

$$2 \leq a - 1 \leq 8 \text{ bzw. } 1 \leq 10 - b \leq 10.$$

Man erhält eine Lösung obiger Gleichung also genau dann, wenn man $m^2 - 10$ in ein Produkt aus einem ersten Faktor zwischen 2 und 8 und einem zweiten Faktor zwischen 1 und 10 zerlegen kann.

Insbesondere muss also $2 \leq m^2 - 10 \leq 80$ sein und daher auch $4 \leq m \leq 9$. Folgende Tabelle enthält die nun noch fehlenden Rechnungen:

m	$m^2 - 10$	erlaubte Produktdarstellungen	resultierende Paare
4	6	$6 \cdot 1, 3 \cdot 2, 2 \cdot 3$	$(7, 9), (4, 8), (3, 7)$
5	15	$5 \cdot 3, 3 \cdot 5$	$(6, 7), (4, 5)$
6	26	—	—
7	39	—	—
8	54	$6 \cdot 9$	$(7, 1)$
9	71	—	—

Somit werden noch genau fünf weitere Blätter unter einem guten Stern stehen, bevor das 100. Blatt erscheint, nämlich die Blätter 45, 48, 67, 71 und 79.

L 37.2 Es gibt verschiedene Tastenfolgen, die zu diesem Ergebnis führen. Eine Möglichkeit ist

$$\boxed{1/x} \quad \boxed{-1} \quad \boxed{1/x} \quad \boxed{+1} \quad \boxed{1/x} \quad \boxed{-1}.$$

Überprüfen wir, dass diese Tastenfolge die 7 tatsächlich in die -7 verwandelt:

$$\begin{aligned} 7 \quad \boxed{1/x} &\Rightarrow \frac{1}{7} \quad \boxed{-1} \Rightarrow \frac{1}{7} - 1 = -\frac{6}{7} \quad \boxed{1/x} \Rightarrow -\frac{7}{6} \\ -\frac{7}{6} \quad \boxed{+1} &\Rightarrow -\frac{7}{6} + 1 = -\frac{1}{6} \quad \boxed{1/x} \Rightarrow -6 \quad \boxed{-1} \Rightarrow -7. \end{aligned}$$

Auch bei 100 funktioniert die Abfolge:

$$100 \Rightarrow \frac{1}{100} \Rightarrow -\frac{99}{100} \Rightarrow -\frac{100}{99} \Rightarrow -\frac{1}{99} \Rightarrow -99 \Rightarrow -100.$$

In der Tat verwandelt die Tastenfolge fast jede Zahl n in ihr Negatives $-n$:

$$\begin{aligned} n \quad \boxed{1/x} &\Rightarrow \frac{1}{n} \quad \boxed{-1} \Rightarrow \frac{1}{n} - 1 = \frac{1-n}{n} \quad \boxed{1/x} \Rightarrow \frac{n}{1-n} \quad \boxed{+1} \Rightarrow \\ \frac{n}{1-n} + 1 &= \frac{1}{1-n} \quad \boxed{1/x} \Rightarrow 1-n \quad \boxed{-1} \Rightarrow (1-n) - 1 = -n. \end{aligned}$$

Und wieso verwandelt sie nur *fast* jede Zahl in ihr Negatives? Da man nicht durch 0 teilen kann, gibt es Probleme, wenn ein Zwischenergebnis die 0 ist und im nächsten Schritt $\boxed{1/x}$ ausgeführt werden müsste. Diese Taste drücken wir in unserer Tastenfolge insgesamt dreimal. Die Zahlen jeweils davor, die also nicht 0 sein dürfen, sind: n , $\frac{1-n}{n}$ und $\frac{1}{1-n}$. Daher muss man offensichtlich genau die Zahlen $n = 0$ und $n = 1$ ausschließen.

Also funktioniert unsere Tastenfolge für alle Zahlen außer für 0 und 1.

Anmerkung: Man kann auch zeigen, dass es keine derartige Tastenfolge gibt, die aus weniger als sechs Tastendrücken besteht.

L 37.3 Die Deckplatte des Tempels liegt genau dann stabil auf den Säulen, wenn ihr Schwerpunkt (also ihr Mittelpunkt) im Inneren des Dreiecks liegt, das von den Säulen (von oben betrachtet) aufgespannt wird. Werden die Ecken des Dreiecks wie üblich mit A , B und C und der Mittelpunkt der Deckplatte mit M bezeichnet, so ist das genau dann der Fall, wenn entweder A, B, C in dieser Reihenfolge im Gegenuhrzeigersinn angeordnet sind und jeder der drei orientierten Winkel $|\angle AMB|$, $|\angle BMC|$ und $|\angle CMA|$ kleiner als 180° ist oder wenn A, B, C in dieser Reihenfolge im Uhrzeigersinn angeordnet sind und jeder der drei orientierten Winkel $|\angle BMA|$, $|\angle CMB|$ und $|\angle AMC|$ kleiner als 180° ist.

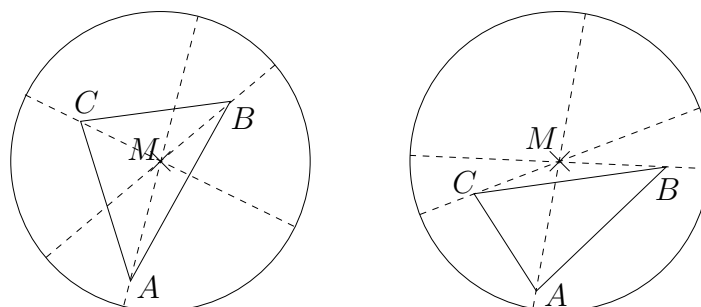
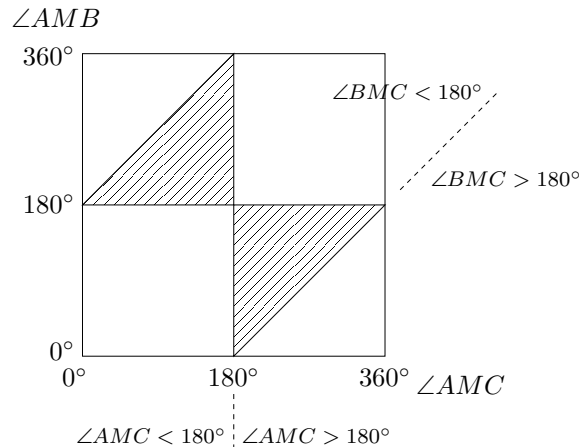


Abbildung 37.1: Stabiler und instabiler Fall

Den sich ergebenden „erfolgreichen Wertebereich“ macht man sich am einfachsten an einem Koordinatendiagramm klar:



Da die Säulen an jeden Ort mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gestellt werden und die Platte kreisrund ist, ist auch jeder Winkel gleich wahrscheinlich. Daher ist das Verhältnis der schraffierten Fläche zur Gesamtfläche gleich der gesuchten Wahrscheinlichkeit: nämlich $2/8=1/4$.

Anmerkung: Es läge durchaus nahe, in der folgenden Art zu argumentieren: Jeder Punkt des Dreiecks definiert einen ihn enthaltenden Durchmesser des Kreises. Wir sagen, dieser Punkt *trennt* (die beiden anderen Punkte), wenn die beiden anderen Punkte im Inneren von verschiedenen durch diesen Durchmesser gegebenen Hälften des Kreises liegen.

Wenn ein Punkt nicht trennt, liegt die Deckplatte nicht stabil. In diesem Fall gibt es noch einen weiteren der drei Punkte (nämlich den, der bezüglich des Winkels weiter von dem ersten entfernt ist), der nicht trennt.

Das heißt umgekehrt: Genau dann, wenn bereits zwei der drei Punkte *trennen*, ist der Tempelbau stabil. (Vgl. auch erste Skizze oben.)

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebig, aber fest gewählter Punkt trennt, beträgt, wie man schnell bestimmen kann, $1/2$. Also könnte man (jetzt unbegründet!) schließen, da ja zwei frei wählbare Punkte trennen müssen, dass die Wahrscheinlichkeit für einen stabilen Tempelbau $1/2 \cdot 1/2 = 1/4$ ist, und hat damit das richtige Ergebnis gefunden.

Damit man so argumentieren darf, muss man allerdings zeigen, dass die beiden Wahrscheinlichkeiten *stochastisch unabhängig* sind. Das heißt, dass das Eintreten des ersten Ereignisses (der erste Punkt trennt) die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des zweiten (der zweite Punkt trennt) nicht verändert. Das ist in der Tat möglich, z. B. auf eine ähnliche Weise, wie oben das Gesamtergebnis hergeleitet wurde(!). Die stochastische Unabhängigkeit ist aber nicht so offensichtlich, wie man zunächst annehmen mag, denn auch wenn im Falle des Trennens des ersten Punktes die beiden anderen Punkte noch viele verschiedene Lagen einnehmen können, so sind es ja nicht mehr alle möglichen.

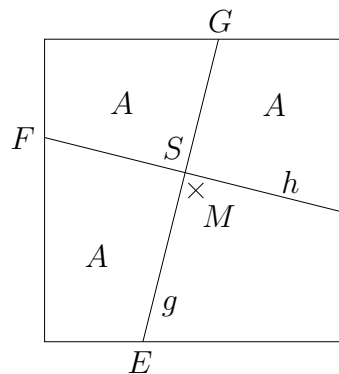
Zur „Abschreckung“ sei darauf hingewiesen, dass man ja auch sagen könnte, dass der Tempelbau genau dann gelingt, wenn die Bedingung für alle *drei* Punkte erfüllt ist;

dies würde zu einer Wahrscheinlichkeit von $(1/2)^3 = 1/8$ führen, was offensichtlich falsch ist.

Wir haben hier also den Fall, dass die drei Ereignisse „Der erste/zweite/dritte Punkt trennt“ paarweise stochastisch unabhängig sind, aber nicht alle drei zusammen.

Dass die genannten Ereignisse zumindest paarweise stochastisch unabhängig sind, liegt auch wesentlich daran, dass die Säulen auf der gesamten Kreisscheibe mit gleicher Wahrscheinlichkeit verteilt werden. Denn wenn man sie beispielsweise nur in eine Hälfte stellen wollte, so wäre die Wahrscheinlichkeit, dass ein fest gewählter Punkt trennt, immer noch nicht null (sondern $1/3$), aber man könnte trotzdem offensichtlich keinen stabilen Tempel mehr bauen.

L 37.4 Die eine Grenzlinie sei mit g , die andere mit h , und die Größe der drei gleich großen Beete sei mit A bezeichnet. Durch Drehen der Betrachtung und ggf. Tauschen der Bezeichnungen kann man in jedem Fall erreichen, dass zwei der gleich großen Beete links von g liegen und das obere dieser beiden sowie das dritte oberhalb von h (vgl. Skizze).



M sei der Mittelpunkt des Quadrats.

Die Strecke g teilt also das Quadrat so, dass der linke Teil die Größe $2A$ hat; ebenso teilt h das Quadrat so, dass der obere Teil dieselbe Größe hat.

Nun werde g um 90° mit dem Uhrzeigersinn um M gedreht, es entsteht die Strecke g' . Weil das Quadrat drehsymmetrisch ist, teilt g' es nun wiederum so in zwei Teile, dass der (nun) obere Teil die Größe $2A$ hat. Außerdem liegt g' parallel zu h , das dieselben Eigenschaften hat. Da aber offensichtlich jedes Verschieben von h in vertikaler Richtung die Größe der oberen Fläche verändert, muss $g' = h$ sein.

Jetzt betrachten wir die Strecke SF . Sie teilt den linken, durch g begrenzten Teil in zwei gleich große Teile. Da bei Drehung um M um 90° im Uhrzeigersinn g auf h abgebildet wird, muss das Abbild von SF unter dieser Drehung den Teil oberhalb von h in zwei gleich große Teile teilen. Es ist außerdem senkrecht zu h . Nach Voraussetzung hat auch SG diese Eigenschaften, und es ist wiederum klar, dass diese Strecke die einzige solche Strecke ist. Demnach wird die Strecke SF bei der betrachteten Drehung um 90° um M auf die Strecke SG und dabei der Punkt S auf sich selbst

abgebildet, was nur im Fall $S = M$ möglich ist. Damit ist allerdings die gesamte Unterteilung drehsymmetrisch (um Vielfache von 90°), womit alle vier Beete gleich groß sein müssen.

Anmerkung: In der Skizze sind alle Beete als Vierecke gezeichnet worden. Theoretisch sind auch Drei- und Fünfecke denkbar (wobei tatsächlich nur in einem Fall keine Vierecke, sondern dann Dreiecke auftreten), das ist aber für die Argumentation im Beweis egal.

Lösungen zu Aufgabenblatt 38

L 38.1 Die folgende Lösung stammt von Julia:

Jede Sekunde erhöht sich die Zahl der Bakterien um 1, nach 172800 Sekunden sind also genau 172801 Bakterien im Reaktor. Ein Tag hat $24 \cdot 60 \cdot 60 = 86400$ Sekunden; 172800 Sekunden sind also genau zwei Tage. Nach einem Tag enthält der Reaktor 86401 Bakterien, von denen sich aber innerhalb des nächsten Tages höchstens 86400 teilen können. Folglich ist danach mindestens ein Bakterium mindestens einen Tag alt.

L 38.2 Sei n eine zweistellige Zahl. Wenn man vor n ihr Doppeltes schreibt, ergibt sich die Dezimaldarstellung der Zahl $m = 2n \cdot 100 + n$. Nun gilt $m = 2n \cdot 100 + n = 201 \cdot n$. Da $201 = 3 \cdot 67$ teilerfremd zu 29 ist, ist m genau dann durch 29 teilbar, wenn n durch 29 teilbar ist. Damit ergeben sich genau folgende drei Möglichkeiten für m : 5829, 11658, 17487.

Ist n nun eine dreistellige Zahl, so ergibt sich die Zahl, die man erhält, wenn man vor n ihr Doppeltes schreibt, als $m = 2n \cdot 1000 + n = 2001 \cdot n$. Es ist aber $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$. Also sind alle so gebildeten Zahlen m durch 29 teilbar.

L 38.3 Sei $a = 10$ m die Seitenlänge des Rasenquadrates. Die Schafe seien mit X, Y, Z bezeichnet und der Rasen werde durch die jeweiligen Weidegebiete (und einen zusätzlich eingezeichneten Viertelkreis) in Teilgebiete mit den Flächeninhalten A, B und C unterteilt (siehe Abbildung 38.1).

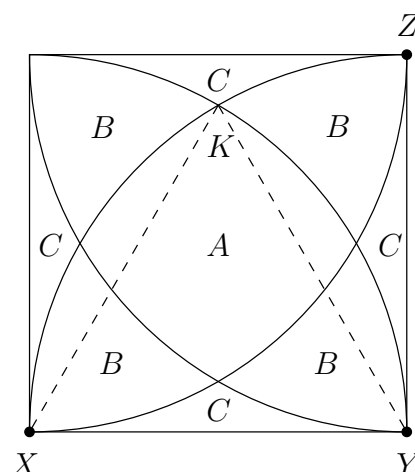


Abbildung 38.1: Die drei Schafe

Dann weiden die Schafe X und Z jeweils die Fläche der Größe A zu einem Drittel, ein Stück der Größe B (das bei Schaf Y) ebenfalls zu einem Drittel, zwei Stücke der Größe B zur Hälfte, ein Stück der Größe C zur Hälfte und eines der Größe C vollständig ab. Dies entspricht also einem Rasenanteil von

$$\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + 2 \cdot \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C + C = \frac{1}{3}A + \frac{4}{3}B + \frac{3}{2}C.$$

Genauso sieht man, dass Schaf Y einen Anteil von

$$\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + 2 \cdot \frac{1}{2}B + 2 \cdot \frac{1}{2}C = \frac{1}{3}A + \frac{4}{3}B + C$$

erhält. Wir wissen nun zunächst, dass

$$A + 4B + 4C = a^2 \quad (38.1)$$

gilt, denn alle Flächen zusammen ergeben den gesamten Rasen. Außerdem ist die Fläche jedes der auftretenden Viertelkreise gerade

$$A + 3B + 2C = \frac{\pi}{4}a^2. \quad (38.2)$$

Schließlich kann man die Fläche mit den Ecken X , Y und K , die von zwei Kreisbögen und einer Quadratseite begrenzt wird, betrachten. Ihre Fläche ist gerade $A + 2B + C$, und sie setzt sich zusammen aus dem gleichseitigen Dreieck XYK und zwei Kreisabschnitten, deren zugehörige Mittelpunktswinkel 60° groß sind. Ersteres hat eine Fläche von $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ und Letztere haben jeweils eine Fläche von $\frac{\pi}{6}a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ (die Fläche eines Sechstelkreises minus der Fläche eines gleichseitigen Dreiecks). Daher gilt:

$$A + 2B + C = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 2 \cdot \left(\frac{\pi}{6}a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \right) = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) a^2. \quad (38.3)$$

Mit den drei Gleichungen (38.1) bis (38.3) kann man nun zunächst die Rasenflächen A , B und C berechnen. Die Differenz der ersten beiden Gleichungen ergibt

$$B + 2C = \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \cdot a^2.$$

Die Differenz von Gleichung (38.2) und Gleichung (38.3) ergibt hingegen

$$B + C = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{12} \right) \cdot a^2. \quad (38.4)$$

Zieht man nun die letzten beiden Gleichungen voneinander ab, so erhält man

$$C = \left(1 - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \cdot a^2.$$

Setzt man diesen Ausdruck für C in die Gleichung (38.4) ein, so ergibt sich für B :

$$B = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12} - 1 \right) \cdot a^2.$$

Nun kann man noch Gleichung (38.1) benutzen, um A zu berechnen, und erhält

$$A = \left(1 + \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \right) \cdot a^2.$$

Diese Ausdrücke für A , B und C kann man jetzt in die Terme für die gesuchten Rasenanteile einsetzen und erhält:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}A + \frac{4}{3}B + \frac{3}{2}C &= \left(\frac{1}{3} \left(1 + \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \right) + \frac{4}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12} - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \right) \cdot a^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{36} - \frac{\sqrt{3}}{24} \right) \cdot a^2. \\ \frac{1}{3}A + \frac{4}{3}B + C &= \left(\frac{1}{3} \left(1 + \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \right) + \frac{4}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12} - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \right) \cdot a^2 \\ &= \left(\frac{\pi}{18} + \frac{\sqrt{3}}{12} \right) \cdot a^2. \end{aligned}$$

Also fressen die Schafe X und Z je einen Anteil von

$$\frac{1}{2} - \frac{\pi}{36} - \frac{\sqrt{3}}{24} \approx 0,3406 = 34,06 \%$$

und Schaf Y muss sich mit einem Anteil von

$$\frac{\pi}{18} + \frac{\sqrt{3}}{12} \approx 0,3189 = 31,89 \%$$

begnügen.

L 38.4

- a) Wenn $r = R$ ist, kann der Nordpol von k nur auf dem Südpol von K zu liegen kommen.

Um dies einzusehen, denke man sich zu jedem Zeitpunkt eine Ebene E , die die beiden Kugeln in ihrem momentanen Berührungspunkt berührt, die also tangential zu den beiden Kugeln ist. In Gedanken halten wir nun E fest, so dass beim Abrollen von k auf K beide Kugeln auf E rollen. Da die Kugeln gleich groß sind und E ständig im selben Punkt berühren, müssen sie bei diesem Abrollen aber die (bis auf Spiegelung an E) gleichen Bewegungen ausführen. Daher gilt auch: Liegt irgendwann der Nordpol von k auf E , so muss auch der Südpol von K auf E liegen. Das zeigt die Behauptung.

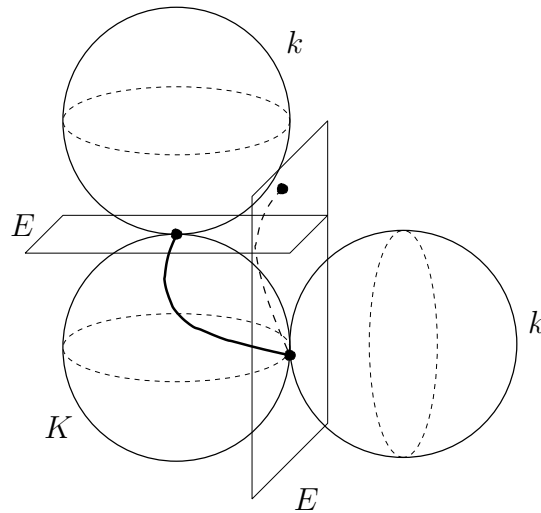


Abbildung 38.2: Gleich große Kugeln

- b) Sei nun $r < R$. In diesem Fall kann der Nordpol von k bei geeignetem Abrollen tatsächlich auf **jedem** Punkt der Oberfläche von K zu liegen kommen. Um dies zu beweisen, kann man folgende kleine Tatsache benutzen:

Behauptung: Ist α eine reelle Zahl mit $0 < \alpha < 1$, dann kann man eine natürliche Zahl n so finden, dass

$$\frac{1}{4} \leq n \cdot \alpha - \lfloor n \cdot \alpha \rfloor \leq \frac{3}{4}$$

gilt. Hierbei bezeichnet $\lfloor n \cdot \alpha \rfloor$ wie üblich die größte natürliche Zahl, die nicht größer als $n \cdot \alpha$ ist, so dass die Differenz $n \cdot \alpha - \lfloor n \cdot \alpha \rfloor$ gerade den Nachkommastellenanteil von $n \cdot \alpha$ wiedergibt.

Beweis der Behauptung: Wenn $\frac{1}{4} \leq \alpha \leq \frac{3}{4}$ ist, dann kann man einfach $n = 1$ nehmen.

Andernfalls gibt es zwei Fälle: Ist $\alpha < \frac{1}{4}$, dann wähle man die kleinste natürliche Zahl n , für die $n\alpha \geq \frac{1}{4}$ ist. Eine solche Zahl gibt es, weil die Folge der Zahlen $m \cdot \alpha$ unbeschränkt wächst.

Wir müssen zeigen, dass für dieses n auch $n\alpha \leq \frac{3}{4}$ gilt. Wäre aber $n\alpha > \frac{3}{4}$, so wäre wegen $\alpha < \frac{1}{4}$ auch $(n-1)\alpha > \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$ im Widerspruch zur Minimalität von n . Also ist $n\alpha < \frac{3}{4}$ und somit $n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor = n\alpha$ im geforderten Intervall.

Ist nun $\alpha > \frac{3}{4}$ so kann man $\alpha = 1 - \alpha'$ mit $0 < \alpha' < \frac{1}{4}$ schreiben. Wie eben findet man ein n so, dass $\frac{1}{4} \leq n\alpha' - \lfloor n\alpha' \rfloor \leq \frac{3}{4}$ gilt, und deswegen ist dann auch $n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor = -n\alpha' - \lfloor -n\alpha' \rfloor = 1 - (n\alpha' - \lfloor n\alpha' \rfloor)^1$, was demnach auch im gesuchten Intervall liegt.

Wir nennen einen Punkt auf K *erreichbar*, wenn der Nordpol von k bei geeignetem Abrollen auf diesem Punkt zu liegen kommt. Nun zeigen wir Folgendes:

Ist ein Punkt P auf K erreichbar, so sind auch alle Punkte der (abgeschlossenen) Halbkugel von K mit Mittelpunkt P erreichbar. Das ist die Menge aller Punkte, deren Abstand (alle Abstände auf der Oberfläche von K gemessen) von P maximal $\frac{\pi R}{2}$ ist.

Sei nämlich Q ein Punkt dieser Halbkugel und sei d der Abstand von P zu Q . Dann kann man die Menge aller Punkte auf K betrachten, die von P und Q den gleichen Abstand haben. Diese bilden einen Großkreis t . Der minimale Abstand eines Punktes auf t zu P ist dann $\frac{d}{2}$, der maximale Abstand ist genau $\pi R - \frac{d}{2}$ und alle Abstände zwischen diesen kommen tatsächlich als Abstände von Punkten auf t zu P vor.

Nun ist $0 < \frac{r}{R} < 1$ und entsprechend der Behauptung von oben findet man eine natürliche Zahl n so, dass $\frac{1}{4} \leq n\frac{r}{R} - \lfloor n\frac{r}{R} \rfloor \leq \frac{3}{4}$ ist. Setzt man $m = \lfloor n\frac{r}{R} \rfloor$ und multipliziert die letzte Ungleichungskette mit πR , so ergibt sich

$$\frac{\pi R}{4} \leq n\pi r - m\pi R \leq \frac{3\pi R}{4}.$$

Weil nun $d \leq \frac{\pi R}{2}$ ist, gilt dann sicherlich auch

$$\frac{d}{2} \leq n\pi r - m\pi R \leq \pi R - \frac{d}{2}.$$

Mithin findet man auf t einen Punkt T , der von P (und demnach auch von Q) genau den Abstand $n\pi r - m\pi R$ hat. Sei T' der T diametral gegenüberliegende Punkt auf K . Man betrachte nun den durch P und T bestimmten Großkreis a und den durch Q und T bestimmten Großkreis b .

Ausgehend von der Ausgangsposition führe man dann nachstehende Folge von Abrollvorgängen aus:

¹Hier wurde die Beziehung $\lfloor -x \rfloor = -(1 + \lfloor x \rfloor)$ benutzt, die für positive, nicht ganzzahlige x gilt.

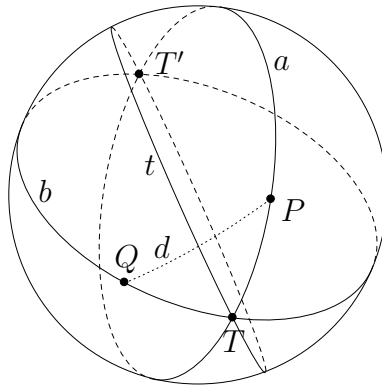


Abbildung 38.3: Abrollweg

- Rolle so ab, dass der Nordpol von k auf P landet. Das geht nach Voraussetzung, denn P ist erreichbar.
- Rolle k entlang a ab, wobei in Richtung T gestartet wird. Rolle so lange, bis k genau n halbe Umdrehungen vollendet hat. Wegen $n\pi r = (n\pi r - m\pi R) + m\pi R$ kommt dabei der Nordpol (falls n gerade ist) bzw. der Südpol (falls n ungerade ist) von k auf T (falls m gerade ist) oder auf T' (falls m ungerade ist) zu liegen.
- Rolle nun entlang b und zwar von T startend in Richtung Q , und von T' startend in die Richtung von Q weg, wobei der Abrollvorgang aus dem vorigen Schritt an der durch t bestimmten Ebene gespiegelt und in umgekehrter Richtung erfolgt. Danach liegt der Nordpol von k auf Q .

