# Hilbert e la TEORIA DEGLI INVARIANTI

Fabrizio Catanese
Georg-August-Universität Göttingen

22 luglio, 2000

La nascita della teoria degli invarianti viene attribuita a Lagrange e Gauss, in connessione con la teoria delle forme quadratiche binarie, ma sicuramente si sviluppo' piu' avanti nel corso del diciannovesimo secolo, in cui in effetti domino' la scena per lungo tempo, grazie alla sinergia con la geometria proiettiva di Monge, Poncelet, Möbius, Chasles, ed altri geometri ancora.

Quali veri e propri fondatori della disciplina vengono riconosciuti A. Cayley e J.J. Sylvester, mentre Hilbert, pur risolvendo il problema aperto piu' importante della teoria, ebbe in fato di passare alla storia (parole di H. Weyl, in [Weyl 2-3] ) come colui che quasi uccise la teoria degli invarianti.

Possiamo pero' ripetere, citando il compianto Gian Carlo Rota : " La teoria degli invarianti e' come la araba fenice, che risorge dalle proprie ceneri".

Per il lettore non esperto, dobbiamo innanzitutto chiarire che la morte della teoria degli invarianti, se proprio la dobbiamo chiamare cosi', coincise pero' con la nascita della algebra commutativa, ed anche dei fondamenti della geometria algebrica moderna. Queste ceneri erano dunque cosi' ricche di fermenti nuovi, che non suona percio' come contraddizione che poi la teoria stessa degli invarianti sia risorta su basi assai piu' generali, e sia oggigiorno cosi' di nuovo un argomento di vivo ed attuale interesse ( cf. [Procesi] e la introduzione di [Hilb4]).

I lavori principali di Hilbert sull' argomento sono

1) " Über die invarianten Eigenschaften spezieller binärer Formen, insbesondere die Kugelfunktionen" ( Sulle proprieta' invarianti di speciali forme binarie, in particolare le funzioni circolari) : questo lavoro, del 1885, fu la tesi di Promotion ( Dottorato) di Hilbert, scritto a Königsberg, cosi' come i successivi

2) "Über einen allgemeinen Gesichtspunkt für invarianten theoretische Untersuchungen in binäre Formengebiete", ( Su un punto di vista generale per ricerche di teoria degli invarianti in domini di forme binarie), tesi di Habilitation ( Libera Docenza) , apparso nel 1887 sui Mathematische Annalen ( pp.381- 446 ).

Le ricerche di Hilbert culminarono nelle altre due ponderose memorie

3) " Über die Theorie der algebraische Formen", apparso nel 1890 sui Mathematische Annalen ( pp. 473-534) , a cui faremo riferimento come [Alg. Form.], e

4) " Über die vollen Invariantensysteme" , Mathematische Annalen ( pp. 313- 373) 1893, a cui faremo riferimento come [Inv. Syst.].

Dopo il 1893, scrisse solo un altro lavoro sull' argomento in questione. Questo atteggiamento era assai tipico in Hilbert, che si e' interessato di campi di ricerca fra loro assai diversi, ma quasi sempre concentrando le proprie pubblicazioni nei singoli campi in periodi di tempo circoscritti.

Hilbert tenne pero' ancora corsi sulla teoria degli invarianti ( vedi [Hilb4 ]) e sicuramente continuo' ad interessarsi e a discutere di questi problemi, basti pensare che Emmy Noether fu sua collaboratrice, e che il contributo fondamentale di Emmy Noether fu proprio quello di fondare la algebra astratta, estendendo i risultati di Hilbert ad un contesto piu' generale ( chiamato in seguito: teoria degli anelli Noetheriani), e semplificando e chiarendo, insieme ad Hermann Weyl, Emil Artin e van der Waerden, molti degli argomenti originali di Hilbert.

# 1 Il concetto di invariante

**Definition 1** *Sia $G$ un gruppo che agisce su un insieme $X$: allora una funzione $f : X \to Y$ si dice INVARIANTE se $\forall g \in G, \forall x \in X$ si ha*
$f(x) = f(g^{-1}x)$ .