Dass man irgendeinen Punkt P auf K erreichen kann, ist klar – man rolle einfach entlang eines Meridians von K , bis der Nordpol von k die Kugel K berührt. Wie eben gezeigt, kann man dann auch die gesamte Halbkugel um P erreichen. Aber auch jeder Punkt dieser Halbkugel ist Mittelpunkt einer Halbkugel, die demnach vollständig erreichbar ist. Offenbar erreicht man somit dann die gesamte Kugel K .

Lösungen zu Aufgabenblatt 39

L 39.1 Als Quersummen kommen genau die Vielfachen von 3 vor: 3, 6, 9, 12, ... (Um Missverständnissen vorzubeugen: In dieser Aufgabe verstehen wir ausnahmsweise unter den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ die positiven ganzen Zahlen ohne Null, und ebenso betrachten wir die Zahl Null nicht als Vielfaches einer natürlichen Zahl.) Da $39 = 3 \cdot 13$ ist, sind alle Vielfachen von 39 auch Vielfache von 3, ihre Quersumme ist also jeweils durch 3 teilbar.

Umgekehrt kommen auch alle Vielfachen von 3 als Quersumme eines Vielfachen von 39 vor:

Es ist $10101 = 39 \cdot 259$ ein Vielfaches von 39, das die Quersumme 3 hat. Mit seiner Hilfe können wir nun systematisch alle Vielfachen von 3 als Quersumme eines Vielfachen von 39 erzeugen. Indem wir die 10101 zweimal hintereinander schreiben, erhalten wir eine Zahl 1010110101 mit Quersumme 6, die ebenfalls ein Vielfaches von 39 ist:

$$\begin{aligned} 1010110101 &= 1010100000 + 10101 = 10101 \cdot 10^5 + 10101 \\ &= 39 \cdot 259 \cdot 10^5 + 39 \cdot 259 = 39 \cdot (259 \cdot 10^5 + 259). \end{aligned}$$

Genauso hat 101011010110101 die Quersumme 9 und ist Vielfaches von 39:

$$\begin{aligned} 101011010110101 &= 10101 \cdot 10^{5 \cdot 2} + 10101 \cdot 10^5 + 10101 \\ &= 39 \cdot (259 \cdot 10^{5 \cdot 2} + 259 \cdot 10^5 + 259). \end{aligned}$$

Setzen wir das so fort, erhalten wir, dass $k \cdot 3$ Quersumme der Zahl

$$\begin{aligned} 10101 \cdot 10^{5 \cdot (k-1)} + 10101 \cdot 10^{5 \cdot (k-2)} + \dots + 10101 \cdot 10^{5 \cdot 1} + 10101 \\ = 39 \cdot (259 \cdot 10^{5 \cdot (k-1)} + 259 \cdot 10^{5 \cdot (k-2)} + \dots + 259 \cdot 10^{5 \cdot 1} + 259) \end{aligned}$$

ist, also ebenfalls Quersumme eines Vielfachen von 39.

Ein paar Anmerkungen zur Aufgabe (und zur Zahl 39):

Vielfache von 39 mit Quersummen 6 und 9 – und damit nach dem oben beschriebenen Prinzip des Voreinandersetzens auch mit allen größeren durch 3 teilbaren Zahlen – finden sich mit 312 und 117 recht schnell, die 10101 als kleinstes Vielfaches mit Quersumme 3 zugegebenermaßen nicht.

Wie findet man so ein Vielfaches mit kleiner Quersumme im Allgemeinen? Ganz kurz gesagt: Man muss die Reste betrachten, die die Potenzen von 10 beim Teilen durch die zu untersuchende Zahl lassen, und dann schauen, ob man es schafft oder nicht, wenige dieser Reste zu einer durch die Zahl teilbaren Summe zu addieren. (Das Addieren der Reste entspricht dem Erhöhen der entsprechenden Ziffern!)

Und wie sieht die (Gesamt-)Lösung dieser Aufgabe im Allgemeinen aus? Das ist schwierig. Klar ist sofort: Für eine durch 9 teilbare Zahl kommen nur Zahlen aus $9\mathbb{N}$ in Frage (also Vielfache von 9), für eine durch 3, aber nicht durch 9 teilbare Zahl nur Zahlen aus $3\mathbb{N}$. Für alle anderen Zahlen hat man, wenn man nur Teilbarkeit durch 3 betrachtet, keine Einschränkung.

Jedoch ergibt sich schnell eine andere Einschränkung, indem man sich Folgendes überlegt: Eine Quersumme 1 kann nur eine Zahl der Form 10^k haben. Und diese Zahlen können nur Vielfache von Zahlen sein, die von der Form $2^i 5^j$ mit $i, j \in \mathbb{N}_0$ sind. Weitere Einschränkungen zu finden ist schon schwieriger und geht mehr oder weniger in die Tiefen der Zahlentheorie.

Es gibt anscheinend (so genau wissen wir das im Allgemeinen auch nicht) viele Zahlen, bei denen in der Tat die Menge der Quersummen ihrer Vielfachen eine der sich aus dem oben Gesagten ergebenden Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{N} \setminus \{1\}$, $3\mathbb{N}$ oder $9\mathbb{N}$ ist. Jedoch gibt es auch viele, die nicht alle diese Zahlen als Quersummen ihrer Vielfachen zulassen, z. B. die 11: Sie hat nur Vielfache mit Quersummen aus der Menge $\{2, 4, 6, 8, 10, 11, 12, 13, \dots\}$. Oder die 33: Bei ihr ist es die Menge $\{6, 12, 15, 18, \dots\}$. Schließlich hat 41 die 5 als kleinste Quersumme eines Vielfachen, danach kommt erst die 10 und dann alle weiteren natürlichen Zahlen. (Zum Teil ist dies sogar nicht allzu schwer einzusehen – sei dies eine Aufforderung, sich damit auseinanderzusetzen ...)

Es gibt sogar Zahlen, bei denen eine beliebig vorgegebene Anzahl von den ersten natürlichen Zahlen in dieser Liste fehlt! Andererseits ist für jede Zahl in der Liste der Quersummen der Vielfachen ab irgendeinem Wert jeder größere Wert vorhanden, bzw. je nach Teilbarkeit durch 3 jeder größere durch 3 bzw. 9 teilbare Wert.

Im „Lexikon der Zahlen“¹ steht unter dem Stichwort 39: „Anscheinend die erste uninteressante Zahl (was diese Zahl natürlich besonders interessant macht, weil sie die erste Zahl mit dieser Eigenschaft ist).“ Da nun die Menge der Quersummen gleich der nach recht einfachen Überlegungen maximal möglichen Menge ist, ist die 39 auch unter diesem Gesichtspunkt nicht sonderlich interessant; allenfalls ist bemerkenswert, dass man für keine andere durch 3 und nicht durch 9 teilbare Zahl kleiner 57 so weit suchen muss, um ein Vielfaches mit Quersumme 3 zu finden. Das aber rechtfertigt sicherlich nicht einen Eintrag in besagtem Buch. Tut uns leid für die 39; immerhin hat sie jetzt hier Beachtung gefunden.

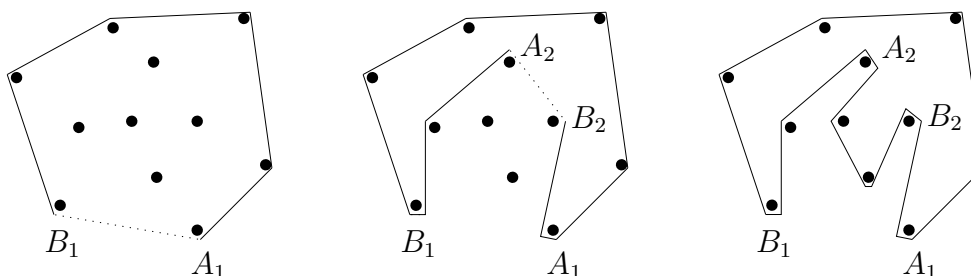
L 39.2 Katrin kann den Sieg erzwingen.

Als Erstes verbindet sie zwei diametral gegenüberliegende Ecken, d. h. wenn wir die Ecken reihum von 1 bis 2004 durchnummerieren, so verbindet sie die Ecken 1 und 1003. Damit hat sie die Figur in zwei gleich geformte 1003-Ecke zerlegt, die wie Spiegelbilder zueinander sind. Alle weiteren Strecken müssen entweder in der einen oder in der anderen Hälfte gezogen werden, denn keine neue Strecke darf die erste schneiden.

¹ von David Wells (Fischer Taschenbuch, 1990)

Wenn Wolfgang dann einen Zug macht (er ist nach Katrins erstem Zug dran), kann Katrin denselben Zug in der anderen Hälfte ausführen, nur spiegelbildlich. Da danach die beiden Teile wieder Spiegelbilder voneinander sind (mitsamt allen eingezeichneten Strecken), kann Katrin auch weiterhin Spiegelbilder von Wolfgangs Zügen malen. Irgendwann kann dann Wolfgang keinen Zug mehr machen und hat verloren.

L 39.3 Es ist immer möglich, ein Gummiband so zu spannen, dass es alle Nägel berührt.



Zum Beweis dieser Aussage geben wir zunächst ein Verfahren an, welches in jedem Fall eine gesuchte Umspannung erzeugt, und zeigen anschließend, dass dieses Verfahren auch wirklich stets zum gewünschten Ergebnis führt.

Zunächst sei also das Verfahren beschrieben (man verfolge die Beschreibung am besten anhand der Abbildungen). Die Nagelpositionen seien durch eine Menge M von Punkten gegeben. Im ersten Schritt betrachte man die konvexe Hülle von M . Die konvexe Hülle ist die kleinste konvexe² Menge, die alle Punkte von M enthält. Da M eine endliche Menge von Punkten ist, ist dies hier ein konvexes k -Eck mit $2 \leq k \leq n$ (damit wir nicht umständlich Fälle unterscheiden müssen, bezeichnen wir für $k = 2$ eine Strecke als Zweieck). Sei E_1 die Menge derjenigen Punkte aus M , die auf dem Rand dieses k -Ecks liegen (das können durchaus mehr als nur die Ecken des k -Ecks sein!).

Wähle nun zwei beliebige, auf dem Rand des k -Ecks im Uhrzeigersinn benachbarte Punkte A_1 und B_1 aus E_1 und spanne das (bisher offene) Gummiband zunächst entlang des k -Ecks von B_1 nach A_1 . Dabei berührt das Gummiband alle Punkte aus E_1 . Gibt es nun weitere, noch unberührte Punkte, ist also $M \setminus E_1$ nicht leer, so fahre man im zweiten Schritt mit der Restmenge an Punkten $M_2 = (M \setminus E_1) \cup \{A_1, B_1\}$ fort.

Allgemein verfährt man nun im i -ten Schritt ($i \geq 2$) folgendermaßen: Betrachte die Menge E_i aller Punkte auf dem Rand der konvexen Hülle von M_i . Insbesondere sind A_{i-1} und B_{i-1} auf dem Rand. Wähle zwei im Uhrzeigersinn benachbarte Punkte A_i und B_i auf diesem Rand, wobei $\{A_i, B_i\} \neq \{A_{i-1}, B_{i-1}\}$ sein soll. Dies ist stets

²Eine Menge von Punkten in der Ebene heißt konvex, wenn sie für jedes Paar A, B von Punkten in M auch die gesamte Strecke AB zwischen diesen Punkten enthält. Die Menge enthält also keine Löcher oder Einbuchtungen.

möglich, weil der Rand von M_i mehr als zwei Punkte enthält. Spanne das Gummiband weiter von B_{i-1} entlang des Randes der konvexen Hülle von M_i bis zum Punkt A_i und (das andere offene Ende des Bandes) gegen den Uhrzeigersinn von A_{i-1} bis B_i . Gibt es jetzt noch weitere, unberührte Punkte, so fahre im nächsten Schritt mit der Menge $M_{i+1} = (M_i \setminus E_i) \cup \{A_i, B_i\}$ fort.

Gibt es keine unberührten Punkte mehr, dann verbinde A_i mit B_i und schließe somit das Gummiband. An welcher Seite der Nägel das Band jeweils herumgeführt werden muss, ergibt sich automatisch.

Da sich in jedem Schritt die Menge der vom Gummiband noch nicht berührten Punkte um wenigstens eins verringert, endet das Verfahren irgendwann mit einem geschlossenen Gummiband, das alle Punkte berührt.

Da die konvexe Hülle von M_i bis auf die Strecke $A_{i-1}B_{i-1}$ echt im Inneren der konvexen Hülle von M_{i-1} liegt, kommt es beim beschriebenen Verfahren auch nie zu Überschneidungen des Gummibandes. Demnach endet das Verfahren stets mit dem gewünschten Ergebnis.

L 39.4 Erste Lösung:

Angenommen, ein Paar (x, y) erfüllt die Gleichung. Dann gilt sicher auch

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 4x + 4y + 8} = 5 - \sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5} \quad (39.1)$$

bzw. nach Quadrieren

$$x^2 + y^2 + 4x + 4y + 8 = 25 - 10\sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5} + x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5.$$

Weiter folgt nach Wegkürzen gleicher Terme auf beiden Seiten und Umordnen

$$10\sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5} = 22 - 6x - 8y; \quad (39.2)$$

und hieraus folgt nach Quadrieren

$$100x^2 + 100y^2 - 200x - 400y + 500 = 484 + 36x^2 + 64y^2 - 264x - 352y + 96xy. \quad (39.3)$$

Der Übersichtlichkeit halber kann und sollte man alle Terme auf eine Seite bringen und erhält

$$64x^2 + 36y^2 - 96xy + 64x - 48y + 16 = 0.$$

Mit geübtem Adlauge erkennt man hier ein vollständiges Quadrat, so dass die letzte Gleichung äquivalent zu

$$(8x - 6y + 4)^2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad 8x - 6y + 4 = 0$$

ist. Demnach muss $y = \frac{2}{3}(2x + 1)$ sein.

Aber Achtung! Nicht jedes Paar (x, y) mit $y = \frac{2}{3}(2x + 1)$ ist auch Lösung der gegebenen Gleichung. In obiger Herleitung haben wir zweimal quadriert, und da

Quadrieren keine Äquivalenzumformung ist, kann sich dabei die Lösungsmenge vergrößern. Schauen wir uns also die Rechnung an den besagten Stellen genauer an.

Jedes Paar (x, y) mit $y = \frac{2}{3}(2x + 1)$ erfüllt die Gleichung (39.3), denn danach folgen nur Äquivalenzumformungen. Eine Lösung von Gleichung (39.3) ist aber genau dann Lösung von Gleichung (39.2), wenn $22 - 6x - 8y \geq 0$ ist, denn die Wurzel auf der linken Seite von (39.2) ist nicht negativ. Wegen $y = \frac{2}{3}(2x + 1)$ ist dies äquivalent zu $22 - 6x - \frac{16}{3}(2x + 1) \geq 0$ bzw. $x \leq 1$.

Analog ist ein Paar (x, y) mit $y = \frac{2}{3}(2x + 1)$ und $x \leq 1$ genau dann Lösung von Gleichung (39.1), wenn $\sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5} \leq 5$ ist. Setzt man wieder $y = \frac{2}{3}(2x + 1)$ ein, so bedeutet dies

$$5 \geq \sqrt{x^2 + \frac{16}{9}x^2 + \frac{16}{9}x + \frac{4}{9} - 2x - \frac{16}{3}x - \frac{8}{3} + 5} = \frac{5}{3}\sqrt{(x-1)^2}.$$

Wegen $x \leq 1$ ist dies nun aber gleichbedeutend mit $5 \geq \frac{5}{3}(1-x)$ bzw. nach Umstellen $x \geq -2$.

Wir haben also gezeigt, dass genau die Paare $(x, \frac{2}{3}(2x + 1))$ mit $-2 \leq x \leq 1$ die Gleichung lösen.

Macht man übrigens die Probe durch Einsetzen, so erhält man auf der linken Seite den Ausdruck

$$\begin{aligned} & 1/3\sqrt{(5x+10)^2} + 1/3\sqrt{(5x-5)^2} \\ &= \begin{cases} 1/3(-5x-10 - 5x+5) = -10/3x - 5/3, & x < -2, \\ 1/3(+5x+10 - 5x+5) = 5, & -2 \leq x \leq 1, \\ 1/3(+5x+10 + 5x-5) = 10/3x + 5/3, & x > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

und ebenso die Lösung.

Zweite Lösung:

Eine elegante Variante zur Lösung erhalten wir mit geometrischen Überlegungen: Die gegebene Gleichung ist äquivalent zu

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y+2)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = 5.$$

Die Punkte $A = (-2, -2)$ und $B = (1, 2)$ haben in einem kartesischen Koordinatensystem genau den Abstand 5 und für einen gegebenen Punkt $C = (x, y)$ beschreibt die erste Wurzel genau den Abstand von C zu A und die zweite Wurzel den Abstand zu B . Somit ist die Gleichung äquivalent zu

$$\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{AB}.$$

Nach der Dreiecksungleichung gilt aber stets $\overline{AC} + \overline{BC} \geq \overline{AB}$ und Gleichheit gilt genau dann, wenn C auf der Strecke AB liegt. Beschreibt man die Punkte dieser Strecke in Koordinaten, so ergibt sich genau dieselbe Lösungsmenge wie in der ersten Lösung.

Lösungen zu Aufgabenblatt 40

L 40.1 Zuerst nummerieren wir die Eimer so, dass der Eimer direkt beim Trichter die 0, der nächste die 1 erhält usw.

a) Da der Trichter, wenn man kein Wasser nachfüllt, nach spätestens 50 s leer ist, kann man zwischen zwei Befüllungen nicht weiter als $\frac{1}{2} \cdot 50 \text{ s} \cdot 1 \text{ m/s} = 25 \text{ m}$ und zurück laufen. Man erreicht also alle Eimer bis zum fünften; das Wasser läuft $6 \cdot 50 \text{ s} = 300 \text{ s} = 5 \text{ min}$ lang.

b)+c) Nach dieser Argumentation kann man bei dem Zehn-Liter-Trichter nicht weiter als bis zum Eimer Nummer 10 kommen. Tatsächlich erreicht man aber bei allen Trichtern mit einem Fassungsvermögen ab neun Litern nur zehn Eimer einschließlich des Eimers an nullter Position: In der Zeit, die benötigt wird, um einen Eimer mit der Nummer $n > 5$ zu holen, läuft mehr Wasser durch den Trichter, als man nachfüllen kann, der „Verlust“ liegt bei $n - 5$ Litern. Umgekehrt kann man mit Eimern $n < 5$ einen „Vorrat“ anlegen, der jeweils $5 - n$ Liter beträgt. Insgesamt kann man also zehn Liter $(4 + 3 + 2 + 1)$ „Vorrat“ anlegen, aber genauso viel verbraucht man auch beim Holen der Eimer 6 bis 9. In der Tat ist es möglich, diese auf theoretischem Wege gefundene Grenze von zehn genutzten Eimern zu erreichen, z. B. indem man immer (für $1 \leq n \leq 4$) nach dem $(5 - n)$ -ten Eimer den $(5 + n)$ -ten Eimer holt. Das Wasser läuft dann also $10 \cdot 50 \text{ s} = 500 \text{ s} = 8 \text{ min } 20 \text{ s}$ lang.

L 40.2 Wir zeigen gleich Aufgabenteil b), da aus diesem Bennos Aussage folgt. Hierzu geben wir eine explizite Vorschrift an, wie man schöne, nicht auf Null endende Zahlen für einen Exponenten k mit $3 \leq k \leq 10$ konstruieren kann. Sei also ein solches k gegeben. Betrachte die Zahl $x = \sqrt[k-1]{10}$. Wenn Ulrichs Aussage stimmt, findet man in der Dezimaldarstellung von x unendlich viele Neunen. Anders formuliert bedeutet das, dass in der Dezimalzahl $10^n \cdot x$ für unendlich viele n die Ziffer 9 direkt vor dem Komma steht. Das heißt aber, dass

$$10 \cdot a - 1 < 10^n \cdot x < 10 \cdot a$$

für eine n -stellige natürliche Zahl a gilt. Als illustratives Beispiel für das Bisherige betrachte man $k = 7$, also $x = \sqrt[6]{10} = 1,467799 \dots$ Hier gilt dann

$$10 \cdot 14678 - 1 < 10^5 \cdot x < 10 \cdot 14678,$$

also $a = 14678$.

Wir behaupten nun, dass unter den unendlich vielen so konstruierten Zahlen a unendlich viele schöne Zahlen zu finden sind.

Es gilt ja zum einen sicher

$$a^k = a \cdot a^{k-1} > a \cdot (10^{n-1} \cdot x)^{k-1} = a \cdot 10^{(n-1)(k-1)+1}.$$

Andererseits folgt mit dem binomischen Lehrsatz:

$$\begin{aligned}
 a^k &= a \cdot a^{k-1} \\
 &< a \cdot ((10^n \cdot x + 1)/10)^{k-1} \\
 &= a \cdot (10^{n-1} \cdot x + 1/10)^{k-1} \\
 &= a \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \cdot 10^{(k-1-i)(n-1)} \cdot 10^{(k-1-i)/(k-1)} \cdot 10^{-i}.
 \end{aligned}$$

Nun trennen wir den ersten Summanden dieser Summe ab und benutzen $k \leq 10$, also sicher auch $\binom{k-1}{i} \leq 9^i$ für $0 \leq i \leq k-1$, für den Rest der Summe:

$$\begin{aligned}
 a^k &< a \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \cdot 10^{(k-1-i)(n-1)} \cdot 10^{(k-1-i)/(k-1)} \cdot 10^{-i} \\
 &= a \cdot 10^{(n-1)(k-1)+1} \\
 &\quad + a \cdot \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k-1}{i} \cdot 10^{(k-1-i)(n-1)} \cdot 10^{(k-1-i)/(k-1)} \cdot 10^{-i} \\
 &< a \cdot 10^{(n-1)(k-1)+1} \\
 &\quad + (x \cdot 10^{n-1} + 1/10) \cdot \sum_{i=1}^{k-1} 9^i \cdot 10^{(k-1-i)(n-1)} \cdot 10^{(k-1-i)/(k-1)} \cdot 10^{-i} \\
 &= a \cdot 10^{(n-1)(k-1)+1} + \sum_{i=1}^{k-1} 0,9^i \cdot 10^{(k-i)(n-1)+(k-i)/(k-1)} \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{k-1} 0,9^i \cdot 10^{(k-1-i)(n-1)-i/(k-1)}.
 \end{aligned}$$

Wir behaupten nun, dass

$$\sum_{i=1}^{k-1} 0,9^i \cdot 10^{(k-i)(n-1)+(k-i)/(k-1)} + \sum_{i=1}^{k-1} 0,9^i \cdot 10^{(k-1-i)(n-1)-i/(k-1)} < 10^{(n-1)(k-1)+1}$$

für genügend große n gilt. Um das einzusehen, dividieren wir auf beiden Seiten durch $10^{(n-1)(k-1)+1}$ und erhalten dann äquivalent

$$\sum_{i=1}^{k-1} 0,9^i \cdot 10^{-(i-1)(n-1)-(i-1)/(k-1)} + \sum_{i=1}^{k-1} 0,9^i \cdot 10^{-i(n-1)-i/(k-1)-1} < 1.$$

Für festes k geht die linke Seite im Limes $n \rightarrow \infty$ gegen 0,9 (es bleibt nur der erste Summand der ersten Summe übrig, alle übrigen werden mit wachsendem n beliebig

klein, weil durch immer höhere Zehnerpotenzen dividiert wird), was kleiner als 1 ist. Also ist für genügend große n auch

$$a^k < a \cdot 10^{(n-1)(k-1)+1} + 10^{(n-1)(k-1)+1} = (a+1) \cdot 10^{(n-1)(k-1)+1}.$$

Demnach beginnt die Dezimaldarstellung von a^k für genügend große n mit den Ziffern von a und somit ist a eine schöne Zahl. Da nun aber unendlich viele n existieren, für die man geeignete a erhält, gibt es auch unendlich viele genügend große solche n . Somit kann man auf die angegebene Weise unendlich viele schöne Zahlen a konstruieren. Ein solches a endet dabei genau dann auf 0, wenn in x an entsprechender Stelle zwei Neunen aufeinanderfolgen. Es kann aber nicht passieren, dass irgendwann nur noch Neunen in der Dezimaldarstellung von x stehen, denn dann wäre $x = \sqrt[k-1]{10}$ rational, was es bekanntlich nicht ist. Also gibt es unendlich viele passende Stellen in der Dezimaldarstellung von x , an denen vor einer Neun keine zweite steht, so dass das daraus berechnete a nicht auf Null endet. Das war zu zeigen.

Das erste Beispiel ist übrigens nicht aus $\sqrt[3]{10}$, sondern nach derselben Idee aus $\sqrt[3]{100}$ entstanden. $\sqrt[3]{10}$ hat am Anfang keine genügend hohen Ziffern, das erste daraus sich ergebende Beispiel ist siebenstellig.

L 40.3

- a) Zum Test beginnen wir mit dem Bruch $\frac{2}{3}$. Dann ergeben sich schrittweise folgende Brüche: $\frac{23}{5}, \frac{58}{28}, \frac{254}{86}, \frac{856}{340}, \frac{3236}{1196}, \frac{11608}{4432}, \frac{42632}{16040}, \frac{154912}{58672}, \frac{565616}{213584}, \dots$, bzw. in Dezimalbruchschreibweise $0,6666\dots, 4,6, 2,0714\dots, 2,9534\dots, 2,5176\dots, 2,7056\dots, 2,6191\dots, 2,6578\dots, 2,6403\dots, 2,6482\dots$ usw.

Die Werte scheinen sich also einer Zahl bei etwa 2,64 zu nähern. Nur welcher Zahl ganz genau?

Nehmen wir einmal an (und das dürfen wir entsprechend der Aufgabenstellung), dass sich die Folge der Brüche der Zahl x beliebig nähert, also gegen x konvergiert. Dann ist $x \approx \frac{a}{b}$ für jedes Glied $\frac{a}{b}$ der Folge, welches weit hinten in der Folge steht. Aber auch das nächste Glied, nämlich $\frac{a+7b}{a+b}$, ist dann nahe an x . Somit muss zwangsläufig $\frac{a}{b} \approx \frac{a+7b}{a+b}$ sein. Da das „nahe“ in der Tat beliebig nahe sein kann, gilt im Grenzwert tatsächlich

$$\frac{a}{b} = \frac{a+7b}{a+b} = x.$$

Umgeformt bedeutet dies aber $a^2 + ab = ab + 7b^2$ bzw. $a^2 = 7b^2$. Demnach ist $x = \frac{a}{b} = \sqrt{7} \approx 2,6458$.

Das ist also der gesuchte Wert.