Il significato geometrico e' evidente : la funzione $f$ deve essere costante sulle orbite di $G$ , cioe' sugli insiemi della forma
$Gx = \{y | \exists g \in G, t.c. y = gx\}$.

Nella maggior parte dei casi qui considerati, come l' esempio successivo, si avra'
$Y = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$.

**Example 1** *L'esempio classico del birapporto si ha considerando una quaterna ordinata* $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ *di punti distinti sulla retta proiettiva* $\mathbf{P^1} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$.

*Il birapporto della quaterna e' il seguente quoziente di rapporti semplici (cf. [Courant Robbins])*

$Bir(x_1, x_2, x_3, x_4) := \frac{\frac{x_3-x_1}{x_3-x_2}}{\frac{x_4-x_1}{x_4-x_2}} = \frac{x_3-x_1}{x_3-x_2} \times \frac{x_4-x_2}{x_4-x_1}$

*che risulta essere un invariante per la azione del gruppo* $GL(2)$ *per cui una matrice invertibile* $g \in GL(2)$

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

*opera nel modo seguente*

$x_i \to \frac{ax_i+b}{cx_i+d}$ *per i=1,..4.*

Nell'esempio teste' dato si verifica inoltre che ogni funzione invariante,che sia continua, od espressa da una funzione razionale negli argomenti $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ si lascia scrivere come funzione del birapporto.

La situazione diventa subito piu' complicata in dimensione piu' alta , come mostra il secondo esempio, che il lettore interessato potra' vedere ampiamente trattato nel libro di Hermann Weyl " The classical groups" ( [Weyl1]).

**Example 2** *Consideriamo il gruppo delle matrici ortogonali* $n \times n$ *complesse,* $G = O(n, \mathbf{C})$ *che agisce sullo spazio vettoriale* $V := \mathbf{C^n}$ *, e quindi anche sul prodotto Cartesiano* $X := V^m = \{\mathcal{V} = (v_1, .., v_m)\}$ *che posso anche vedere come lo spazio delle matrici* $n \times m$.

In questo caso consideriamo l'anello $\mathcal{A}$ delle funzioni polinomiali su $X$ che sono invarianti per la azione del nostro gruppo $G$.

L' anello $\mathcal{A}$ e' generato come $\mathbf{C}$)-algebra ( I Teorema fondamentale) dai prodotti scalari

$y_{ij} :=< v_i, v_j >$.

Da una parte e' chiaro che questi prodotti scalari sono invarianti, dall' altra un po' di geometria ci viene in aiuto per capire meglio la situazione:

consideriamo la applicazione

$\Psi : \mathcal{V} \to Y :=^t \mathcal{V}\mathcal{V}$

che associa alla matrice $\mathcal{V}$ la sua cosiddetta MATRICE di GRAM $Y$.

Come si suole vedere oggigiorno in un buon corso di algebra lineare, l' immagine della applicazione $\Psi$ consiste dell' insieme $\Delta_d$ delle matrici di rango minore od eguale a $d := min(m,n)$.

Il nostro insieme $\Delta_d$ e' definito da equazioni polinomiali, poiche' una matrice ha rango minore od eguale a $d$ se e solo se tutti i determinanti dei minori di ordine $(d+1) \times (d+1)$ si annullano.

Definendo $I_{d+1}$ come l' ideale generato dai predetti determinanti dei minori di ordine $(d+1) \times (d+1)$, e' allora assai plausibile il II Teorema fondamentale di Weyl che asserisce che

L'anello $\mathcal{A}$ degli invarianti e' uguale all'anello quoziente

$\mathbf{C}[y_{ij}]/I_{d+1}$.

Per chi sa un po' di geometria algebrica, questo e' l' anello delle coordinate omogenee della varieta' determinantale $\Delta_d$, e la applicazione $\Psi$ e' un quoziente categorico $V^m//O(n)$, cioe' un quoziente nel senso della teoria degli invarianti.