Diese etwas heuristische Herleitung kann man mit Mitteln der Analysis auch mathematisch exakt aufschreiben: Nennt man die Folgenglieder $x_n = \frac{a_n}{b_n}$ und geht man davon aus, dass die Folge (x_n) gegen x konvergiert, so gilt

$$\begin{aligned} x &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 7b_n}{a_n + b_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n}{b_n} + 7}{\frac{a_n}{b_n} + 1} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} + 7}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} + 1} \\ &= \frac{x + 7}{x + 1}. \end{aligned}$$

Also gilt $x = \frac{x+7}{x+1}$, was umgeformt $x = \pm\sqrt{7}$ ergibt. Da offenbar alle Folgenglieder positiv sind, kommt nur $x = \sqrt{7}$ in Frage.

- b) Es ist nicht schwer zu sehen, dass die Herleitung in Teil a) für jede nicht negative ganze (oder auch reelle) Zahl n als Ergebnis $\sqrt{n}$ liefert. Man ersetze im Text oben einfach jede auftretende 7 durch n .
- c) Für negative n nähern sich die Brüche keiner Zahl. Die Folge divergiert also. Dies sieht man am schnellsten so ein:

Angenommen, die Folge würde auch für ein negatives n gegen eine Zahl x konvergieren. Dann würde dieselbe Herleitung wie oben zeigen, dass $x^2 = n$ gelten müsste. Das ist aber für negative n in reellen Zahlen nicht lösbar.

Als Beispiel betrachtet man die Folge für $n = -1$ mit dem Startwert $\frac{2}{3}$. Hier beginnt sie mit den Gliedern $\frac{2}{3}, \frac{-1}{5}, \frac{-6}{4}, \frac{-10}{-2}, \frac{-8}{-12}, \frac{4}{-20}, \frac{24}{-16}, \frac{40}{8}, \frac{32}{48}, \dots$

Die Folge ist also periodisch mit Periode $\frac{2}{3}, -\frac{1}{5}, -\frac{3}{2}, 5$. Auch für $n = -3$ ist sie periodisch (unabhängig vom Anfangsglied). Für alle anderen negativen n ist sie nicht periodisch, sondern wechselt unendlich oft von beliebig großen zu beliebig kleinen Werten, ohne sich dabei je zu wiederholen.

Bemerkung 1: Es ist unerheblich, ob die Brüche während der Bildung der Folge gekürzt sind oder nicht, da die Rekursionsvorschrift in Zähler und Nenner linear ist. Verwendet man zum Beispiel statt $\frac{a}{b}$ den Bruch $\frac{ma}{mb}$, so ergibt sich statt $\frac{a+nb}{a+b}$ der Bruch $\frac{ma+nmb}{ma+mb} = \frac{a+nb}{a+b}$.

Bemerkung 2 (für Leser, die mit etwas linearer Algebra und den komplexen Zahlen vertraut sind): Betrachtet man zu jedem Bruch $\frac{a_k}{b_k}$ den Vektor $v_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$ und die

Matrix

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

so kann man die Rekursion auch in Matrizenschreibweise wie folgt notieren:

$$v_{k+1} = M_n v_k.$$

Nun ist $M_n = A \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{n} & 0 \\ 0 & 1 - \sqrt{n} \end{pmatrix} A^{-1}$ mit $A = \begin{pmatrix} \sqrt{n} & -\sqrt{n} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $A^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{n} \\ -1 & \sqrt{n} \end{pmatrix}$, weswegen man v_k wie folgt berechnen kann:

$$v_k = M_n^k v_0 = A \begin{pmatrix} (1 + \sqrt{n})^k & 0 \\ 0 & (1 - \sqrt{n})^k \end{pmatrix} A^{-1} v_0.$$

Setzt man als Startwerte $a_0 = 0$ und $b_0 = 1$, so erhält man

$$v_k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{n}((1 + \sqrt{n})^k - (1 - \sqrt{n})^k) \\ (1 + \sqrt{n})^k + (1 - \sqrt{n})^k \end{pmatrix}.$$

Wenn man dagegen als Startwerte $a_0 = 1$ und $b_0 = 0$ nimmt (das darf man dann vorläufig nur in der Vektorschreibweise deuten(!)), so erhält man

$$v_k = \frac{1}{2\sqrt{n}} \begin{pmatrix} \sqrt{n}((1 + \sqrt{n})^k + (1 - \sqrt{n})^k) \\ (1 + \sqrt{n})^k - (1 - \sqrt{n})^k \end{pmatrix}.$$

Durch Linearkombination erhält man für beliebige Startwerte $a_0 > 0$ und $b_0 > 0$ die Folge der Brüche

$$\begin{aligned} \frac{a_k}{b_k} &= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{n} \left(b_0((1 + \sqrt{n})^k - (1 - \sqrt{n})^k) + \frac{1}{\sqrt{n}}a_0((1 + \sqrt{n})^k + (1 - \sqrt{n})^k) \right)}{\frac{1}{2} \left(b_0((1 + \sqrt{n})^k + (1 - \sqrt{n})^k) + \frac{1}{\sqrt{n}}a_0((1 + \sqrt{n})^k - (1 - \sqrt{n})^k) \right)} \\ &= \sqrt{n} \cdot \frac{1 - x^k + \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{a_0}{b_0} (1 + x^k)}{1 + x^k + \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{a_0}{b_0} (1 - x^k)} \\ &= \sqrt{n} \cdot \frac{\frac{1-x^k}{1+x^k} + \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{a_0}{b_0}}{1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{a_0}{b_0} \frac{1-x^k}{1+x^k}} \\ &= \sqrt{n} \cdot \frac{y_k + \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{a_0}{b_0}}{1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{a_0}{b_0} y_k}, \end{aligned}$$

wobei $x = \frac{1-\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$ und $y_k = \frac{1-x^k}{1+x^k}$ gesetzt wurde.

Ist nun $n > 0$, so ist x dem Betrage nach kleiner als 1 und daher konvergiert die Folge y_k gegen 1, weswegen die Folge der Brüche gegen $\sqrt{n}$ strebt (wie oben schon gesehen).

Ist $n < 0$ und erlaubt man das Rechnen mit komplexen Zahlen, so ist x eine solche komplexe Zahl, und zwar mit Betrag 1. Eine etwas detailliertere Analyse zeigt, dass x dann genau für $n = -1$ und $n = -3$ eine Einheitswurzel ist (die also $x^m = 1$ für ein $m > 0$ erfüllt). Daher wird die Folge in genau diesen Fällen periodisch. In den anderen Fällen wandert die Folge x^k den komplexen Einheitskreis entlang, ohne periodisch zu werden, und kommt dabei allen Werten auf dem Kreis unendlich oft beliebig nahe (die Folgenglieder liegen *dicht* auf dem Kreis). Hierbei variiert dann y_k auf der imaginären Achse und kommt dort jedem Wert beliebig nahe. Daraus kann man dann aber schnell ersehen, dass auch die Folge der Brüche dicht auf der reellen Achse verteilt ist und dort also jedem Wert (irgendwann einmal) beliebig nahe kommt, insbesondere werden die Brüche unendlich oft beliebig groß und beliebig klein.

L 40.4 Jonathan fragt weiter: „Und wie ist es mit der Strecke GH (sie liegt parallel zur Seite AD und hat von ihr den Abstand $2/5$)?“

Konrad antwortet: „Auch sie schneidet das kleine Quadrat, und zwar in zwei Punkten U (näher an G) und V , und der Bruch $\frac{\overline{GU}}{\overline{HV}}$ hat den Wert $2/3$.“

Wie sieht die Situation mit dieser weiteren Information aus?

Bezeichnen wir zunächst die Seitenlänge des kleinen, versteckten Quadrates mit a und die Länge der Strecke ES mit b . Wegen $\frac{\overline{ES}}{\overline{FT}} = 1/4$ folgt daraus $\overline{FT} = 4b$, und außerdem gilt, weil die Strecke EF parallel zur Quadratseite AB ist, $b + a + 4b = 1$, also $b = (1 - a)/5$.

Der einfacheren Beschreibung wegen legen wir unsere Figur so in ein kartesisches Koordinatensystem, dass A auf $(0, 0)$ und C auf $(1, 1)$ zu liegen kommt. Der Mittelpunkt M des kleinen Quadrats liege dann auf (x_M, y_M) . Mit obiger Rechnung ergibt sich

$$x_M = b + \frac{a}{2} = \frac{1-a}{5} + \frac{a}{2} = \frac{1}{5} + \frac{3}{10}a. \quad (40.1)$$

Da $0 < a < 1$ gilt, folgt

$$\frac{1}{5} < x_M < \frac{1}{2}.$$

Weil das kleine Quadrat die obere und untere Seite des großen Quadrats nicht übertreten darf, gilt $\frac{a}{2} \leq y_M \leq 1 - \frac{a}{2}$. Zusammen mit (40.1), umgestellt nach a ($a = \frac{10}{3}x_M - \frac{2}{3}$) und eingesetzt, ergibt sich daraus

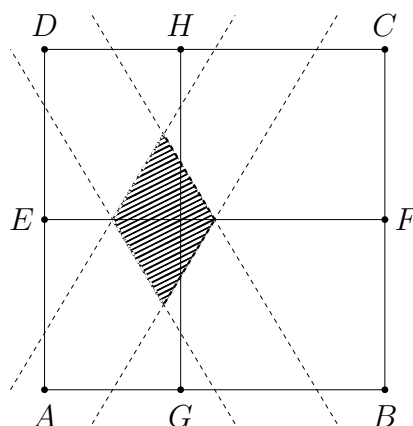
$$\frac{5}{3}x_M - \frac{1}{3} \leq y_M \leq -\frac{5}{3}x_M + \frac{4}{3}. \quad (40.2)$$

Nun wird das kleine Quadrat nach Voraussetzung ja von EF in genau zwei Punkten

geschnitten, daher muss $y_M - \frac{a}{2} < \frac{1}{2}$ und $y_M + \frac{a}{2} > \frac{1}{2}$ gelten, also

$$-\frac{5}{3}x_M + \frac{5}{6} < y_M < \frac{5}{3}x_M + \frac{1}{6}. \quad (40.3)$$

Damit kann M noch genau in dem schraffierten Bereich der folgenden Figur liegen.



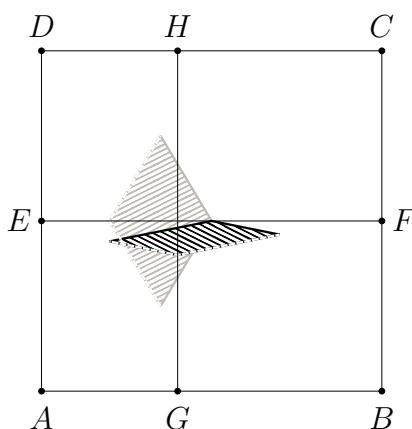
Nehmen wir jetzt die Informationen hinzu, die sich durch den Schnitt mit der Strecke GH ergeben. Analoge Überlegungen wie oben liefern die Beziehungen

$$y_M = \frac{2}{5} + \frac{1}{10}a, \quad (40.4)$$

$$\frac{2}{5} < y_M < \frac{1}{2}, \quad (40.5)$$

$$5y_M - 2 \leq x_M \leq -5y_M + 3 \quad \text{und} \quad -5y_M + \frac{12}{5} < x_M < 5y_M - \frac{8}{5} \quad (40.6)$$

und damit die folgende Figur (mit der vorher gefundenen in Hellgrau zum Vergleich).



Ganz leicht erkennen wir die Folgen daraus, indem wir a aus (40.1) und (40.4) eliminieren – dann erhalten wir die Geradengleichung

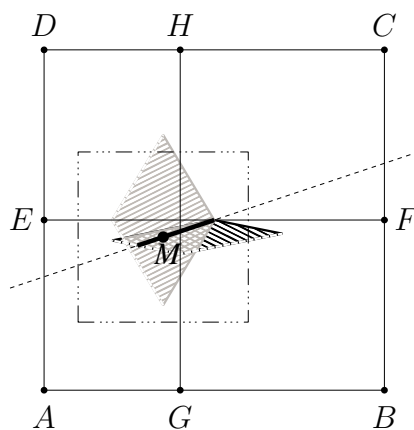
$$y_M = \frac{1}{3}x_M + \frac{1}{3}; \quad (40.7)$$

Setzt man diese Beziehung in die oben gefundenen Doppelungleichungen (40.2), (40.3), (40.5) und (40.6) ein, so erhält man nacheinander

$$x_M \leq \frac{1}{2}, x_M \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{4} < x_M, \frac{1}{8} < x_M, \frac{1}{5} < x_M, x_M < \frac{1}{2},$$

$$x_M \leq \frac{1}{2}, x_M \leq \frac{1}{2}, \frac{11}{40} < x_M, -\frac{1}{10} < x_M.$$

Damit kann insgesamt M noch genau auf der Geraden (40.7) mit x -Werten im Intervall $\left] \frac{11}{40}, \frac{1}{2} \right[$ liegen. Die Seitenlänge des kleinen Quadrats, a , nimmt dann Werte zwischen $\frac{1}{4}$ und 1 an.



Die Strecke, auf der M liegen kann,
sowie ein mögliches M mit dem zugehörigen Quadrat.

Lösungen zu Aufgabenblatt 41

L 41.1 Es muss tatsächlich einen Zeitpunkt geben, zu dem Lothar in genau 75 % der Spiele ein Tor geschossen hat. Denn gäbe es diesen nicht, so müsste er die 75 %-Marke in einem Spiel übersprungen haben. Hatte er vor diesem Spiel n Spiele gespielt und in k von diesen ein Tor erzielt, so muss also gelten

$$k < \frac{3}{4}n \quad \text{und} \quad k + 1 > \frac{3}{4}(n + 1).$$

Multipliziert man beide Ungleichungen mit 4, so ergibt sich hieraus

$$3n - 1 < 4k < 3n + 1.$$

Die ganze Zahl $4k$ müsste also zwischen den beiden aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen $3n - 1$ und $3n + 1$ liegen – ein Widerspruch. Demnach gibt es solche k und n nicht und Lothar hat irgendwann in genau 75 % seiner Spiele ein Tor geschossen.

Es muss aber keinen Zeitpunkt geben, zu dem er in genau 75 % der Spiele verwart wurde. Man betrachte zum Beispiel den Fall, dass Lothar in jedem Spiel der Hinrunde der Saison, bestehend aus 17 Spielen, verwart wurde, dafür aber in keinem der 17 Rückrundenspiele. Nach dem k -ten Spiel der Rückrunde ($0 \leq k \leq 17$) wurde Lothar dann in genau

$$\frac{17}{17 + k} \cdot 100 \%$$

aller bisherigen Spiele verwart. Wäre dies irgendwann genau 75 %, so müsste

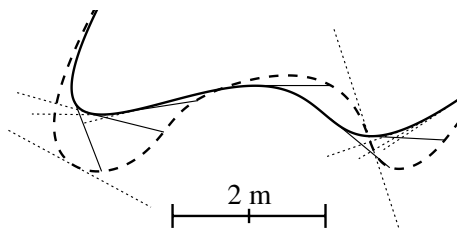
$$\frac{17}{17 + k} = \frac{3}{4} \quad \text{bzw.} \quad 3k = 17$$

gelten. Dies ist offenbar – weil k ganzzahlig ist – nicht möglich.

L 41.2 Die Erfahrung lehrt bereits, dass beim Fahrrad das Vorderrad die weiter ausschlagende Spur hinterlässt (was allerdings aus mathematischer Sicht noch unpräzise ist). An Kreuzungspunkten kann man im Schnee zudem vielleicht auch noch sehen, welche der beiden Spuren als zweite entstand – man kann dann davon ausgehen, dass dies die Spur des Hinterrades ist. In beiden Fällen erhält man aber noch keine Aussage über die gefahrene Richtung. Dazu muss man sich die Mechanik des Rades in Bezug auf die Lenkung etwas genauer ansehen. Die (für uns) wichtigsten Beobachtungen sind diejenigen, dass sich der Aufsetzpunkt des Vorderrades beim Lenken (näherungsweise) nicht ändert und dass das Hinterrad nicht lenkbar ist (Ach! ...) – das heißt nämlich, dass es immer in Richtung des Vorderrades zeigt

(und rollt), so dass es zu jedem Punkt der Spur des Hinterrades in tangentialer Richtung nach vorne den zugehörigen Punkt des Vorderrades zu finden gibt, und das in immer demselben Abstand. Bei Erwachsenenfahrrädern beträgt dieser Abstand in etwa einen Meter.

Nun schauen wir uns die Spur daraufhin in zwei Bereichen an: Links in der Kurve und in der Nähe des rechten Kreuzungspunktes. Man sieht sehr leicht, dass man an die gestrichelte Kurve keine tangentiale Strecke anlegen kann, die die andere Kurve in sinnvoller Entfernung trifft (jeweils gepunktete Strecken).



Bei der durchgezogenen Kurve gibt es jeweils rechts einen fast geraden Bereich. Es ist nicht möglich, wie beschrieben tangentiale Strecken nach links zu legen, denn die andere Kurve schneidet diese Richtung in recht stumpfem Winkel. Hingegen kann man zu jedem Punkt eine solche tangentiale Strecke nach rechts finden (ein paar sind eingezeichnet), also muss der Fahrraddieb Paul von oben kommend nach rechts gefahren sein, und nach rechts sollte man folglich laufen.

Bemerkung: Eine Feststellung, über die sich vielleicht nachzudenken lohnt: Aufgrund der beschriebenen Eigenschaften ist es aus mathematischer Sicht einfach, zu einer vorgegebenen Bahn des Hinterrades die Spur des Vorderrades zu beschreiben – man gehe einfach immer in der aktuellen Richtung um den Radabstand nach vorne. Andersherum, d. h. wenn man die Spur der Vorderrades gegeben hat – man berechnet dann die sogenannte „Schleppkurve“ der Spur des Vorderrades –, ist das mathematisch ziemlich schwierig und geht meist nur näherungsweise.

In der Praxis dagegen ist es sehr viel einfacher, mit dem Vorderrad eine vorgegebene Spur nachzufahren, als dies mit dem Hinterrad zu tun. Wie kommt das?

L 41.3 Es gibt genau vier einstellige Primzahlen: 2, 3, 5 und 7. Jede Kontonummer muss also aus diesen Ziffern gebildet werden.

- a) Keine zwei Kontonummern dürfen in den ersten sechs Stellen übereinstimmen, denn sonst blieben nur noch maximal die letzten vier Stellen, an denen sie sich unterscheiden könnten. Dies widerspräche der Voraussetzung, dass sich je zwei beliebige Kontonummern in wenigstens fünf Stellen unterscheiden.

Es gibt aber genau $4^6 = 4096$ verschiedene Möglichkeiten für die ersten sechs Ziffern einer Kontonummer, und da, wie eben gesehen, nur höchstens eine Kontonummer diese ersten sechs Ziffern haben kann, gibt es auch höchstens 4096 verschiedene Kontonummern.

- b) In der Argumentation bei a) haben wir allerdings noch sehr grob abgeschätzt – schließlich ist überhaupt nicht klar, ob und wie man jeden dieser 4096 sechsstelligen Kontonummernanfänge zu zehnstelligen Nummern so ergänzen kann, dass wirklich je zwei Ziffern in wenigstens fünf Stellen unterschiedlich sind. Dass dies tatsächlich nicht geht, zeigt folgendes Argument:

Angenommen, es gäbe bei der Bank n Kontonummern. Wir schreiben diese in Gedanken nebeneinander in eine lange Reihe. Unter jede der Kontonummern schreiben wir dann in einer Spalte alle jenen zehnstelligen Zahlen bestehend aus den vier erlaubten Ziffern, die sich von der entsprechenden Kontonummer in höchstens zwei Stellen unterscheiden. Das sind in jeder Spalte dann $10 \cdot 3 = 30$ Zahlen, die sich an genau einer der zehn Stellen von der gegebenen Kontonummer unterscheiden, und $\frac{10 \cdot 9}{2} \cdot 3^2 = 405$ Zahlen, die sich an genau zwei Stellen von der gegebenen Kontonummer unterscheiden (für die Wahl dieser beiden Stellen hat man genau $\frac{10 \cdot 9}{2}$ Möglichkeiten und für die Wahl der beiden neuen Ziffern je 3 Möglichkeiten). Zusammen mit der gegebenen Kontonummer selbst stehen in einer Spalte also insgesamt $1 + 30 + 405 = 436$ Zahlen. In allen Spalten zusammengenommen stehen also $n \cdot 436$ Zahlen.

Diese sind aber alle verschieden! Innerhalb einer Spalte ist dies klar, und wären zwei Zahlen aus zwei verschiedenen Spalten gleich, dann würden sich die zu diesen beiden Spalten gehörenden Kontonummern an höchstens $2 + 2 = 4$ Stellen unterscheiden – ein Widerspruch.

Also sind die $n \cdot 436$ Zahlen tatsächlich alle verschieden. Es gibt aber nur genau $4^{10} = 1\,048\,576$ verschiedene mögliche zehnstellige Zahlen, die man aus den vier Ziffern 2, 3, 5, 7 bilden kann. Daher muss $n \cdot 436 \leq 4^{10}$ gelten und demnach

$$n \leq \frac{1\,048\,576}{436} = 2404,99 \dots$$

Da n ganzzahlig ist, kann es somit höchstens 2404 Kontonummern geben.

Bemerkung: Es wäre interessant, die exakte Zahl der maximal möglichen Kontonummern zu erfahren – wir kennen sie leider auch nicht ...

L 41.4 Seien $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ sieben verschiedene ganzzahlige Nullstellen von $p(x)$. Da für jede Nullstelle ein Linearfaktor abgespalten werden kann, gibt es ein Polynom $r(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten so, dass

$$p(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4)(x - a_5)(x - a_6)(x - a_7)r(x)$$

gilt. Angenommen, das Polynom $q(x) = p(x) - 2004$ hätte nun auch eine ganzzahlige Nullstelle a . Dann wäre $0 = q(a) = p(a) - 2004$ und somit

$$2004 = p(a) = (a - a_1)(a - a_2)(a - a_3)(a - a_4)(a - a_5)(a - a_6)(a - a_7)r(a).$$

Da die a_i als verschieden vorausgesetzt sind, sind auch die $a - a_i$ alle verschieden, und dies bedeutet, dass man die Zahl $2004 = 2^2 \cdot 3 \cdot 167$ in ein Produkt aus acht ganzzahligen Faktoren zerlegen könnte, von denen die ersten sieben paarweise verschieden sind. Da 167 prim ist, muss einer dieser Faktoren dann aber durch 167 teilbar und somit dem Betrage nach größer oder gleich 167 sein. Zusätzlich müsste es noch wenigstens sechs weitere paarweise verschiedene Faktoren geben. Die sechs betragsmäßig kleinsten paarweise verschiedenen ganzen Zahlen sind $1, -1, 2, -2, 3, -3$ (man beachte, dass 0 als Faktor nicht auftauchen kann). Demnach wäre das gesamte Produkt dem Betrage nach in jedem Fall nicht kleiner als $1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 167 = 6012$, was zu groß ist.

Somit kann man die Zahl 2004 nicht wie gewünscht in ein Produkt zerlegen und es gibt daher keine ganzzahlige Nullstelle a von $q(x)$.

Dies gilt nicht mehr, wenn $p(x)$ nur mindestens sechs verschiedene Nullstellen hat. Man betrachte zum Beispiel

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x+3)(x+167) \\ &= x^6 + 170x^5 + 496x^4 - 850x^3 - 2501x^2 + 680x + 2004. \end{aligned}$$

Dieses Polynom hat genau die sechs verschiedenen ganzzahligen Nullstellen $1, -1, 2, -2, -3$ und -167 ; und das Polynom

$$q(x) = p(x) - 2004 = x^6 + 170x^5 + 496x^4 - 850x^3 - 2501x^2 + 680x$$

hat die ganzzahlige Nullstelle $x = 0$.

Der „tiefere“ Grund dafür, dass die Antwort im zweiten Teil anders ausfällt, ist natürlich, dass man 2004 in ein Produkt aus sechs verschiedenen ganzzahligen Faktoren zerlegen kann, nämlich $2004 = 1 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (-2) \cdot 3 \cdot 167$.

Lösungen zu Aufgabenblatt 42

L 42.1 Rechnen wir zunächst ein Beispiel: Die gedachte Zahl sei 567. Dann ist als Erstes $9 \cdot 567 - 1 = 5102$ zu berechnen und anschließend die Quersumme, also $5 + 1 + 0 + 2 = 8$ zu bestimmen. Daraus resultiert als Ergebnis $8 \cdot 5 + 2 = 42$. Im Folgenden wird gezeigt, dass tatsächlich stets 42 das Ergebnis ist. Betrachten wir hierzu eine beliebige positive ganze Zahl n der geforderten Art, also in Dezimaldarstellung

$$n = a_k \cdot 10^k + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \quad \text{mit} \quad 1 \leq a_k \leq a_{k-1} \leq \dots \leq a_1 < a_0 \leq 9.$$

Unter Verwendung von $9a_i = 10a_i - a_i$ gilt dann

$$\begin{aligned} 9 \cdot n - 1 &= (a_k) \cdot 10^{k+1} + (-a_k + a_{k-1}) \cdot 10^k + (-a_{k-1} + a_{k-2}) \cdot 10^{k-1} + \dots \\ &\quad + (-a_2 + a_1) \cdot 10^2 + (-a_1 + a_0) \cdot 10 + (-a_0 - 1) \\ &= (a_k) \cdot 10^{k+1} + (a_{k-1} - a_k) \cdot 10^k + \dots + (a_1 - a_2) \cdot 10^2 \\ &\quad + (a_0 - a_1 - 1) \cdot 10 + (10 - a_0 - 1). \end{aligned}$$

Die Zahlen in Klammern in den letzten beiden Zeilen sind hierbei aufgrund der Bedingung an die a_i Zahlen von 0 bis 9, es handelt sich also um die Dezimaldarstellung von $9 \cdot n - 1$. Somit ist die Quersumme von $9 \cdot n - 1$ gegeben durch

$$a_k + (a_{k-1} - a_k) + \dots + (a_1 - a_2) + (a_0 - a_1 - 1) + (10 - a_0 - 1) = 8.$$

Deswegen ist das Ergebnis der weiteren Rechnung stets $5 \cdot 8 + 2 = 42$.

L 42.2 Wir können offenbar annehmen, dass keine drei Punkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen, da sonst diese drei Punkte in geeigneter Reihenfolge einen Winkel von 0° einschließen.

Die konvexe Hülle der 180 gegebenen Punkte ist ein k -Eck mit $k \leq 180$; denn schließlich können einige der 180 Punkte auch im Inneren des von den übrigen Punkten gebildeten konvexen Vielecks liegen.

Die Innenwinkelsumme in diesem k -Eck ist bekanntlich $(k - 2) \cdot 180^\circ$. Nach Schubfachprinzip gibt es demnach wenigstens einen der k Innenwinkel, der kleiner oder gleich $\frac{k-2}{k} \cdot 180^\circ$ groß ist. Sei A der zu diesem Innenwinkel gehörige Eckpunkt des k -Ecks und seien $P_1, P_2, \dots, P_{179}$ die übrigen Punkte in der Reihenfolge, wie sie ein von A aus verlaufender Strahl überstreichen würde; da keine drei Punkte kollinear sind, ist diese Reihenfolge eindeutig. Dann ist, wiederum nach Schubfachprinzip, wenigstens einer der 178 Winkel $P_i A P_{i+1}$ für $1 \leq i \leq 178$ kleiner oder gleich $\frac{1}{178} \cdot \frac{k-2}{k} \cdot 180^\circ \leq \frac{1}{178} \cdot \frac{178}{180} \cdot 180^\circ = 1^\circ$. Hierbei wurde benutzt, dass der Bruch

$\frac{k-2}{k} = 1 - \frac{2}{k}$ für wachsendes k immer größer wird. Somit haben wir einen gesuchten Winkel gefunden.

L 42.3 Nach den gegebenen Vorschriften können wir nur in 6 Bezirken Rundfunkstationen errichten.

Zunächst zeigen wir, dass wir nicht mehr als 6 Stationen errichten dürfen. Da zwischen zwei Breitenkreisen bzw. zwischen zwei Längenkreisen jeweils nur eine Station stehen darf, ist 582 eine erste Obergrenze für die Anzahl der erlaubten Stationen.

Außerdem darf sich in den Bezirken einer Diagonale auch jeweils nur eine Station befinden. Aber wie viele Diagonalen gibt es überhaupt? Um das herauszufinden, zählen wir erst einmal, wie viele Bezirke zu einer Diagonalen gehören:

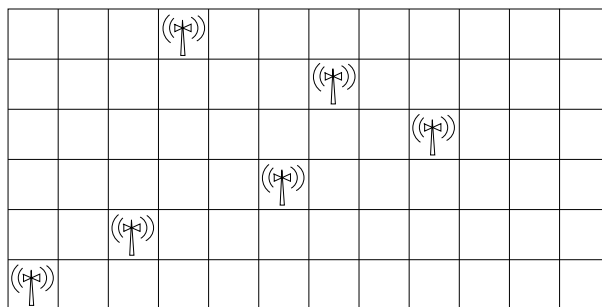
Gehen wir von einem Ausgangsfeld immer ein Feld nach rechts oben, so erreichen wir genau nach 582, $2 \cdot 582$, $3 \cdot 582$, ... Schritten wieder ein Feld, das sich zwischen denselben Breitenkreisen, und genau nach 2004, $2 \cdot 2004$, $3 \cdot 2004$, ... Schritten ein Feld, das sich zwischen denselben Längenkreisen wie das Ausgangsfeld befindet. Folglich erreichen wir das Ausgangsfeld nach $\text{kgV}(582, 2004) = 194\,388$ Schritten zum ersten Mal wieder.

Also hat jede Diagonale genau diese Anzahl an Feldern. Da je zwei Diagonalen von links unten nach rechts oben keine gemeinsamen Felder haben (sie sind „disjunkt“), gibt es

$$\frac{582 \cdot 2004}{\text{kgV}(582, 2004)} = 6 \quad (= \text{ggT}(582, 2004))$$

solche Diagonalen.

Nun zeigen wir noch ein Beispiel, wie man tatsächlich 6 Stationen auf Omega unterbringen kann. Folgendes 6×12 -Rechteck zeigt den Ausschnitt mit Radiostationen auf Omega:



Offensichtlich liegen diese 6 Stationen zwischen verschiedenen Breiten- und auch zwischen verschiedenen Längenkreisen. Aber auch die Diagonalregel ist nicht verletzt: Schauen wir uns zwei Felder zwischen zwei benachbarten Breitenkreisen an, so gehören sie genau dann zu ein und derselben Diagonalen, wenn ihr Abstand ein Vielfaches von 6 Feldern ist. Daraus folgt, dass allgemein zwei Felder, deren Abstand in „Breitenkreisrichtung“ x Felder und deren Abstand in „Längenkreisrichtung“ y Felder beträgt, genau dann auf einer gemeinsamen Diagonalen liegen, wenn $x - y$ oder

$x + y$ ein Vielfaches von 6 ist. Dies ist im Bild nie der Fall, die Rundfunkstationen liegen also auf verschiedenen Diagonalen.

L 42.4 Gesucht waren bei dieser Aufgabe nicht nur die achsenparallelen Quadrate, sondern alle Quadrate, deren Ecken auf den rot gefärbten Punkten liegen. Aber immerhin liegt jedes Quadrat mit Ecken auf den rot gefärbten Punkten passgenau in genau einem achsenparallelen Quadrat mit Ecken auf den gefärbten Gitterpunkten und umgekehrt liegen in einem achsenparallelen Quadrat mit Seitenlänge n genau n solche passgenauen nicht notwendig achsenparallelen Quadrate (siehe Skizze).

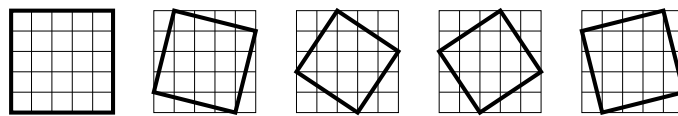


Abbildung 42.1: Der Fall $n = 5$

Der linke untere Eckpunkt eines achsenparallelen Quadrates der Seitenlänge n muss aber Koordinaten (a, b) mit $1 \leq a \leq 42 - n$ und $1 \leq b \leq 42 - n$ haben, damit auch alle übrigen Ecken des Quadrates auf gefärbten Punkten liegen. Es gibt also genau $(42 - n)^2$ solche achsenparallelen Quadrate der Seitenlänge n und in jedem von ihnen findet man genau n Quadrate mit Ecken auf den Gitterpunkten. Somit ist die Gesamtzahl an Quadraten mit gefärbten Eckpunkten gleich

$$\sum_{n=1}^{41} n \cdot (42 - n)^2.$$

Um nicht so viele Zahlen in den Taschenrechner tippen zu müssen, vereinfachen wir die Summe noch weiter – am Ende geht es sogar ohne Rechnerhilfe!

Zuerst fassen wir für $1 \leq n \leq 20$ jeweils den n -ten und den $(42 - n)$ -ten Summanden zusammen:

$$n(42 - n)^2 + (42 - n)n^2 = n(42 - n)((42 - n) + n) = 42 \cdot n \cdot (42 - n),$$

ersetzen dann $n = 21 - j$ und erhalten in der Summe

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{41} n \cdot (42 - n)^2 &= 21^3 + \sum_{n=1}^{20} 42 \cdot n \cdot (42 - n) \\ &= 21^3 + 42 \cdot \sum_{j=1}^{20} (21 - j)(21 + j). \end{aligned}$$

Mit der dritten binomischen Formel und der Summenformel für Quadratzahlen, nämlich $\sum_{j=1}^k j^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$, ergibt sich nun nacheinander

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{41} n \cdot (42 - n)^2 &= 21^3 + 42 \cdot \sum_{j=1}^{20} (21 - j)(21 + j) \\ &= 21^3 + 42 \cdot \sum_{j=1}^{20} (21^2 - j^2) \\ &= 21^3 + 42 \cdot \left(20 \cdot 21^2 - \sum_{j=1}^{20} j^2 \right) \\ &= 21^3 + 42 \cdot \left(20 \cdot 21^2 - \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} \right) \\ &= 21^3 \cdot (1 + 2 \cdot 20) - 7 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 41 \\ &= 41 \cdot 21 \cdot (21^2 - 7 \cdot 20) \\ &= 861 \cdot 301 \\ &= 258\,300 + 861 = 259\,161.\end{aligned}$$

Also gibt es genau 259 161 Quadrate, deren Ecken auf den rot gefärbten Punkten liegen.

Lösungen zu Aufgabenblatt 43

L 43.1 Die einzigen solchen Paare sind $(a, b) = (143, 143)$ und $(a, b) = (167, 334)$. Da a und b nach Voraussetzung dreistellig sind, gilt $100 \leq a, b < 1000$. Folglich ist die Zahl z , die wir durch das Hintereinanderschreiben von a und b erhalten, $z = 1000a + b$. Sei nun (a, b) ein solches Paar mit

$$ab \mid 1000a + b. \quad (43.1)$$

Als Teiler von ab und von $1000a$ teilt a dann auch b . Somit gibt es eine ganze Zahl k mit $b = ka$; und weil $100 \leq a, b < 1000$ ist, ist sogar $1 \leq k < 10$. Setzen wir $b = ka$ in (43.1) ein und teilen durch a , so erhalten wir

$$\begin{aligned} aka \mid 1000a + ka &= (1000 + k)a \\ \Leftrightarrow ka \mid 1000 + k. \end{aligned} \quad (43.2)$$

Dabei ist $ka = b < 1000$, so dass ka ein echter Teiler von $1000 + k$, d. h. kleiner als diese Zahl ist. Als Teiler von ka und von k teilt k dann auch 1000 und $\frac{1000}{k}$ ist eine ganze Zahl. Teilen der obigen Gleichung (43.2) durch k ergibt

$$a \mid \frac{1000}{k} + 1.$$

Hier muss wiederum a ein echter Teiler von $\frac{1000}{k} + 1$ sein. Wegen der beiden Bedingungen $1 \leq k < 10$ und $k \mid 1000$ brauchen wir nur noch die Werte 1, 2, 4, 5 und 8 für k zu überprüfen.

k	$\frac{1000}{k} + 1$	echte dreistellige Teiler von $\frac{1000}{k} + 1$
1	$1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$	$a = 143$
2	$501 = 3 \cdot 167$	$a = 167$
4	251 Primzahl	hat keine echten dreistelligen Teiler
5	$201 = 3 \cdot 67$	hat keine echten dreistelligen Teiler
8	126	hat keine echten dreistelligen Teiler

Folglich sind wegen $b = k \cdot a$ die beiden einzig möglichen Paare, die die Teilbarkeitsbedingung erfüllen können, $(143, 143)$ und $(167, 334)$.

Eine Probe ergibt, dass $z = 143143 = 7 \cdot 20449$ tatsächlich durch das Produkt $143 \cdot 143 = 20449$ und $z = 167334 = 3 \cdot 55778$ durch das Produkt $167 \cdot 334 = 55778$ teilbar ist.

L 43.2 Man kann weniger als die Hälfte aller natürlichen Zahlen von 1 bis 10^{20} als eine solche Summe schreiben.

Lässt sich die Zahl $z \leq 10^{20}$ als $z = a^2 + b^4 + c^5$ mit natürlichen Zahlen a, b, c schreiben, so gilt wenigstens $0 \leq a^2, b^4, c^5 \leq 10^{20}$, also

$$0 \leq a \leq \sqrt{10^{20}} = 10^{10}, \quad 0 \leq b \leq \sqrt[4]{10^{20}} = 10^5, \quad 0 \leq c \leq \sqrt[5]{10^{20}} = 10^4.$$

Damit nimmt $z = a^2 + b^4 + c^5$ in dem gewählten Bereich aber höchstens

$$\begin{aligned} & (10^{10} + 1)(10^5 + 1)(10^4 + 1) \\ &= 10^{19} + 10^{15} + 10^{14} + 10^{10} + 10^9 + 10^5 + 10^4 + 1 \\ &< 10^{19} + 7 \cdot 10^{15} < 10^{19} + 10^{19} < 5 \cdot 10^{19} = \frac{1}{2} \cdot 10^{20} \end{aligned}$$

verschiedene Werte an.

L 43.3 Wenn Pablo mit Sicherheit gewinnen will, zeichnet er am besten ein gleichseitiges Dreieck auf das Blatt Papier. Denn so ein gleichseitiges Dreieck hat ein paar schöne Eigenschaften: Wie jedes Dreieck lässt es sich in vier zu sich selbst ähnliche Dreiecke zerlegen, die folglich die halbe Kantenlänge haben. Das Schöne ist, dass der Inkreis des großen gleichseitigen Dreiecks genauso groß wie der Umkreis eines der kleinen Dreiecke ist. Da der Inkreis eines Dreiecks nach Definition vollständig im Inneren des Dreiecks liegt, kann Pablo also gewinnen, indem er die vier weißen Dreiecke so legt, dass ihre Inkreise mit den Umkreisen der vier Teildreiecke zusammenfallen. Damit hat er dann das rote Dreieck vollständig überdeckt.

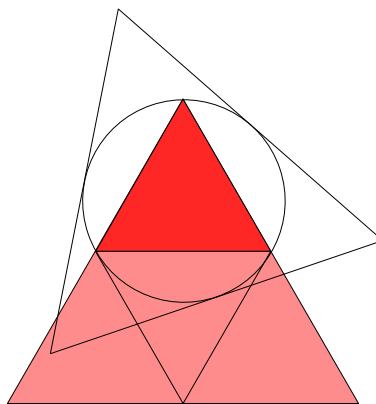


Abbildung 43.1: Abdeckung eines der Teildreiecke durch ein weißes Dreieck

Wenn hingegen Salvador die Form des roten Dreiecks bestimmen darf, so kann er gewinnen; zum Beispiel kann er ein gleichschenkliges Dreieck zeichnen, dessen Höhe über der Basis fünfmal so lang ist wie die Basis selbst. Wenn er dann die weißen Dreiecke quer zum roten legt, kann Pablo mit ihnen das rote nicht überdecken, denn in Richtung der Höhe des roten Dreiecks kann man mit den vier weißen Dreiecken zusammen maximal eine Ausdehnung hinbekommen, die viermal so lang ist wie die Basis; aber nach Salvadors Wahl ist die Höhe des roten Dreiecks fünfmal so lang wie seine Basis.

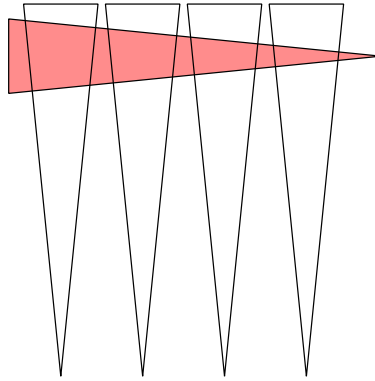


Abbildung 43.2: Beispiel zur Gewinnstrategie von Salvador

L 43.4 Zuerst berechnen wir, wie viele Möglichkeiten es bei gegebenem n gibt, die $2n$ Edelsteine auf die beiden Schalen zu verteilen (wer schon mit Binomialkoeffizienten gearbeitet hat, kann den nachfolgenden Abschnitt getrost überspringen): Es gibt $2n \cdot (2n - 1) \cdot \dots \cdot (n + 2) \cdot (n + 1) = \frac{(2n)!}{n!}$ Möglichkeiten (mit $k!$ wird das Produkt $k \cdot (k - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ bezeichnet), aus den $2n$ Steinen n Stück auszuwählen und in eine Reihe zu legen: Für die Wahl des ersten Steines gibt es $2n$ Möglichkeiten, für die Wahl des zweiten nur noch $2n - 1$ usw., und für den n -ten Stein schließlich noch $n + 1$. Legen wir die n Steine in eine Schale, so ist die Reihenfolge, in der sie gezogen hatten, nicht mehr wichtig. Vielmehr ergeben alle Anordnungen dieser n Steine dieselbe Schalenverteilung. Dafür gibt es nach demselben Prinzip wie oben genau $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ Möglichkeiten.

Insgesamt gibt es damit genau $\frac{(2n)!}{n! \cdot n!}$ mögliche Verteilungen der Steine auf die beiden Schalen. Der Mathematiker bezeichnet diese Zahl mit $\binom{2n}{n}$ und nennt sie den Binomialkoeffizienten „ $2n$ über n “.

Somit müssen sich die Mönche genau dann keine Sorgen machen, wenn $\binom{2n}{n}$ durch 3 teilbar ist. Für welche n ist dies nun der Fall?

Um dies herauszufinden, überlegen wir uns zunächst, wie viele Primfaktoren 3 in der Zahl $n!$ enthalten sind. Allgemein sei $v_3(k)$ die Anzahl der Primfaktoren 3 in der Primfaktorzerlegung der natürlichen Zahl k . Unter Benutzung der „Abrunden“-Funktion $\lfloor \cdot \rfloor$ kann man dann feststellen, dass genau $\lfloor n/3 \rfloor$ der n Faktoren in $n!$ durch 3 teilbar sind, also einen oder mehrere Primfaktoren 3 enthalten. Genau $\lfloor n/9 \rfloor$ wiederum enthalten mindestens zwei Primfaktoren 3 und allgemein enthalten genau $\lfloor n/3^k \rfloor$ der Faktoren mindestens k Primfaktoren 3. Damit erhält man

$$v_3(n!) = \lfloor n/3 \rfloor + \lfloor n/9 \rfloor + \dots + \lfloor n/3^k \rfloor + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \lfloor n/3^k \rfloor.$$

Hierbei erstreckt sich die Summe nur scheinbar bis ins Unendliche, denn sobald $3^k > n$ ist, sind die Summanden ja alle gleich 0. Nun können wir aber auch Folgendes

berechnen:

$$\begin{aligned}
 v_3\left(\binom{2n}{n}\right) &= v_3((2n)!) - 2 \cdot v_3(n!) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \lfloor 2n/3^k \rfloor - 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \lfloor n/3^k \rfloor \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} (\lfloor 2 \cdot (n/3^k) \rfloor - 2 \cdot \lfloor n/3^k \rfloor).
 \end{aligned}$$

Es bezeichne $\text{frac}(x)$ den gebrochenen Anteil der nichtnegativen reellen Zahl x , also $\text{frac}(x) = x - \lfloor x \rfloor$. Dann kann man sich (am besten einfach durch scharfes Hinschauen!) schnell überlegen, dass

$$\lfloor 2 \cdot x \rfloor - 2 \cdot \lfloor x \rfloor = \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 \leq \text{frac}(x) < 1/2 \\ 1, & \text{falls } 1/2 \leq \text{frac}(x) < 1 \end{cases}$$

gilt. $\binom{2n}{n}$ ist genau dann durch 3 teilbar, wenn $v_3\left(\binom{2n}{n}\right) \geq 1$ ist, und dies ist also genau dann der Fall, wenn für wenigstens ein $k \geq 1$ die Ungleichung $1/2 \leq \text{frac}(n/3^k) < 1$ gilt.

Mit dieser Aussage lässt sich die Aufgabe nun im Prinzip schon lösen, man kann sich durch einen kleinen Trick das Zählen der günstigen n aber noch etwas einfacher machen. Die vielen vorkommenden Dreierpotenzen legen die Betrachtung der Zahlen im Dreiersystem nahe. Wir schreiben nun also unsere Zahl n als

$$n = a_m \cdot 3^m + a_{m-1} \cdot 3^{m-1} + \dots + a_1 \cdot 3^1 + a_0 = [a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0]_3,$$

wobei die a_i jeweils eine der Ziffern 0, 1 oder 2 sind und $a_m \neq 0$ sein soll. Der Vorteil dieser Schreibweise wird schnell offenbar, denn es ist

$$\begin{aligned}
 n/3^k &= a_m \cdot 3^{m-k} + a_{m-1} \cdot 3^{m-k-1} + \dots + a_{k+1} \cdot 3^1 + a_k \\
 &\quad + a_{k-1}/3 + \dots + a_1/3^{k-1} + a_0/3^k
 \end{aligned}$$

und deswegen

$$\text{frac}(n/3^k) = a_{k-1}/3 + \dots + a_1/3^{k-1} + a_0/3^k.$$

Man beachte hierbei, dass der Term auf der rechten Seite kleiner oder gleich $s_k := 2/3 + 2/3^2 + 2/3^3 + \dots + 2/3^k$ ist und man diese Summe recht einfach berechnen kann: Es ist $2s_k = 3s_k - s_k = (2 + 2/3 + 2/3^2 + 2/3^3 + \dots + 2/3^{k-1}) - (2/3 + 2/3^2 + 2/3^3 + \dots + 2/3^k) = 2 - 2/3^k$, folglich ist $s_k < 1$.

Wenn nun alle $a_i \in \{0, 1\}$ sind für $0 \leq i \leq m$, dann ist sicher für jedes k

$$\begin{aligned}
 \text{frac}(n/3^k) &= a_{k-1}/3 + \dots + a_1/3^{k-1} + a_0/3^k \\
 &\leq 1/3 + 1/3^2 + 1/3^3 + \dots + 1/3^k = s_k/2 < 1/2.
 \end{aligned}$$

Ist jedoch $a_{k-1} = 2$, dann ist sicher $\text{frac}(n/3^k) \geq 2/3 > 1/2$.

Daraus schließen wir: $\binom{2n}{n}$ ist genau dann durch 3 teilbar, wenn für wenigstens ein $k \geq 1$ die Ungleichung $1/2 \leq \text{frac}(n/3^k) < 1$ gilt, und dies wiederum ist genau dann der Fall, wenn n in seiner Darstellung im Dreiersystem eine Ziffer 2 enthält.

Es ist nun relativ leicht, die Anzahl dieser n zu bestimmen – wir zählen einfach diejenigen n , die keine 2 in ihrer Dreierdarstellung enthalten, und ziehen die erhaltene Anzahl von 1000 ab. Wie viele n zwischen 1 und 1000 haben nun keine 2 in ihrer Dreierdarstellung?

Wegen $1000 = [1101001]_3$ gibt es genau die den 105 Binärdarstellungen der Zahlen von 1 bis $105 = [1101001]_2$ entsprechenden Dreierdarstellungen von Zahlen n mit der geforderten Eigenschaft. Für alle anderen $1000 - 105 = 895$ Zahlen n zwischen 1 und 1000 ist also $\binom{2n}{n}$ durch 3 teilbar und die Mönche können für diese n beruhigt in die Zukunft blicken.

Lösungen zu Aufgabenblatt 44

L 44.1 In 24 Stunden vollführt der Stundenzeiger zwei, der Minutenzeiger 24 Umdrehungen auf dem Ziffernblatt. Wenn wir die Uhr so mitdrehen, dass der Stundenzeiger immer nach oben zeigt, sieht man folglich (wegen des gleichen Drehsinns) den Minutenzeiger 22 Umdrehungen machen. Während jeder dieser Umdrehungen steht er genau zweimal senkrecht zum Stundenzeiger, nämlich einmal nach rechts und einmal nach links zeigend. Insgesamt stehen die beiden Zeiger also am Tag genau 44-mal senkrecht zueinander.

Beim ersten Senkrechtstand nach Mitternacht hat sich der (schnellere) Minutenzeiger genau um 90 Grad mehr gedreht als der Stundenzeiger. Wir rechnen am einfachsten in Grad und stellen noch fest, dass sich der Minutenzeiger (m_g sei sein zurückgelegter Winkel in Grad) genau 12-mal so schnell dreht wie der Stundenzeiger (s_g). Die Bedingung für den ersten Senkrechtstand lautet also:

$$m_g = s_g + 90 = \frac{1}{12}m_g + 90 \iff m_g = \frac{12 \cdot 90}{11} = \frac{1080}{11}.$$

Somit ist der Zeitpunkt des ersten Senkrechtstandes um $\frac{1080}{11} \cdot \frac{60}{360} \text{ min} = \frac{180}{11} \text{ min} \approx 16 \text{ min } 22 \text{ sek}$ nach Mitternacht.

Eine andere Möglichkeit, diesen Zeitpunkt zu berechnen, wäre übrigens die folgende: Drehen wir die Uhr nach wie vor so mit, dass der Stundenzeiger immer nach oben zeigt, so brauchen wir nur den Zeitpunkt zu bestimmen, an dem der Minutenzeiger eine Vierteldrehung vollführt hat. Da er sich, wie oben gesehen, in 24 Stunden genau 22-mal dreht, braucht er für diese Vierteldrehung genau $\frac{1}{4} \cdot \frac{24}{22} = \frac{3}{11}$ Stunden, was wieder $\frac{180}{11}$ Minuten entspricht.

L 44.2 Kirstin gewinnt, wenn sie klug spielt.

Zwischen Kirstin und Lars stehen insgesamt 2005 Kinder, davon eine gerade Anzahl links von Kirstin und eine ungerade Anzahl rechts oder umgekehrt. Kirstin gewinnt, wenn sie dafür sorgt, dass immer, wenn Lars am Zug ist, auf beiden Seiten eine ungerade Anzahl von Kindern, mindestens also eines zwischen ihnen steht. Folglich wird sie zu Anfang auf der Seite ein Kind berühren, wo die gerade Anzahl von Kindern steht. Wenn Lars nun im Laufe des Spiels seinen rechten Nachbar berührt, fasst Kirstin ihren linken Nachbar an, der ja von Lars aus gesehen rechts steht, so dass dort eine ungerade Anzahl von Kindern übrig bleibt – und entsprechend umgekehrt, wenn Lars seinen linken Nachbarn berührt. So geht es immer weiter, und da in jedem Schritt ein Kind den Kreis verlässt, muss nach spätestens 2004 Schritten Lars einen von Kirstins Nachbarn berühren, woraufhin Kirstin Lars berührt und so das Spiel gewinnt.

Bemerkung: Das Spiel ist, anders als viele andere Spiele, sogar sehr zu Gunsten von Kirstin aufgebaut: Sie muss nicht *von Anfang an* eine bestimmte Taktik verfolgen, um zu gewinnen. Denn da zu Anfang eine ungerade Zahl von Kindern im Kreis steht, ist dies folglich immer genau dann der Fall, wenn Kirstin wieder an der Reihe ist. Sie kann zunächst sogar ganz beliebig spielen, bis auf einer Seite nur noch ein Kind steht. Sollte Lars dieses berühren, kann sie natürlich im nächsten Schritt gewinnen. Solange sie ihrerseits jedoch dieses Kind nicht berührt, kann sie nicht verlieren, denn auf ihrer anderen Seite wird sie immer eine gerade Zahl von Kindern vorfinden, weil es insgesamt eine ungerade Zahl sein muss. Und damit kann sie dort nicht das letzte Kind durch Berühren herausnehmen, was nötig wäre, damit Lars gewinnt. – Armer Lars!