Spiegare in dettaglio cosa e' un quoziente categorico esula dal nostro scopo ( vedi [GIT]), pero' possiamo mostrare facilmente come la applicazione $\Psi$ non sia un quoziente topologico per la azione del gruppo $G = O(n)$ (e quindi giustificare in qualche modo il bisogno di introdurre un concetto diverso di quoziente).

**Example 3** *Consideriamo il caso $m = 1$ in cui c'e' un solo vettore. Allora c'e' un solo invariante, cioe' il quadrato della norma del vettore, dunque si ha $\Psi : V \to \mathbf{C}$.*

*Ma $V/O(n) \neq \mathbf{C}$, poiche' in $V$ ci sono i cosiddetti vettori ISOTROPI, cioe' quei vettori $v$ non nulli tali che $< v, v >= 0$. Per ogni vettore isotropo l' invariante si annulla, ma un vettore isotropo non nullo non e' $G$-equivalente al vettore nullo.*

**Remark 1** *Si puo' osservare pero' come, se ci restringiamo al sottospazio $\mathbf{R^n}$ dei vettori reali, allora la applicazione $\Psi$ da' un quoziente topologico.*

*Questo esempio, in cui il quoziente reale ($\mathbf{R}$) per il gruppo compatto $O(n, \mathbf{R})$ esiste, e la sua complessificazione $\mathbf{R} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = \mathbf{C}$ da' il quoziente categorico, ha ispirato una serie di recenti lavori, in cui la parola chiave e' la cosiddetta "moment map"( cf. [G-S ] , [Kirwan]).*

Abbiamo scelto il precedente esempio proprio perche' esso mostra bene il legame profondo tra la teoria degli invarianti e la geometria algebrica.

Infatti, cercheremo di mostrare come [ Alg.Form.], con i suoi teoremi fondamentali che oggi sono i teoremi pilastro dei fondamenti della geometria algebrica, segni la nascita della algebra commutativa, anzi piu' in generale dell' algebra moderna. E' questa la opera piu' significativa di Hilbert? Saremmo tentati di dir di sì.

## 2 Invarianti delle forme binarie ed n-arie

Le forme n-arie , nella terminologia classica, sono i polinomi omogenei in n-variabili. In altre parole una forma n-aria di grado $k$ e' un polinomio omogeneo $P(z_0, ..z_{n-1})$ su $\mathbf{C^n}$.

Il caso piu' investigato nella seconda meta' del secolo scorso fu quello delle forme binarie, ossia quando si ha $n = 2$ , e si considera il gruppo $G = SL(2, \mathbf{C})$, delle matrici $2 \times 2$ a determinante uguale ad 1.

Vari autori , fra cui Cayley, Clebsch, Aronhold, Faà di Bruno, Capelli, arrecarono notevoli contributi, ma " re degli invarianti" fu decretato Paul Gordan ( relatore di Emmy Noether), il quale risolse in modo esplicito ed algoritmico il problema della finitezza degli invarianti delle forme binarie.

Vediamo un po' di presentare i punti salienti della teoria degli invarianti delle forme n-arie.

IL METODO SIMBOLICO DI ARONHOLD

1) Problema : trovare polinomi $f$ omogenei di peso (=grado) $d$ nei coefficienti delle forme $P$ n-arie di grado $k$ , che siano invarianti per la azione del gruppo $G = SL(n, \mathbf{C})$.

2) Prima trasformazione del problema : ad un tale polinomio $f$ corrisponde una ed una sola forma multilineare simmetrica $F(P_1, ..., P_d)$.

$F$ determina $f$ via il facile processo di

2a) Restituzione : $f(P) := F(P, ..., P)$.

A sua volta, tale $F$ si ottiene da $f$ attraverso il processo di

2b) Polarizzazione : poiche' $f(\lambda_1 P_1 + ..\lambda_d P_d)$ e' un polinomio nelle variabili $\lambda_1, .., \lambda_d$, $F(P_1, ..., P_d)$ viene definito come il coefficiente di $\lambda_1..\lambda_d$ diviso per $d!$ .

3) Seconda trasformazione del problema: $F(P_1, ..., P_d)$ e' completamente determinato dai valori che esso assume sulle d-tuple di polinomi $P_i$ che sono potenze di forme lineari $P_i = L_i^k$, poiche' l'insieme di queste potenze genera lo spazio vettoriale dei polinomi omogenei di grado $k$.

Percio' alla forma multilineare simmetrica $F$ corrisponde un polinomio $\phi(L_1, ...L_d)$ multiomogeneo di grado $k$ attraverso la formula

3b) $\phi(L_1, ...L_d) = F(L_1^k, ..., L_d^k)$.

E' facile vedere che tale $\phi$ e' simmetrica e $G = SL(n, \mathbf{C})$-invariante, e che tale corrispondenza e' bigettiva; basta infatti, riducendosi al caso $d = 1$, verificare che una forma lineare sui polinomi omogenei di grado $k$ e' la stessa cosa che un polinomio omogeneo di grado $k$ sui polinomi di grado 1 : questo fatto, in caratteristica zero, oggigiorno e' espresso dalla formula

$S^k(V)^\vee = S^k(V^\vee)$

che esprime la commutativita' delle operazioni : prendere il duale, e prendere la k-esima potenza simmetrica. Siccome a questo punto il lettore meno versato si puo' essere spaventato, in pratica quel che si dice e' che, dato un polinomio omogeneo $P = \Sigma_{|I|=k} a_I x^I$ ed una forma lineare $F(P) = \Sigma_{|I|=k} b_I a_I$, ad essa corrisponde un polinomio $\phi = \Sigma_{|I|=k} b_I y^I$, dove le coordinate $y_i$ sono le coordinate duali delle coordinate $x_i$.

4) Soluzione del problema : siamo ridotti dunque a calcolare gli invarianti di $d$ forme lineari ( per l'azione del gruppo lineare). Come piu' tardi chiarito dal citato Hermann Weyl, tali invarianti sono combinazione lineare di determinanti formati con $n$ forme lineari.

Nel caso $n = 2$, avremo quindi che la $\phi$ e' una combinazione lineare di prodotti di determinanti $(L_i, L_j)$, ove $(L_i, L_j)$ denota il determinante della matrice due per due formate dalle due righe $L_i, L_j$ ( rappresentiamo i vettori di $V$ come colonne, e gli elementi dello spazio duale come righe).

**Example 4** *Rimanendo nel caso $n = 2$ delle forme binarie, la facile osservazione che il determinante e' una funzione alternante dei due argomenti, mentre la $F$ e' una funzione simmetrica dei suoi argomenti, ci assicura che tutti i prodotti di determinanti $(L_i, L_j)$ devono avere esponente pari, e quindi $k$ e' un intero pari.*

*Per $k = 2$ esiste un unico invariante, quadratico, delle forme quadratiche, cioe' il ben noto discriminante di una forma quadratica.*

*Esso corrisponde all' invariante $(L_1, L_2)^2$, e gli unici invarianti sono solo le potenze r-esime del discriminante, che corrispondono agli invarianti $\Sigma_{\sigma \in \mathcal{S}_{2r}} (L_{\sigma(1)}, L_{\sigma(2)})^2 ... (L_{\sigma(2r-1)}, L_{\sigma(2r)})^2$.*

*La situazione e' piu' interessante per le forme di grado $k = 4$.*

*Per $d = 2$ abbiamo l' invariante $I$ corrispondente a $\phi_2 = (L_1, L_2)^4$ , per $d = 3$ abbiamo l' invariante $J$ corrispondente a $\phi_3 = (L_1, L_2)^2 (L_1, L_3)^2 (L_2, L_3)^2$.*

*Il facile esercizio di identificare $I$, $J$ seguendo le trasformazioni (inverse) del problema si realizza cosi': scriviamo*

$L_1 = (u_0x_0 + u_1x_1), L_2 = (u'_0x_0 + u'_1x_1)$

*percio'* $\phi_2 = (u_0u'_1 - u_1u'_0)^4 =$
$u_0^4{u'}_1^4 - 4u_0^3u_1{u'}_1^3u'_0 + 6u_0^2u_1^2{u'}_1^2{u'}_0^2 - 4u_0u_1^3u'_1{u'}_0^3 + u_1^4{u'}_0^4$ .