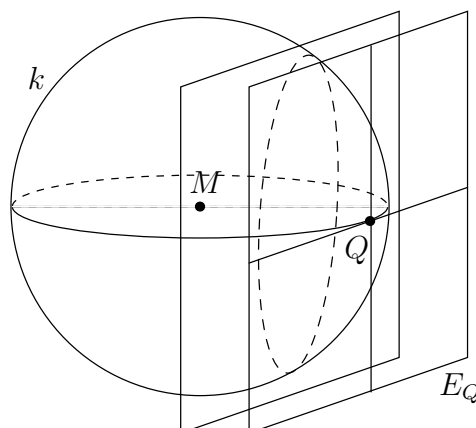
L 44.3 Weder die 0 noch die 5, 7 und 9 kommen in der Folge vor. Das sieht man wie folgt ein:

Käme eine der Ziffern 0, 5, 7, 9 vor, so betrachten wir die erste Stelle, an der eine solche Ziffer auftritt. Nach dem Bildungsgesetz müsste diese Ziffer eine Ziffer in einem Produkt von zwei Ziffern sein, die in der Folge vor dieser einen Ziffer stehen. Jedoch ist die einzige Möglichkeit, in einem Produkt von zwei Ziffern der Menge $\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$ eine der Ziffern 0, 5, 7, 9 zu finden, $3 \cdot 3 = 9$ (wie man leicht durch Probieren ermittelt). Es müssten also zwei Dreien in der Folge hintereinanderstehen. Nun gibt es jedoch zu Beginn keine zwei aufeinanderfolgenden ungeraden Ziffern, und auch nicht nach Anfügen des ersten (geraden!) Produktes. Damit ist jedes Produkt, was aus zwei aufeinanderfolgenden, bereits bekannten Ziffern gebildet wird, gerade, und weiter entsteht beim Anfügen eines neuen Produktes ebenso kein Paar ungerader Ziffern, denn das Produkt, das höchstens zweistellig ist, wird an eine gerade Ziffer angefügt (die Endziffer des vorigen Produktes) und hat als letzte (genauer: einzige oder zweite) Ziffer eine gerade Ziffer. Damit kann es insbesondere keine zwei Dreien hintereinander geben, so dass die Annahme, es gäbe eine der Ziffern 0, 5, 7, 9 in der Folge, zum Widerspruch geführt wurde.

L 44.4 Zunächst stellen wir uns den Kristall als kugelrund vor – dies ändert offenbar nichts an der Aufgabe, denn man kann dies durch Hinzufügen von Kristall erreichen, der für diese Aufgabe nur Füllmaterial ist. Der Mittelpunkt dieser Kristallkugel k sei M und r sei ihr Radius.

Für jeden Punkt Q auf der Oberfläche von k betrachten wir nun die Tangentialebene E_Q an der Kugel in Q (das ist die Ebene, die die Kugel in dem Punkt Q berührt) und verschieben diese gedanklich parallel in Richtung $\overrightarrow{QM}$, bis sie nach einer Verschiebung um $2r$ wieder tangential an der Kugel ist. Betrachtet man den Anteil des Goldes, der während dieses Verschiebens auf derselben Seite von E_Q wie Q ist, so ist dieser zu Beginn bei 0 Prozent und am Ende bei 100 Prozent.

Da es beim Verschieben keine Sprünge in diesem Anteil geben kann (das Verschieben ist eine *stetige* Bewegung), muss also irgendwann die Ebene E_Q das Gold genau



halbieren. Die Streckenlänge, um die man E_Q bis dahin verschieben musste, nennen wir d_G . Offenbar gilt $0 < d_G < 2r$.

Ganz analog gilt das natürlich auch für das Silber und das Platin, so dass man auch hier nach Verschieben um d_S bzw. d_P Ebenen erhält, die parallel zu E_Q sind und das Silber bzw. das Platin genau halbieren.

Zu jedem Punkt Q auf der Kugeloberfläche betrachten wir nun das Paar $(x_Q, y_Q) = (d_G - d_P, d_G - d_S)$.

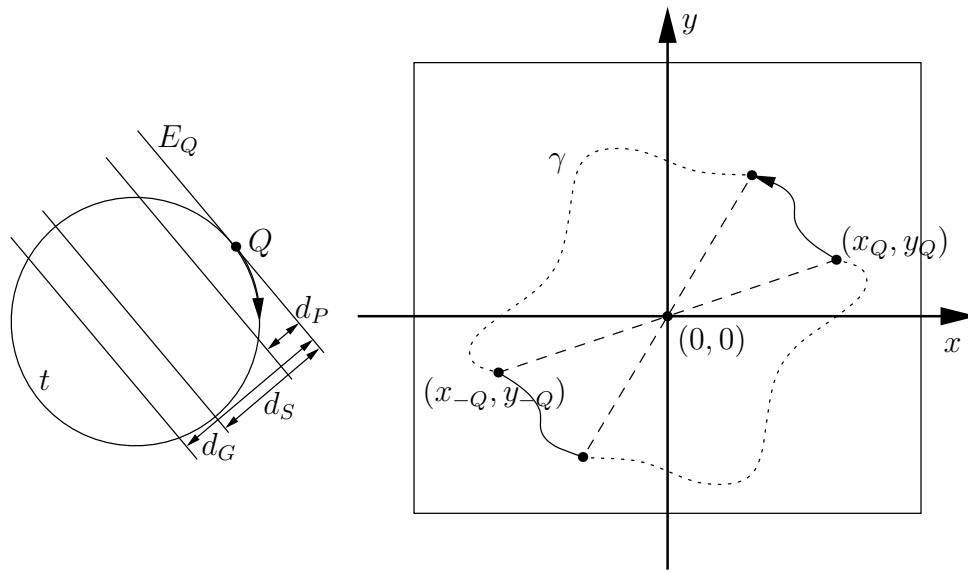
Eine wichtige Beobachtung ist dabei: Wenn $-Q$ den zu Q gegenüberliegenden Punkt auf der Oberfläche von k bezeichnet, so gilt

$$(x_{-Q}, y_{-Q}) = (-x_Q, -y_Q).$$

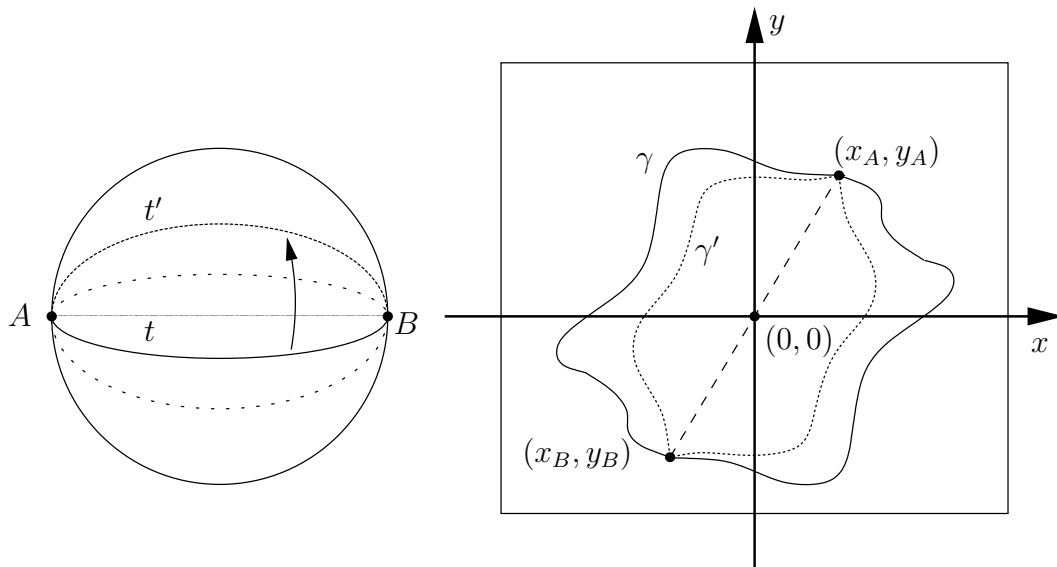
Dies folgt einfach aus der Tatsache, dass die Ebenen, die Gold, Silber und Platin halbieren, für Q und $-Q$ dieselben sind, man aber in genau entgegengesetzte Richtungen verschieben muss, um diese zu erhalten.

Nun lassen wir Q auf der Oberfläche von k einen Großkreis t (das ist ein Kreis maximalen Radius auf der Kugeloberfläche – wie z. B. der Äquator oder jeder Längengrad) entlangfahren. Die Punkte (x_Q, y_Q) beschreiben dabei eine geschlossene Kurve γ in der Koordinatenebene. Zu jedem Punkt (x, y) auf dieser Kurve gehört, wie eben gesehen, auch der am Ursprung $(0, 0)$ gespiegelte Punkt $(-x, -y)$ zur Kurve.

Daraus folgt, dass der Ursprung im Inneren der von der Kurve umschlossenen Fläche liegen muss.



Nun drehen wir den Großkreis t in Gedanken um 180° um einen seiner Durchmesser und beobachten das Verhalten der Kurve γ dabei. Diese ist, wie eben gesehen, zu jedem Zeitpunkt während dieser Drehung punktsymmetrisch zum Ursprung und die beiden Punkte (x_A, y_A) und (x_B, y_B) , die zu den Endpunkten A, B der Drehachse gehören, bleiben fest. Da am Ende der Drehung wieder derselbe Großkreis wie zu Beginn vorliegt, erhält man am Ende auch dieselbe Kurve γ wie zu Beginn – wichtig ist aber, dass während der Drehung die beiden Teile der Kurve zwischen (x_A, y_A) und (x_B, y_B) die Plätze getauscht haben!



Zu irgendeinem Zeitpunkt muss die Kurve also den Ursprung $(0,0)$ überstrichen haben. Zu dieser Kurve gehört also ein Punkt Q auf der Kugeloberfläche, für den

$d_G - d_S = 0 = d_G - d_P$ ist. Die drei Ebenen, welche die jeweiligen Materialien halbieren, fallen also für diesen Punkt Q zu einer einzigen zusammen, und wenn die Mönche entlang dieser Ebene schneiden, retten sie ihr Kloster.

Bemerkung 1: Der angegebene Beweis ist, streng mathematisch betrachtet, nicht ganz zufriedenstellend, da er an einigen Stellen zwar offensichtliche, aber in diesem Sinne eben „nur“ anschauliche Argumente verwendet. Ein „ganz“ exakter Beweis benutzt Begriffe der höheren Mathematik aus dem Bereich der Topologie. Im Kern ist er aber dem oben angegebenen identisch. Benutzt wird meist der *Satz von Borsuk-Ulam*, welcher, im Spezialfall unseres Beweises, sicherstellt, dass beim Variieren von Q auf der Kugel irgendwann einmal $(x_Q, y_Q) = (0, 0)$ ist

Bemerkung 2: Etwas anders verpackt findet man die Aussage der Aufgabe auch in vielen Lehrbüchern der Topologie. Dort wird die Aussage oft „Ham-Sandwich-Theorem“ genannt. Ins Deutsche übersetzt heißt das so viel wie „Satz vom Schinkenbrötchen“. Aufgabe ist es dann, die beiden Hälften eines Brötchens und den dazwischen liegenden Schinken durch einen ebenen Messerschnitt in je zwei gleiche Hälften zu teilen.

Bemerkung 3: Viele Einsender behaupteten, dass jede Ebene, die durch den Schwerpunkt zum Beispiel des Goldanteils verläuft, das Gold auch halbieren muss.

Das ist falsch!

Als einfaches Gegenbeispiel denke man sich den Goldanteil in Form eines regelmäßigen Tetraeders. Ein Schnitt durch dessen Schwerpunkt parallel zu einer Seitenfläche teilt das Tetraeder im Verhältnis 27 : 37.

Lösungen zu Aufgabenblatt 45

L 45.1 Dem Aufgabentext entsprechend hat der Baum genau 3 Äste mit einem Durchmesser von 2 m, 3^2 Äste mit einem Durchmesser von 1 m, 3^3 Äste mit einem Durchmesser von $\frac{1}{2}$ m, ..., 3^k Äste mit einem Durchmesser von 2^{2-k} m, falls $2^{2-k+1} \geq 0,003$ m ist. Letztere Bedingung kann man umformen zu $2^k \leq 2666$ (weil 2^k ganzzahlig ist), was wegen $2^{11} = 2048 < 2666 < 4096 = 2^{12}$ genau für alle k mit $1 \leq k \leq 11$ gilt.

Somit hat unser Baum insgesamt

$$3^1 + 3^2 + \dots + 3^{11} = 3 \cdot (1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{10}) = 3 \cdot \frac{3^{11} - 1}{3 - 1} = 265\,719$$

Äste. Da jeder Ast drei Kastanien trägt, hängen genau $3 \cdot 265\,719 = 797\,157$ Kastanien am Baum.

L 45.2 Ein gleichseitiges Dreieck kann man wie folgt in drei gleichschenklige Trapeze zerlegen:

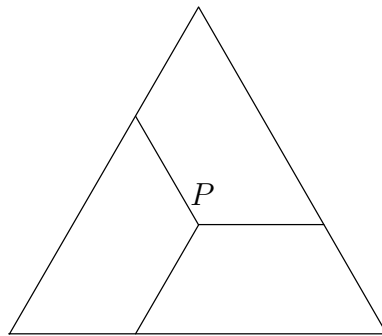


Abbildung 45.1: Zerlegung des gleichseitigen Dreiecks

Die Wahl des Punktes P ist dabei sogar beliebig, er muss nur durch drei Strecken mit dem Rand verbunden werden, die zu den drei Seiten parallel sind, und zwar in der Anordnung wie gezeigt oder gespiegelt dazu. Vom Prinzip her ist dies dann auch schon die einzige Möglichkeit der Lösung. (Wenn man mehr als drei Trapeze zulässt, gibt es selbstverständlich noch mehr Lösungen.)

Mit Hilfe zweier solcher gleichseitiger Dreiecke und zweier weiterer Trapeze kann man dann ein längliches Rechteck unterteilen:

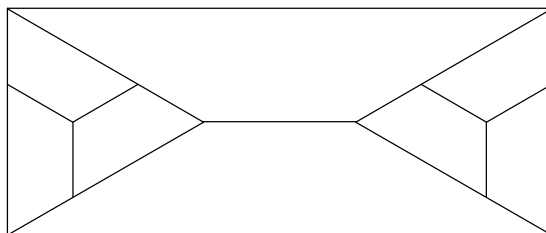


Abbildung 45.2: Zerlegung eines länglichen Rechtecks

Leider geht das so noch nicht für ein Quadrat oder allgemeiner ein Rechteck, dessen Seiten zumindest annähernd gleich lang sind, weil das gleichseitige Dreieck dafür zu „breit“ ist – wenn man aber das Quadrat in zwei Rechtecke unterteilt, geht es gut:

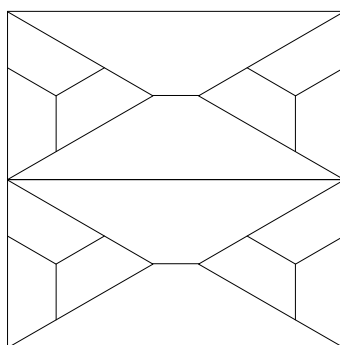


Abbildung 45.3: Zerlegung des Quadrates in 16 Trapeze

Man kann sich auch mit einem anderen Trick behelfen und braucht dann nur 12 statt 16 Trapeze:

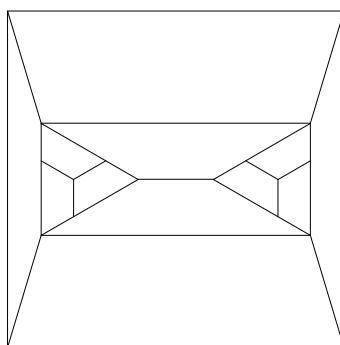


Abbildung 45.4: Zerlegung des Quadrates in 12 Trapeze

Wie auch schon beim ersten Dreieck und bei fast allen im Folgenden gezeigten Unterteilungen gilt dabei: Im Detail kann die Unterteilung in gewissen Grenzen variiert werden – hier die Größe des inneren Rechtecks, die die Winkel der äußeren Trapeze festlegt.

Schließlich haben wir sogar noch Unterteilungen mit 10 bzw. 9 Trapezen gefunden:

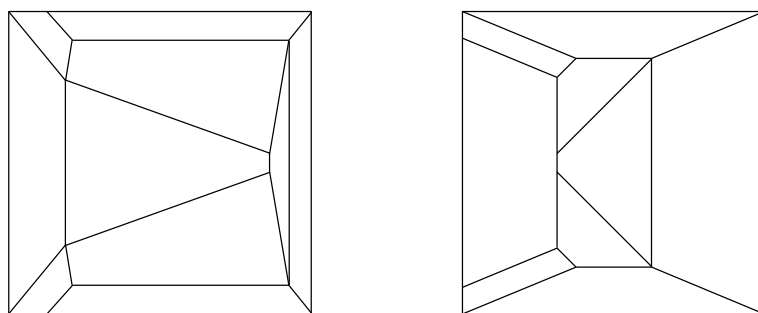


Abbildung 45.5: Zerlegung des Quadrates in 10 bzw. in 9 Trapeze

Bei der linken Unterteilung können der Winkel der beiden von den linken Ecken ausgehenden Strecken zu der linken Seite (etwas weniger als 45°), die Länge dieser Strecken sowie eine weitere Länge noch variiert werden; bei der rechten Unterteilung sind die Winkel festgelegt, weil nur auf eine Art der gestreckte Winkel zustande kommt, bei den Seitenlängen kann man wiederum zwei Wahlen treffen.

Der aktuelle uns bekannte Rekord liegt damit bei 9 Trapezen. Wir können aber nicht sagen, ob es nicht noch besser geht.

Unter den Einsendungen war das Beste die oben gezeigte Figur mit 12 Trapezen. Der Anerkennungspreis geht an Daniel – Glückwunsch!

Die Antwort auf die Zusatzfrage lautet:

Man kann jedes beliebige Dreieck in endlich viele solche Trapeze zerlegen!

Die Konstruktion solcher Zerlegungen ist allerdings, abhängig von den Innenwinkeln in den Dreiecken, teilweise etwas aufwendig.

Wir beginnen mit der Konstruktion von Zerlegungen gleichschenkliger Dreiecke; für ein spezielles davon, nämlich das mit Basiswinkel 60° , ist uns bereits eine Lösung bekannt – darauf aufbauend konstruieren wir alle anderen Dreieckszerlegungen.

Gleichschenklige Dreiecke mit einem Basiswinkel α mit $30^\circ < \alpha < 60^\circ$ lassen sich auf folgende Weise zerlegen:

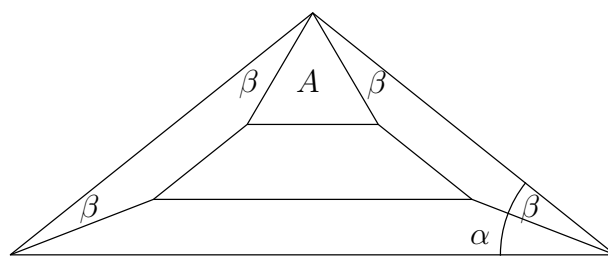


Abbildung 45.6: Gleichschenkliges Dreieck mit Basiswinkel α mit $30^\circ < \alpha < 60^\circ$

Dabei wird $\beta = \frac{180^\circ - 2\alpha - 60^\circ}{2} = 60^\circ - \alpha$ gewählt, und in der Tat ist dieser Wert kleiner als 30° , also kleiner als α . Das übrig bleibende Dreieck A ist dann nach Konstruktion gleichseitig, kann also weiter zerlegt werden.

Gleichschenklige Dreiecke mit einem Basiswinkel $\alpha \leq 30^\circ$ kann man wie folgt zerlegen:

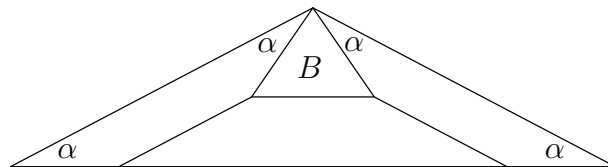


Abbildung 45.7: Gleichschenkliges Dreieck mit Basiswinkel $\alpha \leq 30^\circ$

Das entstehende offensichtlich gleichschenklige Dreieck B hat an der Spitze einen Winkel von $180^\circ - 2\alpha - 2\alpha$, damit ist der Basiswinkel 2α , also doppelt so groß wie vorher. Solange 2α noch kleiner gleich 30° ist, wiederholen wir den Vorgang. Wird der Basiswinkel schließlich einmal größer als 30° , so muss er nach Vorgabe kleiner gleich 60° bleiben, und für solch ein gleichschenkliges Dreieck ist uns eine Zerlegung bekannt.

Für gleichschenklige Dreiecke mit einem Basiswinkel größer als 60° geht das Verfahren etwas ähnlich, nur dass wir den Winkel an der Spitze betrachten, der nun kleiner als 60° ist: Wir zerlegen das Dreieck so, dass ein neues gleichschenkliges Dreieck mit einem doppelt so großen Winkel an der Spitze entsteht. Irgendwann (nach endlich vielen Schritten) haben wir dann ein Dreieck mit einem Winkel an der Spitze im Intervall $[60^\circ, 120^\circ[$, folglich einem Basiswinkel im Intervall $]30^\circ, 60^\circ]$, für das wir ja bereits eine Zerlegung kennen.

Eine Zerlegung eines solchen gleichschenkligen Dreiecks mit einem Winkel 2δ an der Spitze sieht so aus:

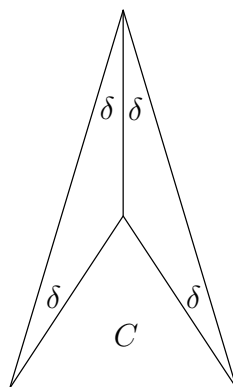


Abbildung 45.8: Gleichschenkliges Dreieck mit Basiswinkel $\alpha \geq 60^\circ$

Die beiden gleichschenkligen Dreiecke mit Basiswinkel δ können wir bereits zerlegen, da natürlich $\delta \leq 30^\circ$ ist. Das neue gleichschenklige Dreieck C hat tatsächlich an der Spitze einen Winkel 4δ , wie man leicht nachrechnet.

Damit können wir nun jedes gleichschenklige Dreieck in eine endliche Anzahl an gleichschenkligen, nicht-rechtwinkligen Trapezen zerlegen.

Damit ist auch der Fall eines beliebigen Dreiecks schnell erledigt, denn dieses kann man in jedem Fall in sechs gleichschenklige zerlegen: Man nehme den Inkreismittelpunkt I und die drei Radien auf die drei Seiten (die natürlich gleich lang sind). Ihre Fußpunkte verbinde man paarweise; so erhält man sechs Dreiecke. Dass die „inneren“ drei gleichschenklige sind, erkennt man sofort. Dass dies auch für die äußeren gilt, ist ebenfalls leicht einzusehen,

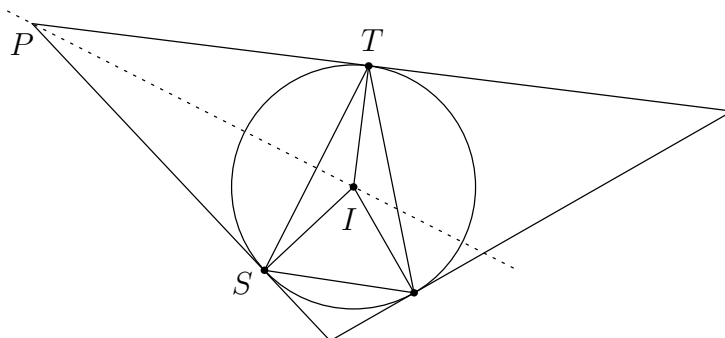


Abbildung 45.9: Zerlegung eines allgemeinen Dreiecks in gleichschenklige Dreiecke

denn spiegelt man die Figur an der Geraden durch P und I , so gehen S und T als Berührungspunkte der beiden Tangenten von P an den Inkreis ineinander über, folglich muss auch PST ein gleichschenkliges Dreieck sein.

Anmerkungen:

In vielen Fällen kann man die Zahl der benötigten Trapeze noch deutlich reduzieren. Wir haben auf eine solche Verbesserung verzichtet, weil sie die Übersichtlichkeit der – ja eher nur für theoretische Zwecke nützlichen – Lösung stören würde. Außerdem bleibt bei allen uns bekannten Verfahren (das sind zugegebenermaßen auch nicht allzu viele) eine Eigenschaft bestehen: Es gibt keine obere Schranke für die Zahl der benötigten Trapeze. Dass man spitze Winkel auch nur mit sehr spitzwinkligen Trapezen ausfüllen kann, könnte dafür sprechen, dass das allgemein gilt. Einen Beweis dafür oder für das Gegenteil können wir jedoch nicht liefern.

Das gezeigte Zerlegungsverfahren lässt vermuten, dass man in jedem Fall ein oder mehrere gleichseitige Dreiecke als „Kerne“ von weiteren Hilfskonstruktionen benötigt. Diese Vermutung ist falsch, wie wir nach einigem Suchen entdeckt haben: Ein Dreieck mit Winkeln $22,5^\circ$, $67,5^\circ$ und 90° lässt sich auf andere Art in fünf Trapeze zerlegen – dabei sind alle auftretenden Winkel Vielfache von $22,5^\circ$ – und ein gleichschenkliges Dreieck mit Basiswinkel $81\frac{9}{11}^\circ$ in sieben Trapeze (die Winkel lassen sich sämtlich leicht berechnen, wenn man mit dem Winkel an der Spitze beginnt, bei den Seitenlängen hat man wiederum gewisse Freiheiten):

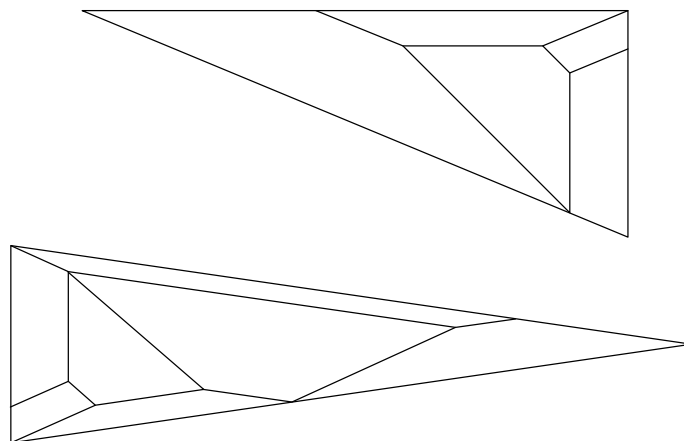


Abbildung 45.10: Zerlegung spezieller Dreiecke in fünf bzw. sieben Trapeze

Insofern gibt es keinen Grund anzunehmen, dass es nicht eine größere Menge an Dreiecken gibt, die sich zum einen so zerlegen lassen, dass in der Zerlegungsstruktur kein anderes Dreieck auftaucht, und zum anderen mit verhältnismäßig wenigen Trapezen auskommen.

L 45.3 Man muss Olaf wieder enttäuschen: Seine Folge ist auch nicht periodisch. Angenommen, die Folge ist periodisch. Dann gibt es eine maximale Anzahl n aufeinanderfolgender Achten, oder aber die Folge besteht nur aus Achten. Letzteres ist offenbar nicht der Fall.