*A questo polinomio, poiche'* $L_1^4 = (u_0x_0 + u_1x_1)^4 =$
$u_0^4x_0^4 + 4u_0^3u_1x_0^3x_1 + 6u_0^2u_1^2x_0^2x_1^2 + 4u_0u_1^3x_0x_1^3 + u_1^4x_1^4 =$
$a_0x_0^4 + 4a_1x_0^3x_1 + 6a_2x_0^2x_1^2 + 4a_3x_0x_1^3 + a_4x_1^4$

*corrisponde una funzione bilineare di una coppia di polinomi di grado 4, cioe' la funzione*

$F_2(P,P') = a_0a'_4 - 4a_1a'_3 + 6a_2a'_2 - 4a_3a'_1 + a_4a'_0$ , *e, per restituzione (poniamo dunque $P = P'$), il polinomio*

$I(P) = 2(a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2)$.

*Simili calcoli ci danno che*

$$J(P) = 6det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$

Il caso $k = 4$ e' ultraclassico, e vale in realta' il seguente

**Theorem 1** *L' anello degli invarianti per le forme binarie di grado* 4 *e' un anello di polinomi* $\mathbf{C}[I,J]$.

Il motivo fondamentale per cui vale il precedente teorema e' dovuto al fatto che, se prendiamo gli invarianti per $GL(n,\mathbf{C})$ invece che per $SL(n,\mathbf{C})$, si vede facilmente che i sopracostruiti invarianti per $SL(n,\mathbf{C})$ di peso $d$ sono dei covarianti di peso $d$ per $GL(n,\mathbf{C})$, nel senso che non sono invarianti per una trasformazione $g$, bensi' vengono moltiplicati per la potenza $d$-esima del determinante di $g$ . In questo caso non ci sono polinomi $GL(n,\mathbf{C})$ - invarianti, bensi' solo funzioni razionali invarianti. Il campo delle funzioni razionali $GL(n,\mathbf{C})$- invarianti e' allora il campo delle frazioni omogenee di peso 0 dell' anello degli $SL(n,\mathbf{C})$- invarianti.

Ad esempio, il discriminante del polinomio di grado $k = 4$ e' espresso, a meno di una costante, da $8\Delta = I^3 - 6J^2$ , ed il campo delle funzioni razionali $GL(2,\mathbf{C})$- invarianti sulle forme binarie di grado $k = 4$ e' generato dalla funzione $j = (1/8)I^3/\Delta$, cosicche' tale campo e' il campo $\mathbf{C}(j)$.

Infatti , se consideriamo funzioni invarianti di peso 0 stiamo lavorando sullo spazio proiettivo associato, e quindi, per $k = 4$, poiche' ogni forma binaria e' un prodotto di forme lineari, stiamo lavorando sullo spazio delle quaterne di punti della retta proiettiva $\mathbf{P^1}$. Come gia' visto, se prendiamo quaterne ordinate, l' unica funzione razionale invariante e' il birapporto, che denoteremo con $\lambda$. Siccome prendiamo quaterne non ordinate, dobbiamo prendere l' unica funzione di $\lambda$ che sia invariante per la azione del gruppo delle permutazioni di quattro elementi.

Allora, un calcolo elementare mostra come la unica funzione invariante sia la funzione

$j(\lambda) = \frac{(\lambda^2-\lambda+1)^3}{\lambda^2(\lambda-1)^2}$

che, con un po' di fatica, si verifica coincidere con la $j$ data in precedenza.

Per gli esperti, osservero' che l' interesse del precedente teorema proviene dal legame con la teoria delle funzioni ellittiche, altro argomento centrale nella matematica del secolo scorso.

Infatti, ogni curva ellittica si puo' portare in "forma normale" di Weierstrass , come cubica piana di equazione non omogenea

$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$, e , ponendo $P(x) = 4x^3 - g_2x - g_3$,

otteniamo un polinomio di grado 4 con $a_0 = a_2 = 0, a_1 = 1, a_3 = -g_2/4, a_4 = -g_3$. Percio', $I = 2g_2, J = 6g_3, \Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ e l' invariante $j = \frac{g_2^3}{g_2^3-27g_3^2}$ assume lo stesso valore per due curve ellittiche esattamente quando queste due curve sono tra loro biolomorfe.

# 3 Il problema degli invarianti delle forme e la "soluzione" di Hilbert

Ritorniamo al caso classico delle forme binarie di grado $k$. Abbiamo visto come la struttura dell' anello degli invarianti sia molto semplice per $k = 4$. Una grande messe di lavori, ad opera di vari autori, fra cui ad esempio Faa' di Bruno ( vedi ad esempio gli articoli [C-Z1], [C-Z2]) fu dedicato alla ricerca di generatori per tale anello, per valori di $k$ bassi, $k \leq 10$.

Sulla struttura di tale anello sono ritornati anche autori moderni, come Igusa ( [Ig]) per $k = 6$ e Shioda ([Shi]) per $k = 8$, ma la determinazione della struttura per valori piu' grandi $k > 8$ rappresenta ancora una sfida per i matematici odierni a sviluppare effettivi metodi algoritmici.

Poiche' i coefficienti di una forma binaria monica sono le funzioni elementari simmetriche delle radici della forma, dette ricerche ( ad opera di Cayley, Betti, Salmon, il citato Faa' di Bruno) si intrecciarono col problema intermedio dello studio delle funzioni simmetriche e della loro algebra; come gia' osservato, il campo delle funzioni razionali invarianti per $GL(2)$ si puo' vedere come il campo delle funzioni razionali di $k$ punti sulla retta proiettiva, invarianti per proiettivita' e per permutazione dei $k$ punti. Se si prende poi la radice quadrata di tale polinomio, si associa al polinomio con le date radici una curva iperellittica (una curva ellittica se $k = 4$): e dunque il problema suddetto e' oggigiorno menzionato come il problema del campo delle funzioni razionali sopra lo spazio dei moduli delle curve iperellittiche.

Il contributo maggiore sulle forme binarie fu quello del citato "re degli invarianti" Paul Gordan, il quale dimostro'

**Theorem 2** *(TEOREMA di GORDAN) : dato $k$ qualsiasi, l' anello degli invarianti per $SL(2, \mathbf{C})$ delle forme binarie di grado $k$ e' finitamente generato ( come $\mathbf{C}$-algebra) ed esiste un algoritmo esplicito che permette di trovarne un insieme finito di generatori.*

Restava il grosso problema della finitezza degli invarianti nel caso generale delle forme $n$-arie , per $n$ arbitrario.

In una lettera ad A. Cayley del 24 gennaio 1889 il giovane Hilbert annuncia soddisfatto il suo importante teorema, che verra' presto pubblicato nel 1890 in [Alg.Form.]:

**Theorem 3** *(TEOREMA di finitezza di HILBERT) : dati $k, n$ qualsiasi, l' anello degli $SL(n, \mathbf{C})$-invarianti delle forme $n$-arie di grado $k$ e' finitamente generato (come $\mathbf{C}$-algebra).*

*Piu' generalmente, sia data una azione lineare di $SL(n, \mathbf{C})$ su uno spazio vettoriale $W$. Allora l' anello delle funzioni polinomiali su $W$ che sono $SL(n, \mathbf{C})$-invarianti e' finitamente generato (su $\mathbf{C}$).*

Purtroppo, la generalita' del risultato e la complessita' del problema non permisero ad Hilbert (ma anche a messun altro matematico in seguito) di indicare un algoritmo cosi' esplicito come quello di Gordan, che si basava su una formula esplicita, detta formula di Clebsch-Gordan, e che permette, come vedremo meglio in seguito, di trovare come agisce il gruppo $SL(2, \mathbf{C})$ sullo spazio dei polinomi omogenei di peso $d$ nei coefficienti delle forme binarie.