Zunächst setzen wir die Folge ein wenig fort:

$$1, 2, 2, 4, 8, 3, 2, 2, 4, 6, 4, 8, 2, 4, 2, 4, 3, 2, 1, 6, 8, 8, 8, 1, 2, \dots$$

Wie man sieht, muss $n \geq 3$ sein. Angenommen, wir haben nun diese n aufeinanderfolgenden Achten irgendwo gefunden. Dann ergeben sich aus diesen an geeigneter Stelle später in der Folge $n - 1$ Produkte 64, also die Ziffernfolge 6, 4, 6, 4, $\dots$, 6, 4, bestehend aus insgesamt $2n - 2$ Ziffern. Hieraus wiederum entstehen dann $2n - 3$ Produkte 24, also die Ziffernfolge 2, 4, 2, 4, $\dots$, 2, 4 mit insgesamt $4n - 6$ Ziffern. Diese Ziffernfolge erzeugt schließlich später in der Folge $4n - 7$ Produkte 8, also $4n - 7$ aufeinanderfolgende Achten. Wegen $n \geq 3$ ist nun $4n - 7 \geq n + 1$, es gibt daher mindestens $n + 1$ aufeinanderfolgende Achten in der Folge im Widerspruch zur Maximalität von n .

Also war die Annahme falsch und die Folge ist nicht periodisch.

L 45.4 Der Bibliothekar hat erkannt, dass wenigstens einmal die heilige Regel des Konfuzius gebrochen worden sein muss! Um das einzusehen, kann man folgende Überlegung machen: Sei a_i die Nummer des Buches an der i -ten Stelle in der Buchreihe zu einem bestimmten Zeitpunkt. Vor sehr langer Zeit war also einmal

$a_1 = 1, a_2 = 2, \dots, a_{999} = 999$. Wenn für zwei beliebige Stellen i und j (mit $i < j$) in der Buchreihe $a_i > a_j$ gilt, dann nennen wir das eine *Inversion*. Die Buchreihe hat also genau so viele Inversionen, wie es Buchpaare gibt, bei denen dasjenige mit der größeren Nummer vor dem mit der kleineren Nummer steht. Eine (kurze) Buchreihe der Form 2, 4, 3, 1 hätte also genau 4 Inversionen.

Sei I die Anzahl der Inversionen in der Buchreihe zu einem bestimmten Zeitpunkt. Zu Beginn ist sicher $I = 0$.

Nimmt nun ein Bibliotheksbenutzer eines der Bücher, es sei A genannt, aus der Reihe und stellt es später an einer anderen Stelle wieder in die Reihe, so gilt für jedes Buch B , das zwischen alter und neuer Position des Buches A steht: Lag vor dem Herausnehmen eine Inversion zwischen A und B vor, dann ist das nach dem Wiedereinstellen nicht mehr der Fall, und lag vor dem Herausnehmen keine Inversion vor, so hat man, nachdem Buch A wieder hineingestellt wurde, eine Inversion zu B vorliegen. Wenn also vor dem Herausnehmen von A mit genau x Büchern zwischen alter und neuer Position eine Inversion vorlag und mit genau y Büchern dies nicht der Fall war, so hat man nach dem Hineinstellen genau y Inversionen mit den betrachteten Büchern vorliegen. Die Anzahl I der Inversionen ändert sich also um $-x + y$. Wenn das Hineinstellen aber nun nach der Regel des Konfusius erfolgt, ist $x + y$ und damit auch $y - x$ gerade (denn $y - x = y + x - 2x$). Also ändert sich I um eine gerade Zahl!

Da I zu Beginn gerade war, muss es also immer gerade bleiben, wenn alle die Regeln befolgen.

Gilt nun aber, wie vom Bibliothekar mit Schrecken beobachtet, $a_1 = 999, a_2 = 998, \dots, a_{999} = 1$, so steht jedes Buchpaar in Inversion, es gibt also genauso viele Inversionen, wie es Paare von Büchern gibt, und das sind bekanntlich genau $\frac{999 \cdot 998}{2} = 999 \cdot 499$.

Diese Zahl ist sicher ungerade, und deswegen muss die Regel des Konfusius irgendwann einmal gebrochen worden sein.

Lösungen zu Aufgabenblatt 46

L 46.1 Zunächst „grob gesagt“: Das sieht alles sehr merkwürdig aus! Denn eine einzige Stimme macht mehr als 5 Prozentpunkte aus, während alle anderen Stimmen für Svenjas Partei weniger als 5 Prozent wert sind? Das geht nur, wenn es gar keine anderen Stimmen gibt; und dann darf es inklusive Svenja nicht mehr als 10 Wähler geben, damit ihre Partei mit ihrer einen Stimme auf ein zweistelliges Ergebnis kommt.

Diese Argumentation ist zwar an sich richtig, aber doch recht schwammig formuliert; wir wollen es auch noch ganz korrekt mit (einfachen) Formeln probieren (wobei sich übrigens genau die Überlegungen vom Anfang darin verstecken!):

Sei n die Gesamtzahl der Wähler ohne Svenja, und p sei die Anzahl derjenigen Wähler ohne Svenja, die Svenjas Wunschartei wählen. Sollte $n = 0$ sein, ist das Wahlergebnis nicht definiert; im Folgenden sei $n \neq 0$. Nach Voraussetzung gilt dann:

$$\frac{p}{n} < 0,05, \quad \frac{p+1}{n+1} \geq 0,10.$$

Differenzbildung führt zu

$$0,05 < \frac{p+1}{n+1} - \frac{p}{n} \leq \frac{p+1}{n} - \frac{p}{n} = \frac{1}{n},$$

außerdem gilt ja $\frac{p}{n} < 0,05$, insgesamt also

$$p \cdot 0,05 \leq \frac{p}{n} < 0,05.$$

Daraus folgt unmittelbar $p = 0$. Und dann folgt aus der zweiten gegebenen Ungleichung $\frac{1}{n+1} \geq 0,10$, also $n \leq 9$. Damit nimmt Svenja an, dass sie die einzige Anhängerin ihrer Partei ist und dass außer ihr in ihrem Wahlbüro höchstens neun weitere Leute wählen. Es ist also die Wahlbeteiligung sehr niedrig – oder der Wahlbezirk sehr klein. Und solch einen kleinen Wahlbezirk gibt es tatsächlich: Die Gemeinde Hallig Gröde in Schleswig-Holstein! Vermutlich wohnt Svenja somit dort.

Denn vor 7 Jahren kann unser konstruierter Fall sogar Realität gewesen sein: Damals gab es auf Hallig Gröde (bei Husum im Wattenmeer gelegen) elf Wahlberechtigte, von denen zwei nicht zur Wahl gingen, und es entfiel auf eine der Parteien (die Grünen) genau eine Stimme. (Quelle dazu: <http://www.rz-online.com/on/02/09/10/topnews/wahl-klein.htm>)

In diesem Jahr, 2005, gab es auf Hallig Gröde 12 Wahlberechtigte, von denen 11 wählten, also zu viele für unsere Aufgabe: Die beiden Parteien mit genau einer Stimme (Grüne und Linke) kamen auf je „nur“ 9,1 Prozent (Quelle: <http://www.statistik-sh.de/BW05/Aktuell/BW54039.htm>).

L 46.2 Äquivalente Umformungen der Gleichung führen der Reihe nach zu den Gleichungen:

$$\begin{aligned} b + 2a &= \frac{3}{46}ab \\ 46 \cdot 3b + 92 \cdot 3a &= 9ab \\ 46 \cdot 92 &= 9ab - 46 \cdot 3b - 92 \cdot 3a + 46 \cdot 92 = (3a - 46)(3b - 92). \end{aligned}$$

Die beiden Faktoren $(3a - 46)$ und $(3b - 92)$ müssen also zueinander komplementäre Teiler von $46 \cdot 92 = 4232 = 2^3 \cdot 23^2$ sein. Diese listen wir in folgender Tabelle auf; dabei ist die Zuordnung zu den beiden Faktoren deswegen eindeutig, weil 46 und 92 (und damit auch $3a - 46$ und $3b - 92$) verschiedene Reste beim Teilen durch 3 lassen.

Teiler 1 = $3a - 46$	Teiler 2 = $3b - 92$	a	b	Probe: $\frac{1}{a} + \frac{2}{b}$
4232	1	1426	31	$\frac{3}{46}$
2	2116	16	736	$\frac{3}{46}$
1058	4	368	32	$\frac{3}{46}$
8	529	18	207	$\frac{3}{46}$
23	184	23	92	$\frac{3}{46}$
92	46	46	46	$\frac{3}{46}$

Ganz fertig sind wir noch nicht, zumindest formell: Wir müssen uns auch über die negativen Teiler Gedanken machen! Damit aber a und b positiv ganzzahlig werden (wie verlangt), darf der eine Teiler nicht kleiner als -43 , der andere nicht kleiner als -89 sein. Damit wäre bei negativen Faktoren ihr Produkt jedoch kleiner gleich $(-43) \cdot (-89) = 3827 < 4232$, was ein Widerspruch ist.

Somit sind die Lösungspaare (a, b) genau die sechs Paare $(16, 736)$, $(18, 207)$, $(23, 92)$, $(46, 46)$, $(368, 32)$ und $(1426, 31)$.

L 46.3 Angenommen, in Christophs Sparschwein befinden sich e Ein-Euro- und z Zwei-Euro-Münzen. Die Wahrscheinlichkeit, aus dem Sparschwein genau drei Euro mit zwei Münzen herauszunehmen, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, eine Ein- und eine Zwei-Euro-Münze zu ziehen. Wenn man sich die Münzen als nacheinander gezogen denkt, gibt es dafür zwei Möglichkeiten: Erst die Ein-Euro-Münze (Wahrscheinlichkeit: $\frac{e}{e+z}$), dann die Zwei-Euro-Münze (Wahrscheinlichkeit: $\frac{z}{e+z-1}$, insgesamt also $\frac{e}{e+z} \cdot \frac{z}{e+z-1}$) oder umgekehrt (Wahrscheinlichkeit dafür: $\frac{z}{e+z} \cdot \frac{e}{e+z-1}$).

Die Wahrscheinlichkeit dafür, genau drei Euro zu ziehen, ist daher genau

$$\frac{2ez}{(e+z)(e+z-1)}.$$

(Für diejenigen, die bereits Binomialkoeffizienten kennen: Auch damit kommt man – natürlich – auf dasselbe Ergebnis: Man hat offenbar genau $\binom{e+z}{2} = \frac{(e+z)(e+z-1)}{2}$ Möglichkeiten, zwei Münzen herauszunehmen, und es gibt $e \cdot z$ Möglichkeiten darunter, bei denen die beiden gezogenen Münzen verschiedene Werte anzeigen. Die Wahrscheinlichkeit beträgt folglich $\frac{e \cdot z}{\frac{(e+z)(e+z-1)}{2}} = \frac{2ez}{(e+z)(e+z-1)}$.)

Diese Wahrscheinlichkeit soll nun genau 0,5 sein. Man erhält die Beziehung

$$\begin{aligned} \frac{2ez}{(e+z)(e+z-1)} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 4ez &= (e+z)^2 - (e+z) \\ \Leftrightarrow (e+z) &= (e+z)^2 - 4ez = (e-z)^2. \end{aligned}$$

Die Anzahl der Münzen $e+z$ im Sparschwein muss somit eine Quadratzahl sein! Setzt man $e-z=n$, so folgt $e+z=n^2$ und damit

$$e = \frac{n^2 + n}{2} \quad \text{und} \quad z = \frac{n^2 - n}{2}.$$

In Abhängigkeit von n hat Christoph also genau $n^2 \geq 170$ Münzen im Sparschwein, die einen Gesamtwert von

$$e + 2z = \frac{n^2 + n}{2} + n^2 - n = \frac{3n^2 - n}{2} = n \cdot \frac{3n - 1}{2}$$

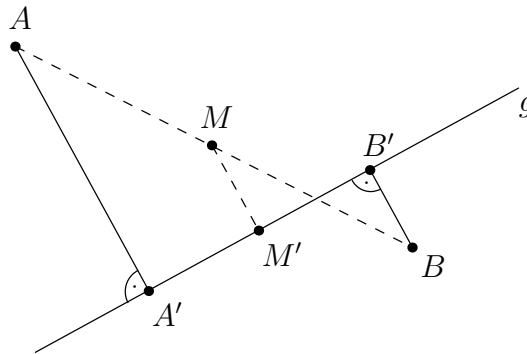
Euro haben. Die Beziehung $n^2 \geq 170$ ergibt $|n| \geq 14$. Jedes hiermit geeignete n liefert auch in der Tat ein Paar (e, z) , für das die angegebene Wahrscheinlichkeit 0,5 ist, denn wir haben nur Äquivalenzumformungen verwendet.

Da mit $|n|$ für festes Vorzeichen von n auch $e+2z$ wächst, wäre der für Christoph schlimmste Fall einer der Fälle $n = \pm 14$, und von diesen beiden Möglichkeiten wäre die schlimmere $n = +14$, weil er dann mehr Ein- als Zwei-Euro-Münzen hat: Er hätte genau 105 Ein-Euro- und 91 Zwei-Euro-Münzen im Sparschwein, die einen Gesamtwert von nur 287 Euro haben.

Christoph kann sich daher leider nicht sicher sein, sich seinen Wunsch erfüllen zu können.

PS: In der Tat ist dies aber der einzige Fall, in dem sein Geld nicht reichen würde; für alle anderen erlaubten n ergibt sich ein ausreichender Geldbetrag.

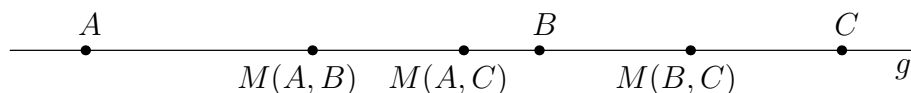
L 46.4 Zuerst zeichnen wir auf der Insel (in Gedanken) alle Geraden durch je zwei Steinstatuen ein und wählen dann eine Gerade g , die keine dieser endlich (!) vielen Geraden senkrecht schneidet. Dann fallen wir von jeder Statue A senkrecht das Lot auf die Gerade g und kennzeichnen den Lotfußpunkt A' .



Auf diese Art erhalten wir 638 Punkte auf der Geraden g . Diese Punkte sind alle (paarweise – wie der Mathematiker sagt) verschieden, denn hätten zwei Steinstatuen A und B denselben Lotfußpunkt auf g , so läge dieser auf der Geraden durch A und B , insbesondere wäre diese Gerade senkrecht zu g , im Widerspruch zur Wahl von g . Auch von der Mitte M zwischen zwei Statuen A und B fallen wir jeweils das Lot auf g und markieren den Lotfußpunkt M' . Nach dem Strahlensatz ist M' der Mittelpunkt der Strecke $A'B'$.

Nun haben wir auf der Geraden g eine ähnliche Situation wie am Anfang auf der Insel. Auf der Geraden g liegen 638 Lotfußpunkte der Statuen und wir wollen zählen, wie viele verschiedene Mittelpunkte es zwischen ihnen mindestens geben muss. Dabei sei noch kurz erwähnt, dass die Lotfußpunkte der Statuen alle verschieden sind, die Lotfußpunkte verschiedener Mittelpunkte aber gleich sein können. Aber wichtig für uns ist nur, dass es nicht mehr Mittelpunkte geworden sein können.

Betrachten wir einen Ausschnitt von drei benachbarten „Statuen“ A, B, C auf g , so liegt der Mittelpunkt $M(A, B)$ der Nachbarn A und B zwischen A und B , und der Mittelpunkt $M(B, C)$ liegt zwischen B und C , die beiden Mittelpunkte sind also verschieden. Folglich sind auch alle $638 - 1$ Mittelpunkte zwischen je zwei benachbarten Statuen auf g verschieden.



Außerdem liegt der Mittelpunkt $M(A, C)$ von A und C zwischen den beiden „Nachbarmittelpunkten“ $M(A, B)$ und $M(B, C)$, ist also von diesen beiden und auch allen anderen Nachbarmittelpunkten verschieden.

Zählen wir nun also alle solchen Mittelpunkte zwischen einer Statue und ihrem übernächsten Nachbarn, so erhalten wir noch $638 - 2$ weitere verschiedene Mittelpunkte.

Insgesamt gibt es auf der Geraden g und damit auch auf der Insel mindestens $637 + 636 = 1273$ verschiedene Mittelpunkte.

Der Lord wird zwar kaum Chancen haben, die riesigen Statuen auf der Insel umzustellen – die Wissenschaftler rätseln noch heute, wie die Kolosse ohne moderne

Kräne errichtet werden konnten –, aber stünden sie alle in gleichem Abstand in einer Reihe, so müsste er tatsächlich nur 1273 Goldtaler verstecken, nämlich 637 jeweils in der Mitte zwischen zwei benachbarten Statuen und 636 unter den Statuen selbst, außer unter den beiden äußeren. Denn wenn wir die Statuen der Reihe nach von 1 bis 638 durchnummerieren, so ist wegen des gleichen Abstands der Statuen die Mitte zwischen den Statuen i und j entweder – wenn $i + j$ gerade ist – genau bei der Statue $\frac{i+j}{2}$ oder – wenn $i + j$ ungerade ist – genau in der Mitte zwischen den Statuen $\frac{i+j-1}{2}$ und $\frac{i+j+1}{2}$.

Lösungen zu Aufgabenblatt 47

L 47.1 Wir nehmen an, es gäbe eine Lösung. Weil in dem Satz in jedem Fall je eine 0, 1 und 2 vorkommen, gilt $a, b, c, e, f \geq 1$ und $d \geq 2$. Daher kann es keine weitere Null geben, es muss $a = 1$ sein. Jetzt folgt schärfer auch $b, e \geq 2$. Weil $d + e = 9$ eine ungerade Zahl ist, muss je genau eine der Ziffern d und e gerade und ungerade sein, also ist sogar $d, e \geq 3$. Aus den noch verbleibenden Möglichkeiten $\{d, e\} \in \{\{3, 6\}, \{4, 5\}\}$ ergibt sich, dass genau eine der Ziffern d und e eine Primzahl ist. Damit ist auch $f \geq 2$, und weil mit $f = 2$ eine dritte Primzahl im Satz stände, muss sogar $f \geq 3$ sein.

Weil von den noch unbestimmten Variablen somit nur noch c den Wert 1 und nur noch b und c den Wert 2 annehmen können, gilt $b \in \{2, 3\}$ und $c \in \{1, 2, 3\}$. Damit machen wir eine Fallunterscheidung:

Ist $c = 1$, so folgt $b = 3$. Damit gibt es drei oder vier Primzahlen im Satz (die „2“ im Text, $b = 3$, entweder d oder e sowie eventuell noch f). Die genaue Anzahl an Primzahlen hängt dabei nur von f selbst ab. Jedoch: Ist f prim, so folgt $f = 4$, was aber keine Primzahl ist. Ist hingegen f nicht prim, so müsste $f = 3$ sein, was erneut einen Widerspruch erzeugt.

Ist $c = 2$, so muss auch $b = 2$ sein. Dies steht im Widerspruch zum Wert von c .

Ist $c = 3$, so bekommen wir wieder einen Widerspruch, weil es zu der vorhandenen Ziffer 2 nur noch eine Variable gibt, die 2 sein kann (nämlich b).

Es gibt demnach keine Möglichkeit, den Satz zu einer wahren Aussage zu machen.

L 47.2 Da alle Klötzchen verwendet werden sollen, muss der Quader, wenn er existiert, ein Volumen von

$$\begin{aligned} V &= 1 \cdot 7^3 + 5 \cdot 4^3 + 5 \cdot 3^3 + 6 \cdot 2^3 + 12 \cdot 1^3 \\ &= 343 + 320 + 135 + 48 + 12 \\ &= 858 \end{aligned}$$

haben (wir rechnen dabei immer in Zentimetern bzw. Kubikzentimetern).

Da alle Bauklötzchen ganzzahlige Seitenlängen haben, müssen auch die Seitenlängen des Quaders ganzzahlig sein. Seien a, b, c die Seitenlängen des Quaders. Es gilt also:

$a \cdot b \cdot c = 858$. Weil der größte Bauklotz bereits eine Kantenlänge von 7 hat, muss außerdem

$$a \geq 7, \quad b \geq 7, \quad c \geq 7 \quad (47.1)$$

sein. Da a, b, c ganzzahlig sein sollen, gilt: $a \mid 858$ und $b \mid 858$ und $c \mid 858$.

Zerlegt man 858 in Primfaktoren, so erhält man $858 = 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13$ und folglich als Liste der Teiler für 858:

$$\mathbb{T}_{858} = \{1, 2, 3, 6, 11, 13, 22, 26, 33, \dots, 858\}.$$

Mit (47.1) ergibt sich $a, b, c \geq 11$. Dies führt zu einem Widerspruch, denn dann ist $a \cdot b \cdot c \geq 11^3 = 1331 > 858$.

Damit kann es so einen Quader nicht geben.

L 47.3 Fangen wir hinten an: $12345678987654321 = 111111111^2$ ist eine Quadratzahl. Daher ist die zu untersuchende Zahl von der Form $n^4 + n^2 + 1$, und dieses Polynom (in n) lässt sich faktorisieren:

$$n^4 + n^2 + 1 = (n^2 + 1)^2 - n^2 = (n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1).$$

Für $n > 1$ sind beide Faktoren größer als 1, somit ist die dritte Zahl in unserer Liste keine Primzahl.

(Übrigens ist $12345678987654321^2 + 12345678987654321 + 1 = 97 \cdot 157 \cdot 3907 \cdot 207491437 \cdot 12345679098765433$, dabei ist der letzte Primfaktor der Faktor $(n^2 + n + 1)$.)

Die zweite Zahl ist auch nicht prim: Sie ist durch 3 teilbar.

Begründung: Da 2007 durch 3 teilbar ist, können wir die hintereinandergeschriebenen Zahlen immer in Dreiergruppen betrachten. Von drei aufeinanderfolgenden Zahlen lässt beim Teilen durch 3 immer je eine den Rest 0, 1 und 2. Damit lässt die Quersumme der drei hintereinandergeschriebenen Zahlen denselben Rest wie $0 + 1 + 2$, also den Rest 0. Somit ist jede Dreiergruppe für sich durch 3 teilbar, also auch die Zahl selbst.

(Bei dieser Zahl mit ihren 6921 Stellen können wir leider keine Faktorisierung angeben. Wenn wir einem Computerprogramm glauben dürfen, besitzt sie zweimal den Primfaktor 3 und dann keinen weiteren Primfaktor kleiner als 10^{18} – aber noch mindestens zwei weitere (unbekannte) größere!)

Bleibt die erste Zahl: Nach dem Ausschlussprinzip ist sie die Primzahl!

Und zwar handelt es sich bei $2^{25964951} - 1$ um die 42. sogenannte Mersennesche Primzahl (das sind Primzahlen der speziellen Form $2^k - 1$). Sie wurde im Rahmen eines weltweiten Projektes vom deutschen Augenarzt Dr. M. Nowak im Februar 2005 gefunden.

Die 7 816 230 Ziffern dieser Zahl gibt es sogar auf einem Plakat abgedruckt zu kaufen – eine passende Lupe kann man gleich mit erwerben ...

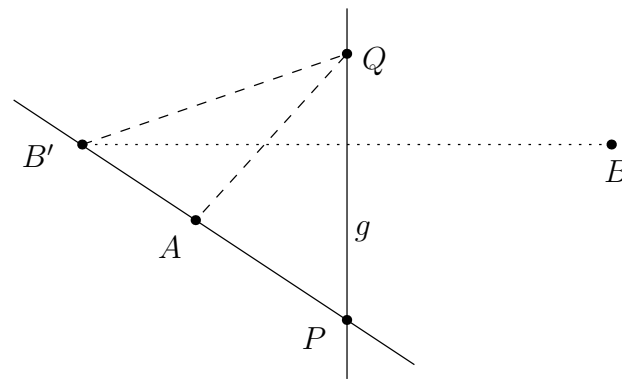
L 47.4 Ja, solch einen Punkt P gibt es immer:

Zuerst spiegeln wir den Punkt B an der Geraden g und nennen sein Spiegelbild B' . Es hat dann B' genau denselben Abstand wie B zu jedem Punkt Q auf der Geraden: $\overline{B'Q} = \overline{BQ}$. Folglich können wir im Weiteren statt des Punktes B auch den Punkt B' betrachten.

Da A näher als B an der Geraden g liegt, sind auch A und B' zwei verschiedene Punkte, und die Gerade durch A und B' schneidet die Gerade g ; der Schnittpunkt sei P .

Dieser Punkt P ist bereits der gesuchte Punkt mit maximalem $\overline{BP} - \overline{AP}$:

Da A , B' und P auf einer Geraden liegen und da A näher als B' an der Geraden g – und somit auch näher an P – liegt, gilt: $\overline{B'P} - \overline{AP} = \overline{B'A}$.



Für jeden weiteren Punkt $Q \neq P$ auf der Geraden g liefert uns die Dreiecksungleichung im Dreieck AQB' dann: $\overline{B'A} + \overline{AQ} > \overline{B'Q}$. Dies ergibt zusammen mit der obigen Gleichung für P dann $\overline{B'P} - \overline{AP} = \overline{B'A} > \overline{B'Q} - \overline{AQ}$. Also ist P tatsächlich ein Punkt mit maximaler Differenz $\overline{BP} - \overline{AP}$ (und zwar der einzige).

Zur Konstruktion des Punktes P mit Zirkel und Lineal:

Wir stechen mit dem Zirkel in B und schlagen einen Kreis um B , dessen Radius so groß ist, dass er die Gerade g in zwei verschiedenen Punkten schneidet. Um diese beiden Schnittpunkte schlagen wir Kreise mit demselben Radius. Diese beiden Kreise schneiden einander ebenfalls in zwei Punkten: Der eine ist der Ausgangspunkt B , der andere ist sein Spiegelbild B' .

Mit dem Lineal ziehen wir noch die Gerade durch B' und A und erhalten P als Schnittpunkt dieser Geraden und der Geraden g .

Lösungen zu Aufgabenblatt 48

L 48.1 Sei $n = 1000a + 100b + 10c + d$ mit $a, b, c, d \in \{0, 1, \dots, 9\}$ und mit $a \geq 1$ eine solche vierstellige Zahl. Dann ist also $4n = 4000a + 400b + 40c + 4d = 1000d + 100c + 10b + a$. Somit muss $a \leq 2$ sein, sonst wäre $4n$ fünfstellig. Da außerdem a die Einerziffer der geraden Zahl $4n$ ist, ist $a = 2$.

Daraus folgt weiter $d \geq 8$, und weil die Einerziffer von $4 \cdot d$ gleich $a = 2$ sein muss, ist $d = 8$.

Es darf daher beim Multiplizieren mit 4 keinen Übertrag von der Hunderter- zur Tausenderstelle geben, was $b \leq 2$ bedeutet. Außerdem ist b die Einerstelle der Summe von 3 (Übertrag von $4 \cdot 8 = 32$) und der Einerstelle von $4 \cdot c$; also ist b ungerade. Es ist somit $b = 1$.

Für c gilt demnach $c \geq 4$, und Durchprobieren der sechs möglichen Fälle (unter Beachtung, dass $4c + 3 = 10k + 1$ sein muss) zeigt, dass nur $c = 7$ eine Lösung liefert.

In der Tat erfüllt die Zahl $n = 2178$ die Bedingung der Aufgabe, denn es ist $4 \cdot 2178 = 8712$.

Für mehrstellige Zahlen gilt die obige Betrachtung ebenso, sie müssen also von der Form $21\dots78$ sein. Ein wenig Probieren für fünf- und sechsstellige Zahlen zeigt, dass alle Zahlen der Form $2199\dots9978$ mit beliebig vielen Neunen die gewünschte Eigenschaft haben: Hat die Zahl n Stellen, so ist $4 \cdot 219\dots978 = 4 \cdot (22 \cdot 10^{n-2} - 22) = 88 \cdot 10^{n-2} - 88 = 879\dots912$. Die entsprechende Zahl mit 2001 Neunen ist 2005-stellig und ist demnach Lösung unseres Problems.

Ohne Begründung wollen wir noch angeben, wie alle Zahlen mit der geforderten Eigenschaft aussehen: Jede Zahl besteht aus Blöcken der Form $2199\dots9978$ mit jeweils beliebig vielen Neunen, allerdings muss die Abfolge der Anzahlen der Neunen „symmetrisch“ sein, d. h. die Anzahl der Neunen im ersten und im letzten Block muss übereinstimmen, die im zweiten und im vorletzten auch usw.

Außerdem dürfen zwischen diesen Blöcken jeweils beliebig viele Nullen stehen. Aber auch hier müssen die Nullen wieder „symmetrisch“ verteilt sein.

Ein Beispiel für solch eine Zahl ist also 2199780002178000219978.

L 48.2 Sei p die Wahrscheinlichkeit, dass Andre Becker einen einzelnen Satz gewinnt, und q die Wahrscheinlichkeit, dass Boris Agassi einen Satz gewinnt. Weil beide Spieler etwa gleich gut sind, gilt $p = q$ und mit $p + q = 1$ folglich $p = q = \frac{1}{2}$. Fünf Sätze werden genau dann gespielt, wenn es bis zum vierten Satz noch keinen Sieger gibt. Dafür müssen beide Spieler zweimal gewonnen haben; überdies ist der fünfte Satz in jedem Fall der letzte Satz, weil dann einer der Spieler drei Sätze gewonnen haben muss.

Der Gewinner des ersten Satzes (für diesen gibt es 2 Möglichkeiten) muss also genau einen der Sätze zwei, drei oder vier gewinnen. Daher gibt es $2 \cdot 3 = 6$ Möglichkeiten, dass ein fünfter Satz notwendig wird. (Wer die Binomialkoeffizienten kennt, erhält diese Zahl auch als $\binom{4}{2}$.) Für jeden einzelnen dieser Spielverläufe ist die Wahrscheinlichkeit $p^2 \cdot q^2$ (nach der Pfadregel), daher ergibt sich eine Gesamtwahrscheinlichkeit von $6 \cdot p^2 q^2 = 6p^4 = \frac{6}{24} = \frac{3}{8}$.

Nach einem Jahr sind die Wahrscheinlichkeiten etwas anders verteilt: Es gilt, noch immer nach obiger Überlegung, $\frac{8}{27} = 6 \cdot p^2 q^2$, also $\frac{4}{81} = (pq)^2$. Da $p, q \geq 0$ sind, ist dies zu $\frac{2}{9} = pq$ äquivalent.

Mit $p = 1 - q$ erhält man nacheinander $\frac{2}{9} = (1 - q) \cdot q = q - q^2 \Leftrightarrow 0 = q^2 - q + \frac{2}{9} = (q - \frac{1}{3})(q - \frac{2}{3}) \Leftrightarrow q = \frac{1}{3}$ oder $q = \frac{2}{3}$.

Da Boris Agassi geschwächt ist, gilt also $q = \frac{1}{3}$.

L 48.3 Sei S die Spitze des Kegels und P ein beliebiger Punkt auf dem Rand der Ellipse. Weiterhin berühre k den Kegel im Kreis t und K berühre den Kegel im Kreis T .

Die Gerade durch P und S schneide t in einem Punkt X und T in einem Punkt Y . Demnach berührt die Gerade durch P und S die Kugel k in X , ist also eine Tangente durch P an die Kugel k . Außerdem berührt die Gerade durch P und A die Kugel k im Punkt A , ist also ebenso eine Tangente durch P an die Kugel k . Die beiden Tangentenabschnitte PA und PX sind aber gleich lang, denn nach dem Satz des Pythagoras gilt sowohl $\overline{PA}^2 + \overline{AM}^2 = \overline{PM}^2$ als auch $\overline{PX}^2 + \overline{XM}^2 = \overline{PM}^2$, wobei M der Mittelpunkt von k ist, und weil $\overline{AM} = \overline{XM}$ gleich dem Radius von k ist, ist in der Tat $\overline{PA} = \overline{PX}$.

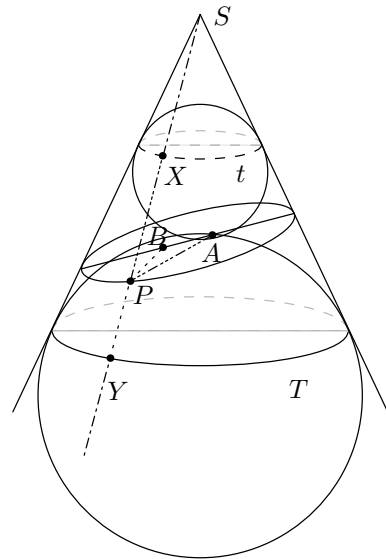
Ganz analog sieht man, dass $\overline{PB} = \overline{PY}$ gilt.

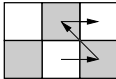
Daraus folgt schließlich

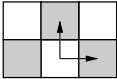
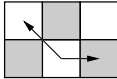
$$\overline{AP} + \overline{PB} = \overline{PX} + \overline{PY} = \overline{XY}.$$

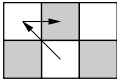
Die Länge der Strecke XY ist nun aber als Abschnitt der Mantellinie zwischen den beiden Berührkreisen unabhängig von P .

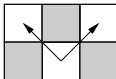
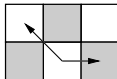
Das war zu zeigen.

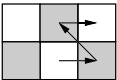


den Diagonalszug von vorher durch  ersetzen. Damit wird die Zugfolge echt länger, weil ja in beide Richtungen gezogen wird.

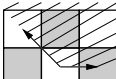
Es gibt auch keinen optimalen Zug mit einem Winkel von 90° : Die gewählten Richtungen  lassen sich wiederum durch  ersetzen; statt eines Zugs nach

oben wird  ausgeführt. Wenn die Richtungen mit einem Winkel von 90° dia-

gonal gewählt wurden , kann man erneut stattdessen  wählen und

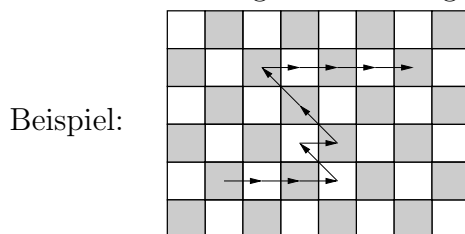
die Züge nach rechts oben durch  ersetzen.

Eine Lösung gibt es demnach nur mit zwei Zugrichtungen im Winkel von 135° . Durch Drehen und Spiegeln der Anordnung können wir uns wie schon vorher darauf

beschränken, nur die Zugrichtungen  zu betrachten. Das Zielfeld liegt dann

in dem schraffierten Bereich (es liegt auch, wie oben bemerkt, nicht auf den Rändern des Bereiches), und zwar in einer Entfernung von (gerichtet) dx Feldern in x - und dy Feldern in y -Richtung.

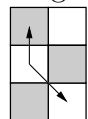
Den Zug nach oben links muss man offenbar genau dy -mal ausführen, und man macht sich leicht klar, dass es egal ist, wann genau er im Verlauf der Zugfolge gewählt wird – jeder Zug nach links oben erhöht die Differenz in x -Richtung genau um 1, also muss man den Zug nach rechts genau $(dx + dy)$ -mal durchführen.



Insgesamt braucht der Mönch daher $dx + 2dy$ Züge.

Wenn das Zielfeld im Inneren des linken oberen Quadranten liegen sollte, so ist dx negativ. Spiegeln wir die Zugrichtungen des Mönchs an der y -Achse, erhalten wir eine Zuglänge von $-dx + 2dy$, also einen längeren Zug.

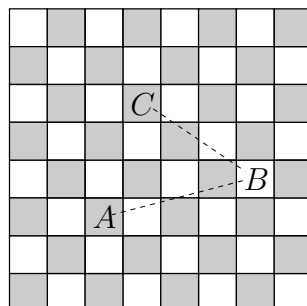
Liegt das Zielfeld im rechten oberen Quadranten und wählen wir die Zugrichtungen



(wir haben sie also an der Diagonalen gespiegelt), so brauchen wir $2dx + dy$ Züge; falls $dx > dy$ ist, sind das mehr Züge, falls $dx \leq dy$ ist, sind es nicht mehr Züge als vorher.

Insgesamt bedeutet dies insgesamt, dass wir immer einen Zug der Länge $\max\{|dx| + 2|dy|, 2|dy| + |dx|\}$ erreichen können und dass diese Länge die längstmögliche ist.

die zwischen dem zweiten und dem dritten Zielfeld (von unten gezählt) in dem bekannten Sektor liegt. Ist dies nicht der Fall, versuche es mit an der Vertikalen gespiegelten Zugrichtungen. Wenn man es in beiden Fällen nicht schafft, muss die Anordnung im Wesentlichen wie folgt aussehen:



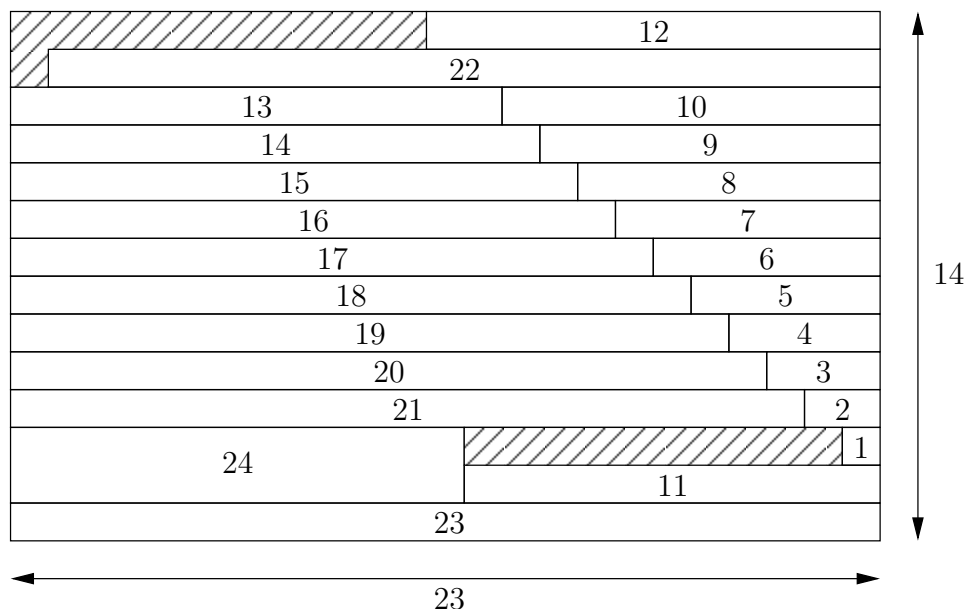
Die beiden Strecken sind „flacher“ als 45° , aber in verschiedenen Richtungen (nach rechts oben und nach links oben). In so einem Fall hat man aber Erfolg, wenn man eine Zugrichtung vertikal wählt und das Feld von links oder rechts durchwandert, denn dann hat die Verbindungsstrecke zum letzten Zielpunkt eine Steigung, die für beide möglichen Richtungswahlen passt.

Lösungen zu Aufgabenblatt 49

L 49.1 Nein, Familie Lösche kann es nicht schaffen, dass die Kerzen zu Weihnachten alle gleich weit abgebrannt sind: Sei x die Länge, um die eine Kerze in einer Stunde herunterbrennt. Dann sind bis Weihnachten alle Kerzen zusammen um $(1 + 2 + 3 + 4) \cdot x = 10 \cdot x$ heruntergebrannt. Da 10 nicht durch 4 teilbar ist, ist es nicht möglich, bis Weihnachten alle Kerzen gleichmäßig herunterzubrennen.

Bei n Adventssonntagen würden die Kerzen bis Weihnachten gemeinsam um $(1 + 2 + \dots + n) \cdot x = \frac{n(n+1)}{2} \cdot x$ herunterbrennen. Damit überhaupt ein gleichmäßiges Herunterbrennen möglich ist, muss folglich $\frac{n(n+1)}{2}$ durch n , die Anzahl der Kerzen, teilbar sein. Dies ist genau dann der Fall, wenn $n + 1$ gerade, also n ungerade ist. Und in der Tat reicht das schon für die Existenz einer solchen Möglichkeit aus: Zum Beispiel kann man sich für $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ am k -ten Advent beliebige k Kerzen aussuchen; wenn man dann am $(n - k)$ -ten Advent (also vom $\frac{n+1}{2}$ -ten bis zum $(n - 1)$ -ten Advent) genau diejenigen Kerzen anzündet, die am k -ten Advent nicht leuchteten, sind am vorletzten und damit auch am letzten Advent alle Kerzen gleich weit heruntergebrannt.

L 49.2 Ein Beispiel für einen Kalender, dessen Seiten beide kürzer als 24 cm sind, ist der folgende:



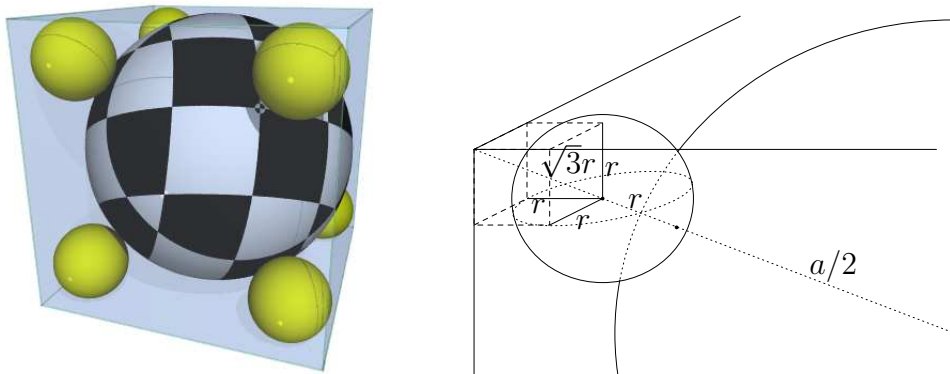
Dieser hat die Abmessungen $14\text{ cm} \cdot 23\text{ cm} = 322\text{ cm}^2$. Dies ist auch die kleinstmögliche Fläche für einen solchen Kalender. Denn um alle Türchen unterzubringen, muss

das Rechteck mindestens $1 + 2 + 3 + \dots + 24 = \frac{24 \cdot 25}{2} = 300 \text{ cm}^2$ groß sein. Da 23 eine Primzahl ist, hat dieses Türchen die Abmessungen $1 \cdot 23$. Somit ist eine Seite des Kalenders mindestens 23 cm lang. Da $23 \cdot 13 < 300$ ist, muss die andere Seite entsprechend mindestens 14 cm lang sein. Der obige Kalender besitzt also minimale Abmessungen.

L 49.3 Eine quaderförmige Schachtel, in die (zunächst nur) der Fußball hineinpassen soll, muss offenbar mindestens 30 cm hoch, breit und tief sein. Unter allen Schachteln, die diese Eigenschaft haben, ist die würfelförmige Schachtel mit Seitenlänge 30 cm diejenige mit der kleinsten Oberfläche.

Wir zeigen nun, dass in diese Schachtel zusätzlich zum Fußball auch noch bis zu acht der gegebenen Tennisbälle passen. Hierzu berechnen wir den Radius des größten Tennisballs, den man zusätzlich zum Fußball noch in eine Ecke des Würfels packen kann.

Wir berechnen also den Radius r einer Kugel, die drei an einer Ecke anstoßende Seitenflächen eines Würfels mit Seitenlänge a von innen und eine dem Würfel eingeschriebene Kugel von außen berührt.



Wie in der Abbildung angedeutet, gilt hierbei:

$$\sqrt{3} \cdot r + r + \frac{a}{2} = \sqrt{3} \cdot \frac{a}{2}.$$

Nach r umgeformt ergibt dies

$$r = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \cdot \frac{a}{2} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} \cdot \frac{a}{2} = \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1} \cdot \frac{a}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \cdot a.$$

Setzt man hier nun $a = 30 \text{ cm}$ ein, so liefert der Taschenrechner $r \approx 4,019 \text{ cm} > 4 \text{ cm}$. Für eine genaue Abschätzung, die hierzu nötig ist, muss man $(2 - \sqrt{3}) \cdot 15 > 4$ zeigen. Dies ist aber äquivalent zu $26 > 15\sqrt{3}$, und die Gültigkeit dieser Ungleichung folgt durch Wurzelziehen aus $26^2 = 676 > 675 = 15^2 \cdot 3$.

Also passt in der Tat in jede der acht Ecken des Würfels noch ein Tennisball mit Durchmesser 8 cm. Die gesuchte Schachtel ist daher die beschriebene würfelförmige, und sie hat eine Oberfläche von $6 \cdot (30 \text{ cm})^2 = 5400 \text{ cm}^2$.

L 49.4 Wir schreiben zunächst kurz $\tau(n)$ für die Anzahl der Teiler der natürlichen Zahl n . Dann ist also zu zeigen, dass für alle natürlichen Zahlen n die Zahl

$$F(n) := \sum_{d|n} \tau(d)^3$$

eine Quadratzahl ist. Die hier verwendete Schreibweise $\sum_{d|n}$ bedeutet, dass man den

Wert von $\tau(d)^3$ für alle Teiler d von n summiert: „ Σ “ (das griechische große Sigma) ist das Summenzeichen, und unter ihm steht (hier in Kurzform), für welche Werte welches Parameters man aufsummiert: „ $d|n$ “ liest man als „ d teilt n “, im Ausdruck rechts vom Summenzeichen soll also d als Wert jeden Teiler von n annehmen, und diese Ausdrücke werden dann addiert.

Betrachten wir dazu zuerst einmal einen Spezialfall: Sei $n = p^k$, $k \geq 0$, eine Primzahlpotenz. Dann können wir zunächst recht einfach eine Liste aller Teiler von n angeben, nämlich $1, p, p^2, \dots, p^k$. Also ist

$$\begin{aligned} F(p^k) &= \sum_{d|p^k} \tau(d)^3 = \tau(1)^3 + \tau(p)^3 + \tau(p^2)^3 + \dots + \tau(p^k)^3 \\ &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (k+1)^3. \end{aligned}$$

Hier haben wir benutzt, dass ein Teiler der Form p^t ganz entsprechend genau die $t+1$ Teiler $1, p, p^2, \dots, p^t$ hat.

Letzteres ist nun eine bekannte Summe, die man aus dem Schulunterricht kennt oder in (den meisten) Formelsammlungen findet:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + K^3 = \left(\frac{K(K+1)}{2} \right)^2.$$

Ein Beweis dieser Formel gelingt zum Beispiel mittels Induktion nach K . Für $K = 1$ gilt sie offenbar und im Induktionsschritt zeigt man:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \dots + K^3 + (K+1)^3 &= \left(\frac{K(K+1)}{2} \right)^2 + (K+1)^3 \\ &= (K+1)^2 \cdot \left(\frac{K^2 + 4K + 4}{4} \right) \\ &= \left(\frac{(K+1)(K+2)}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Da der Term $\frac{K(K+1)}{2}$ in jedem Fall eine ganze Zahl ist, weil entweder K oder $K+1$ gerade ist, ist die gesuchte Summe also in diesem Spezialfall stets eine Quadratzahl. Um nun die Aussage auch für allgemeine n zu beweisen, benutzen wir folgenden Begriff aus der Zahlentheorie: Eine Abbildung (Funktion) f , die jeder natürlichen Zahl eine andere natürliche Zahl zuordnet, heißt *multiplikativ*, wenn für jedes Paar teilerfremder Zahlen m, n gilt: $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$.

Wir wollen zeigen, dass unsere gesuchte Funktion F multiplikativ ist. Wenn uns dies gelingt, dann sind wir fertig, denn jede natürliche Zahl n hat eine eindeutige Primfaktorzerlegung der Form $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_\ell^{k_\ell}$ mit verschiedenen Primzahlen p_1 bis p_ℓ und es gilt dann

$$\begin{aligned} F(n) &= F(p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_\ell^{k_\ell}) \\ &= F(p_1^{k_1}) \cdot F(p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_\ell^{k_\ell}) \\ &= F(p_1^{k_1}) \cdot F(p_2^{k_2}) \cdot \dots \cdot F(p_\ell^{k_\ell}) \\ &= \left(\frac{(k_1+1)(k_1+2)}{2} \right)^2 \cdot \left(\frac{(k_2+1)(k_2+2)}{2} \right)^2 \cdot \dots \cdot \left(\frac{(k_\ell+1)(k_\ell+2)}{2} \right)^2 \\ &= \left(\frac{(k_1+1)(k_1+2)}{2} \cdot \frac{(k_2+1)(k_2+2)}{2} \cdot \dots \cdot \frac{(k_\ell+1)(k_\ell+2)}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Das ist in jedem Fall eine Quadratzahl.

Es bleibt also die Multiplikativität von F zu zeigen.

Hierzu zeigen wir zwei kleine Hilfsaussagen über multiplikative Funktionen.

Hilfsaussage 1: Ist f multiplikativ, so ist auch f^3 multiplikativ, wobei $f^3(n) = f(n)^3$ ist.

Beweis der Hilfsaussage 1: Dies ist nicht schwer: Es gilt für teilerfremde m und n nämlich $f^3(m \cdot n) = (f(m \cdot n))^3 = f(m)^3 \cdot f(n)^3 = f^3(m) \cdot f^3(n)$.

Hilfsaussage 2: Ist f multiplikativ, so ist auch $g(n) := \sum_{d|n} f(d)$ multiplikativ.

Beweis der Hilfsaussage 2: Das ist schon etwas schwieriger. Es gilt aber wieder für teilerfremde Zahlen m und n :

$$\begin{aligned} g(m) \cdot g(n) &= \sum_{r|m} f(r) \cdot \sum_{s|n} f(s) \\ &= \sum_{r|m; s|n} f(r)f(s) \\ &= \sum_{r|m; s|n} f(rs). \end{aligned}$$

Letzteres folgt aus der Tatsache, dass f multiplikativ ist und für teilerfremde m und n auch jeder Teiler r von m und jeder Teiler s von n zueinander teilerfremd sind.

Außerdem folgt aus der Teilerfremdheit von m und n , dass tatsächlich **jeder** Teiler von $m \cdot n$ eindeutig als Produkt eines Teilers r von m und eines Teilers s von n geschrieben werden kann¹.

Deswegen tritt in der letzten Summe jeder Teiler $t = rs$ von $m \cdot n$ genau einmal auf. Es ist also tatsächlich

$$g(m) \cdot g(n) = \sum_{t|m \cdot n} f(t) = g(m \cdot n).$$

Mit Hilfe dieser beiden Aussagen können wir nun die Multiplikativität von F leicht zeigen. Zunächst ist die Funktion $f(n) = 1$, die allen n die Zahl 1 zuordnet, sicher multiplikativ. Also ist, nach Hilfsaussage 2, auch $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$ multiplikativ, wegen

Hilfsaussage 1 folgt dann die Multiplikativität von τ^3 und erneut mit Hilfsaussage 2 kann man dann auf die Multiplikativität von $F(n) = \sum_{d|n} \tau(n)^3$ schließen.

Damit ist der Beweis vollständig erbracht.

¹Beachte, dass dies für nicht teilerfremde m, n nicht gilt!

Lösungen zu Aufgabenblatt 50

L 50.1 Antwort: Die einzige Zahl mit dieser Eigenschaft ist 2006.

Begründung: Sei n eine Zahl mit der geforderten Eigenschaft. Da die Differenz zwischen zweitgrößtem und zweitkleinstem positiven Teiler ungerade ist, muss genau einer der beiden Teiler gerade sein. Damit ist aber auch n gerade, da n einen geraden Teiler hat. Der zweitkleinste Teiler einer geraden Zahl ist stets 2. Somit muss der zweitgrößte Teiler $1001 + 2 = 1003$ sein. Es folgt also, dass $2 \cdot 1003 = 2006$ der einzig mögliche Wert für n ist, denn das Produkt von zweitgrößtem und zweitkleinstem Teiler ist immer n .

Tatsächlich ist der zweitkleinste Teiler von 2006 gerade 2, der zweitgrößte ist 1003 und es gilt $1003 - 2 = 1001$ wie gefordert.

L 50.2 Die vom Lehrer genannten Zahlen seien a , b und c .

Da es genau drei Möglichkeiten gibt, zwei der drei Zahlen auszusuchen (um sie zu addieren), haben die Schüler alle möglichen Lösungen gefunden. Es ergeben sich folgende Gleichungen:

$$50 = (a + b)c = ac + bc \quad (50.1)$$

$$2000 = (a + c)b = ab + bc \quad (50.2)$$

$$2006 = (b + c)a = ab + ac. \quad (50.3)$$

$(50.3) - (50.2)$ ergibt $6 = ac - bc$, woraus durch Addition von (50.1) folgt: $56 = 2ac$, also

$$ac = 28 \quad \text{und weiter}$$

$$bc = 50 - ac = 22,$$

$$ab = 2000 - bc = 1978.$$

Jeweils das Produkt von zwei dieser Gleichungen geteilt durch die dritte ergibt

$$\begin{aligned} c^2 &= \frac{bc \cdot ac}{ab} = \frac{22 \cdot 28}{1978} && \Leftrightarrow c = \sqrt{\frac{11 \cdot 28}{989}}, \\ b^2 &= \frac{bc \cdot ab}{ac} = \frac{22 \cdot 1978}{28} && \Leftrightarrow b = \sqrt{\frac{11 \cdot 989}{7}}, \\ a^2 &= \frac{ac \cdot ab}{bc} = \frac{28 \cdot 1978}{22} && \Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{28 \cdot 989}{11}}. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir benutzt, dass die Zahlen a , b und c nach Voraussetzung positiv sein sollen und daher jeweils nur die positive Wurzel in Frage kommt.

Eine Probe bestätigt diese Ergebnisse:

$$\begin{aligned} ac + bc &= \sqrt{\frac{28 \cdot 989}{11} \cdot \frac{11 \cdot 28}{989}} + \sqrt{\frac{11 \cdot 989}{7} \cdot \frac{11 \cdot 28}{989}} = 28 + 22 = 50, \\ ab + bc &= \sqrt{\frac{28 \cdot 989}{11} \cdot \frac{11 \cdot 989}{7}} + \sqrt{\frac{11 \cdot 989}{7} \cdot \frac{11 \cdot 28}{989}} = 1978 + 22 = 2000, \\ ab + ac &= \sqrt{\frac{28 \cdot 989}{11} \cdot \frac{11 \cdot 989}{7}} + \sqrt{\frac{28 \cdot 989}{11} \cdot \frac{11 \cdot 28}{989}} = 1978 + 28 = 2006. \end{aligned}$$

L 50.3 Betrachten wir zuerst einen Rundweg des Würfelkäfers auf seinem Würfelstrauch:

Ein Würfel hat 8 Ecken und 12 Kanten. Da an jeder Ecke genau 3 Kanten zusammenlaufen, kann der Käfer auf seinem Rundweg höchstens zwei davon benutzen: Eine Kante braucht er als „Zufahrt“, eine als „Ausfahrt“. Auf der dritten Kante kann der Käfer entweder nur zur Ecke hin- oder nur von der Ecke wegkrabbeln, diese Kante kann er also nicht in seinem Rundweg verwenden.

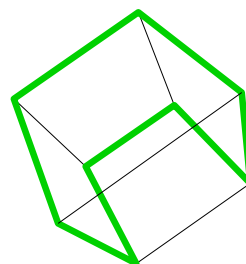
An jeder der 8 Ecken gibt es demnach eine Kante, die nicht zu dem Rundweg des Käfers gehört. Da jede Kante aber zwei verschiedene Ecken verbindet, ist es möglich, dass wir einige oder auch alle der Kanten doppelt zählen. Wir können also nur sagen, dass der Käfer auf seinem Rundweg mindestens $8 : 2 = 4$ Kanten nicht erreicht.

Der längste Rundweg auf dem Würfelstrauch enthält damit höchstens $12 - 4 = 8$ der 12 Kanten.

Nun bleibt noch zu zeigen, dass es tatsächlich einen Rundweg mit 8 Kanten auf dem Würfelstrauch gibt: Die Abbildung rechts oben zeigt eine Möglichkeit.

Kommen wir nun zu einem Rundweg der Dodekaederspinne auf dem Dodekaederbusch:

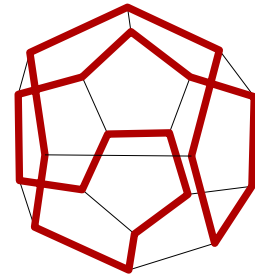
Das Dodekaeder hat, wie der griechische Name verrät, 12 Flächen (Seiten), wobei die Flächen regelmäßige Fünfecke sind. Zählen wir für jede Fläche die Anzahl der Ecken, erhalten wir $12 \cdot 5 = 60$. Da in jeder Ecke aber genau drei Flächen zusammenstoßen, haben wir jede Ecke dreimal gezählt, ein Dodekaeder hat also genau $12 \cdot 5 : 3 = 20$ Ecken. Genauso können wir die Anzahl der Kanten berechnen. Jede Fläche hat 5 Kanten, jede Kante begrenzt zwei Flächen, ein Dodekaeder hat demnach $12 \cdot 5 : 2 = 30$ Kanten.



Genau wie auf dem Würfelstrauch kann auch ein Rundweg auf dem Dodekaederbusch in jeder Ecke nur zwei der drei vorhandenen Kanten nutzen.

Die Dodekaederspinne erreicht somit mindestens $20 : 2 = 10$ Kanten nicht, ihr Rundweg enthält höchstens $30 - 10 = 20$ Kanten.

Auch hier müssen wir noch beweisen, dass es einen Rundweg dieser maximal möglichen Länge tatsächlich gibt. Die Abbildung rechts zeigt ein Beispiel.



Es folgt, dass die Biologen Unrecht haben, was den Vergleich der Rundwege der beiden platonischen Krabbeltierchen angeht:

Der Würfelkäfer durchläuft auf seinem Rundweg einen Anteil von $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ aller Kanten auf dem Würfelstrauch und auch die Dodekaederspinne erreicht $\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$ aller Kanten auf dem Dodekaederbusch.

Zur Zusatzfrage – Die Tetraederfliege:

Ein Tetraeder besteht aus vier gleichseitigen Dreiecken, von denen in jeder Ecke drei zusammenstoßen. Daher enthält es $4 \cdot 3 : 3 = 4$ Ecken und $4 \cdot 3 : 2 = 6$ Kanten. Da auch hier in jeder Ecke drei Kanten zusammenlaufen, erhalten wir wie bei den vorherigen Krabbeltierchen, dass ein Rundweg mindestens $4 : 2 = 2$ der 6 Kanten nicht enthält. Oder umgekehrt ausgedrückt, dass ein Rundweg höchstens $6 - 2 = 4$ Kanten, wiederum einen Anteil von $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, enthält.

Ein Rundweg mit 4 Kanten findet sich in der Abbildung.

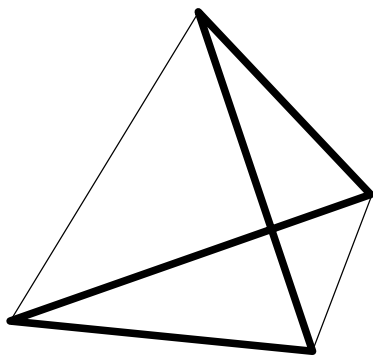


Abbildung 50.1: Tetraederfliege

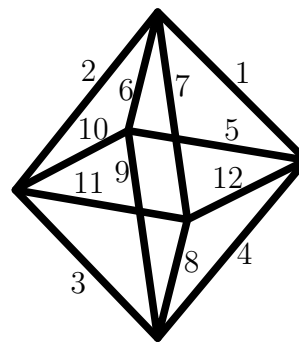


Abbildung 50.2: Oktaederwurm

Der Oktaederwurm:

Der Wurm kann auf seinem Rundweg auf dem Oktaedergewächs über alle Kanten kriechen.

Die Ikosaederameise:

Ein Ikosaeder besteht aus 20 gleichseitigen Dreiecken, von denen in jeder Ecke 5 zusammenstoßen. Daher besitzt es $20 \cdot 3 : 5 = 12$ Ecken und $20 \cdot 3 : 2 = 30$ Kanten. Hier laufen in jeder Ecke 5 Kanten zusammen.

Aber auch hier gehört auf einem Rundweg zu jeder „Zufahrt“ in die Ecke eine „Ausfahrt“. Fassen wir die Kanten an einer Ecke zu disjunkten Paaren, jeweils aus Zu- und Ausfahrt bestehend, zusammen, so bleibt erneut eine Kante übrig, die nicht zu dem Rundweg gehören kann. Es bleiben also mindestens $12 : 2 = 6$ Kanten ungenutzt, die Ikosaederameise erreicht auf ihrem Rundweg höchstens $30 - 6 = 24$ Kanten.

Ein Beispiel dafür ist:

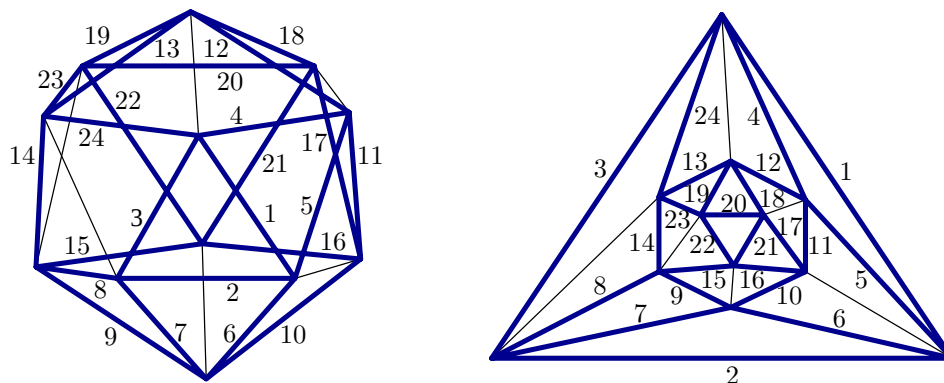


Abbildung 50.3: Ikosaederameise

Die rechte Zeichnung stellt das Gleiche wie die linke dar, nur ist das Ikosaeder so flachgedrückt und verzerrt, dass sich keine Kanten überkreuzen.

Zur Übersicht noch einmal die wichtigsten Daten:

Körper	Flächen	Kanten	Ecken	Rundweg	Anteil
Tetraeder	4	6	4	4	$2/3$
Würfel	6	12	8	8	$2/3$
Oktaeder	8	12	6	12	1
Dodekaeder	12	30	20	20	$2/3$
Ikosaeder	20	30	12	24	$4/5$

L 50.4 Sei a die Wahrscheinlichkeit, mit welcher Anna ein Geschenk mitbringt, und b die Wahrscheinlichkeit, dass Beate ihre Großtante beschenkt. Die Tante ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 Prozent zufrieden, falls Anna ein Geschenk mitbringt und Beate nicht und umgekehrt. Außerdem ist die Tante mit der Wahrscheinlichkeit von 25 Prozent zufrieden, falls sowohl Anna als auch Beate ein Geschenk mitbringen. Die Tante ist also mit der Wahrscheinlichkeit $Z(a, b) = \frac{1}{2}a(1 - b) + \frac{1}{2}b(1 - a) + \frac{1}{4}ab$ zufrieden. Da die Situation beider Cousins vertauschbar ist, darf man davon ausgehen, dass in der bestmöglichen Strategie a und b gleich sind. Damit

erhält man $Z(a, b) = Z(a) = a(1 - a) + \frac{1}{4} \cdot a^2 = a - \frac{3}{4}a^2$. Nun ist

$$a - \frac{3}{4}a^2 = -\frac{3}{4} \left(a^2 - \frac{4}{3}a \right) = -\frac{3}{4} \left(\left(a - \frac{2}{3} \right)^2 - \frac{4}{9} \right) = -\frac{3}{4} \left(a - \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{1}{3}.$$

Da ein quadratischer Term niemals negativ werden kann, befindet sich das Maximum bei $a = \frac{2}{3}$ und hat den Wert $\frac{1}{3}$.

Wer mit der Infinitesimalrechnung vertraut ist, kann die Lösung natürlich auch in Form einer Extremwertaufgabe ermitteln:

Die beste Strategie maximiert Z , und es gilt $0 = Z'(a) = 1 - \frac{3}{2}a$ genau dann, wenn $a = \frac{2}{3}$ ist. Da $Z''(a) = -\frac{2}{3} < 0$ ist, handelt es sich hier wirklich um ein Maximum. Wegen $\frac{2}{3} \in [0, 1]$ liegt das Maximum im Definitionsbereich, und weil außerdem $Z(0) = 0$ und $Z(1) = \frac{1}{4}$ gilt, gibt es keine Maxima auf dem Rand.

Wenn also beide Cousins mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ ein Geschenk mitbringen, so ist die Tante mit einer Wahrscheinlichkeit von $Z(\frac{2}{3}) = \frac{2}{3} - \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{3}$ zufrieden.

Für die Cousins bietet sich nun folgende Entscheidungsregel an: Anna und Beate würfeln jeweils mit ihrem Spielwürfel. Fällt eine 1, 2, 3 oder 4, so bringen sie ein Geschenk mit, denn dies entspricht genau der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$, sonst nicht.

Index

- $\sqrt{2}$, A35.3
- Abstand, A47.4
 - auf Kugel, A35.4, A36.4
 - euklidischer, A39.4
- Adventskalender, A49.2
- Adventskranz, A49.1
- Äquivalenzumformungen, A39.4
- Andre Becker, A48.2
- Aussagenlogik, A32.1
- Bakterien, A38.1
- Bauklötze, A47.2
- Baumeister, A37.3
- Beete, gleich große, A37.4
- Bergkristall, A44.4
- Bibliothek, A45.4
- Binomialkoeffizient, A26.3, A32.4, A43.4, A46.3
- Boris Agassi, A48.2
- Borsuk-Ulam, Satz von, A44.4
- Brasilia, A35.4
- Brennpunkte, A48.3
- Brett mit Nägeln, A39.3
- Brüche, A46.2
- Deutscher, ältester, A35.1
- Diagonalen im 2004-Eck, A39.2
- Dodekaederbusch, A50.3
- Drachen, A28.2
- Dreieck
 - aus Stäben, A27.2
 - gleichseitiges, A33.3, A45.2
 - Spiel mit, A43.3
 - spitzwinkliges, A27.2
 - zerlegen, A45.2
- Dreiecksungleichung, A27.2, A33.3
- Dreierpotenz, A36.3
- Edelsteine, A43.4
- Eier
 - bemalte, A26.3
 - fallende, A26.4
 - gepackte, A26.2
- Einbahnstraße, A28.4
- Einsen, A26.1
- Eisenbahnstrecken, A36.4
- Ellipse, A48.3
- Färbungsprinzip, A30.1
- Fässer voll Rum, A34.1
- Fahrrad, A41.2
- Faktorisierung, A47.3
- Farben, A26.3
- Feld, benachbartes, A30.1
- Fenster, A27.3
- Feuerwehr, A40.1
- Fleckendorf, A40.1
- Fliesen, A33.4
- Fünfsatzmatch, A48.2
- Fußball, A41.1, A49.3
- Garten, quadratischer, A37.4
- Gaußklammer, A27.1
- Gefäße mit Bowle, A34.2
- Geometrie, A26.2, A28.4, A29.3, A30.4, A33.3, A34.2, A36.2, A37.3, A37.4, A38.3, A40.4, A41.2, A47.4, A49.3
 - analytische, A28.1
 - kombinatorische, A27.2, A36.4, A39.3, A42.2, A43.3, A45.2, A46.4
 - räumliche, A35.4, A36.4, A38.4, A44.4, A48.3
- Geschenk für Tante, A50.4
- Gewinnchancen, A29.2
- Glasoflex, A27.3
- Gleichung, A27.3, A28.4, A31.2, A35.2, A39.4, A46.2
 - ssystem, A27.3, A50.2
 - mit Gaußklammer, A27.1
- Goldtaler, A46.4
- Gummiband, A39.3
- guter Stern, A37.1

- Heronverfahren, A35.3
Herr Meyer
 mit Fliesen, A33.4
 mit Garten, A37.4

Invarianzprinzip, A28.2, A31.4, A34.4, A44.2

Karsten, A35.2
Kartenstapel, A31.4
Kastanienbaum, A45.1
Katrín, A39.2
Kegel, A48.3
Kegelstumpf, A34.2
Keksdosen, A32.3
Kerzen, A32.4, A49.1
Kirstin, A44.2
Kloster Wan-Dan, A43.4, A44.4, A45.4, A48.4
Kombinatorik, A26.3, A26.4, A28.2, A29.4, A30.1, A30.3, A31.4, A32.2, A33.4, A34.1, A34.3, A34.4, A38.1, A39.2, A40.1, A41.3, A42.3, A42.4, A43.2, A43.4, A44.2, A44.3, A44.4, A45.3, A45.4, A46.3, A47.1, A48.4, A49.1, A50.3, A50.4
 geometrische, A27.2, A36.4, A39.3, A42.2, A43.3, A45.2, A46.4, A47.2, A49.2
Konstruktion mit Zirkel und Lineal, A47.4
Kontonummer, A41.3
Kreis, A29.3
 aus Gleichung, A28.1
 Kinder im, A44.2
 mit Dreieck über Mittelpunkt, A37.3
Kreuzprodukt, A35.4
Kristin, A35.2
Kubikzahl, A31.3, A49.4
Kugel, A36.4
 rollende, A38.4
Kugelkoordinaten, A35.4

Lämpchen, A31.1
Langfinger Paul, A41.2
Lars, A44.2
Lichterkette
 entlang laufen, A31.1
 umdrehen, A32.4
Logik, A29.2, A32.1, A32.4, A34.3, A35.1, A37.2, A38.1, A44.1, A47.1
lupfig, A32.2
Luxor, A35.4

Masseverlust, A36.1
Mathematikerbank, A41.3
Mathematikerorden, A29.3
Matthias Lothar, A41.1
Melone, A36.1
Mensa, A30.3
Mittelpunkt, A46.4
 eines Quadrats, A40.4
Moais, A46.4
Mönch, Figur, A48.4
Münze
 Ein- und Zwei-Euro-, A46.3
 werfen, A28.3
Museum, A36.2

Nägel, A39.3
Näherungsbruch, A35.3
Niko & Laus, A49.2
Nordpol, A38.4
Nullstelle, ganzzahlige, A41.4

Osterinsel, A46.4
Osternest, A26.2

Pablo, A43.3
Packung mit Kreisen, A26.2
Parabel mit Parameter, A28.1
Partei, A46.1
periodisch, A45.3
Permutation, A45.4
Peter
 der die Straße überquert, A28.4
 Kaufhausgehilfe, A32.3
 mit Geburtstagsbowle, A34.2
Piraten, die sich Rum teilen, A34.1
Planet
 Kappa, A36.4
 Omega, A42.3
Platonische Körper, A50.3
Platte, kreisförmige, A37.3

- Polynom, A41.4
- Primzahl, A36.3, A41.3, A47.1, A47.3
- Produkte, paarweise, A34.3
- Prozentrechnung, A36.1
- Punkte
 - auf einem Gitter, A42.4
 - in der Ebene, A42.2
- Puzzle, A35.2
- Quader, A47.2
- Quadrat, A40.4
 - mit Ecken auf Gitter, A42.4
 - Summe von zweien, A32.3
 - vollständiges, A31.2
 - zerlegen, A45.2
- quadratische Ergänzung, A33.2
- Quadratzahl, A26.1, A27.4, A31.1, A37.1, A43.2, A49.4
- Quersumme, A39.1
- Randteile, A35.2
- Rapanuia, A46.4
- Rasen, quadratischer, A38.3
- Raum, sternförmiger, A36.2
- Rechnen, A27.3, A28.4, A29.1, A31.2, A34.1, A34.3, A34.4, A35.3, A36.1, A37.1, A37.2, A40.3, A41.1, A41.4, A42.1, A42.4, A43.1, A44.1, A45.1, A46.1, A48.1
- Rekursion, A40.3
- Robert, A35.2
- Rum in 21 Fässern, A34.1
- Rundfunkstation, A42.3
- Rundweg, A50.3
- Säule, A37.3
- Salvador, A43.3
- Schachbrett, A30.1, A48.4
- Schachtel minimaler Oberfläche, A49.3
- Schafe, A38.3
- Schaltjahr, A35.1
- Schubfachprinzip, A26.3, A41.3, A42.2
- Sechseck, A29.3
- senkrecht, A44.1
- Siegfried, A28.2
- Sparschwein, A46.3
- Spiel, A37.3, A39.2, A43.3, A44.2
- Spur, A41.2
- Stäbe, A27.2
- Stammbrüche, A34.4
- sternförmig, A36.2
- Straße, die von Peter überquert wird, A28.4
- Studenten in der Mensa, A30.3
- Summe
 - der Kuben der Anzahlen der Teiler der Teiler, A49.4
 - lupfiger Zahlen, A32.2
 - von Potenzen, A43.2
- Superei, Firma, A26.4
- Symmetrie, A39.2
- Taschenrechner, A37.2
- Tastenfolge, A37.2
- teilbar, A38.2, A43.1
- Teiler, A30.2, A33.1, A36.3, A46.2, A47.2, A49.4
 - zweitgrößter, A50.1
- Teileranzahl, A31.1
- teilerfremd, A29.4
- Tempel, A37.3
- Tennis, A48.2
 - ball, A49.3
- Tisch
 - deckchen, A30.4
 - quadratischer, A30.4
 - runder, A30.3
- Titelbild, A42.3
- Tobias, A32.1
- Tokio, A35.4
- Topologie, A44.4
- Trapez, gleichschenkliges, A45.2
- Trichter mit Wasser, A40.1
- Triell, A29.2
- Überdeckung, A43.3
- Uhr, A44.1
- Umordnen von Karten, A31.4
- Ungleichung, A41.1
- Vielfache von 39, A39.1

- Volumen
 halbieren, A44.4
 von Bowle, A34.2
- Wächter, A36.2
- Wahl, A46.1
- Wahrscheinlichkeit, A28.3, A28.4, A29.2,
 A32.4, A37.3, A46.3, A48.2, A50.4
- Wan-Dan, A43.4, A44.4, A45.4, A48.4
- Wappen, A29.3
- Washington, A35.4
- Weihnachten
 Baum, A32.4
 Engel, A32.1
 Geschenke, A32.1
 Mann, A49.3
 Teufel, A32.1
- Wert eines Terms, A31.2
- Wilder Westen, A29.2
- Winkel, A42.2
- Wolfgang, A39.2
- Würfel, A27.4, A47.2
 -strauch, A50.3
- Wurzel, A40.3
 k -te aus 10, A40.2
 ergibt ganze Zahl, A33.2
 Summe von zweien, A29.1
- Yvonne, A28.3
- Zacharias, A28.3
- Zahl
 dreistellige, A29.4, A38.2, A43.1
 größere, A29.1
 kleinste, A33.1
 komplexe, A40.3
 Kubik-, A31.3
 lupfige, A32.2
 schöne, A40.2
 teilbar durch ihre Ziffern, A32.2
 vierstellige, A29.4
 Zaubertrick mit, A42.1
 zweistellige, A38.2
- Zahlen
 an der Tafel, A34.4
 drei aufeinanderfolgende, A30.2
 voreinandergestellte, A38.2, A43.1
Zahlenfolge, A44.3, A45.3
Zahlentheorie, A26.1, A27.4, A29.4, A30.2,
 A31.1, A31.3, A32.2, A32.3, A33.1,
 A33.2, A35.2, A35.3, A36.3, A37.1,
 A38.2, A39.1, A40.2, A41.4, A42.3,
 A43.1, A43.4, A44.3, A45.3, A46.2,
 A47.2, A47.3, A48.1, A49.1, A49.2,
 A49.4, A50.1
Zaubertrick, A42.1
Zeiger einer Uhr, A44.1
Ziffern, A29.4
 im Satz, A47.1
Ziffernumkehr, A48.1
Zweien, A26.1
Zylinder, A34.2
- 29, A38.2
39, A39.1

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	1
Über den Korrespondenzzirkel	3
Anmeldecoupon	4
I Aufgaben	5
Aufgabenblatt 26	7
Aufgabenblatt 27	9
Aufgabenblatt 28	11
Aufgabenblatt 29	13
Aufgabenblatt 30	15
Aufgabenblatt 31	17
Aufgabenblatt 32	19
Aufgabenblatt 33	21
Aufgabenblatt 34	23
Aufgabenblatt 35	25
Aufgabenblatt 36	27
Aufgabenblatt 37	29
Aufgabenblatt 38	31
Aufgabenblatt 39	33
Aufgabenblatt 40	35
Aufgabenblatt 41	37
Aufgabenblatt 42	39
Aufgabenblatt 43	41
Aufgabenblatt 44	43
Aufgabenblatt 45	45
Aufgabenblatt 46	47
Aufgabenblatt 47	49
Aufgabenblatt 48	51
Aufgabenblatt 49	53
Aufgabenblatt 50	55

II	Lösungen	57
	Lösungen zu Aufgabenblatt 26	59
	Lösungen zu Aufgabenblatt 27	65
	Lösungen zu Aufgabenblatt 28	72
	Lösungen zu Aufgabenblatt 29	76
	Lösungen zu Aufgabenblatt 30	81
	Lösungen zu Aufgabenblatt 31	85
	Lösungen zu Aufgabenblatt 32	89
	Lösungen zu Aufgabenblatt 33	93
	Lösungen zu Aufgabenblatt 34	96
	Lösungen zu Aufgabenblatt 35	100
	Lösungen zu Aufgabenblatt 36	107
	Lösungen zu Aufgabenblatt 37	111
	Lösungen zu Aufgabenblatt 38	116
	Lösungen zu Aufgabenblatt 39	122
	Lösungen zu Aufgabenblatt 40	127
	Lösungen zu Aufgabenblatt 41	135
	Lösungen zu Aufgabenblatt 42	139
	Lösungen zu Aufgabenblatt 43	143
	Lösungen zu Aufgabenblatt 44	148
	Lösungen zu Aufgabenblatt 45	153
	Lösungen zu Aufgabenblatt 46	160
	Lösungen zu Aufgabenblatt 47	165
	Lösungen zu Aufgabenblatt 48	168
	Lösungen zu Aufgabenblatt 49	174
	Lösungen zu Aufgabenblatt 50	179
	Index	185

In eigener Sache

Ebenfalls erschienen im Universitätsverlag Göttingen ist der erste Band mit Aufgaben und Lösungen des Mathematischen Korrespondenzzirkels Göttingen.

Voller Knocheleien

Erarbeitet von Wolfgang Barthel, Andreas Röscheisen, Karsten Roeseler, Robert Strich, Kristin Stroth und Barbara Zwicknagl

Publiziert 2005

Softcover, 180 S.

ISBN 978-3-930457-76-2



Aus dem Klappentext:

25 Aufgabenblätter voll mit kniffligen Problemen laden zum Knobeln und Überlegen ein. Neben einigen „Klassikern“ finden sich viele neue Probleme aus Zahlentheorie, Kombinatorik und Geometrie sowie Denksport- und Experimentieraufgaben mit oft verblüffenden Ergebnissen. Sie entstanden durch die Arbeit des Mathematischen Korrespondenzzirkels Göttingen, einer Arbeitsgemeinschaft für Schülerinnen und Schüler ab Klasse 9. Ganz bewusst wurde auf eine interessante Formulierung der Aufgabenstellung Wert gelegt, so dass die Aufgaben oftmals auch für Jüngere zugänglich sind. Andererseits werden dadurch auch interessierte Erwachsene Freude am Lesen und Lösen haben.

Zu beziehen ist das Buch entweder direkt bei den Autoren unter <http://www.math.uni-goettingen.de/zirkel/knocheleien.html> oder alternativ beim Universitätsverlag Göttingen (<http://www.univerlag.uni-goettingen.de>).