Il sarcastico commento di Gordan al risultato di Hilbert fu: " Questa e' Teologia, non Matematica!".

Spronato da questo sferzante commento, in [Inv.Syst.] Hilbert ando' avanti, dando stime esplicite sul grado massimale di un insieme minimale di generatori ( in altre parole, Hilbert mostro' che esisteva una funzione esplicita $d(n, k)$ tale che l' anello degli invarianti era generato dagli elementi omogenei di grado minore od eguale a $d(n, k)$).

Lo studio di quest' ultimo lavoro di Hilbert ha ispirato David Mumford a costruire, negli anni 1960-70, una moderna "Teoria Geometrica degli Invarianti", collegata anche al classico problema posto da Riemann sui Moduli delle curve algebriche ( cf. [GIT], [Mum2]).

# 4 Teologia = Algebra moderna: la dimostrazione di Hilbert

Quali sono dunque i metodi nuovi introdotti da Hilbert nel suo Tour de Force per risolvere il problema della finitezza degli invarianti?

Qui il discorso diviene assai semplice, perche' la maggior parte delle idee introdotte sono ormai divenute patrimonio comune di tutti i cultori odierni di matematica.

Infatti, i teoremi principali contenuti nel lavoro [Alg. Form.] sono

**Theorem 4** *(TEOREMA della BASE I) : Ogni ideale $I \subset K[x_1, ...x_n]$ di un anello di polinomi a coefficienti in un campo $K$ e' finitamente generato.*

**Theorem 5** *(TEOREMA della BASE II) : Ogni ideale $I \subset \mathbf{Z}[x_1, ...x_n]$ di un anello di polinomi a coefficienti interi e' finitamente generato.*

Oggi e' piu' nota la versione post-Emmy Noether, che asserisce piu' astrattamente:

Se $\mathcal{A}$ e' un Anello Noetheriano, allora anche $\mathcal{A}[x]$ e' Noetheriano.

Per spiegare il famoso teorema delle sizigie, conviene usare il linguaggio moderno: sia la situazione come nel teorema della base, ma assumiamo che l' ideale $I$ dell' anello di polinomi $A := K[x_1, ..., x_n]$ sia omogeneo, cioe' generato da un insieme (finito) di polinomi omogenei.

In questa situazione si verifica che tutti i sistemi minimali di generatori omogenei non solo hanno la stessa cardinalita', ma esiste una matrice quadrata di cambiamento di base con determinante costante e differente da zero (essenzialmente poiche' l' insieme $I_d$ dei elementi di $I$ che sono omogenei di grado $d$ e' uno spazio vettoriale di dimensione finita).

Sia dunque $\{P_1, ..., P_k\}$ una base di $I$, ovvero un sistema minimale di generatori omogenei di $I$: a questa scelta corrisponde un omomorfismo surgettivo

$\phi : A^k \to I$, il cui nucleo $M$ si chiama il MODULO DELLE RELAZIONI di $I$, o delle PRIME SIZIGIE di $I$.

La parola sizigie viene dalla parola greca "mettere assieme sotto il giogo", ed i tori vengono effettivamente messi sotto il giogo nella cosiddetta teoria delle "sizigie delle varieta' abeliane". Al di la' degli scherzi, le prime sizigie sono allora le $k$-uple di polinomi $(Q_1, ..., Q_k)$ tali che

$Q_1 P_1 + ... + Q_k P_k = 0$.

Adesso, il modulo $M$ ha in comune con $I$ la proprieta' di essere un MODULO GRADUATO, cioe' ogni elemento di $M$ si scrive in modo unico come somma finita di elementi omogenei ( cioe' , $M = \bigoplus_d M_d$, ove $M_d$ rappresenta lo spazio vettoriale (di dimensione finita) degli elementi di $M$ omogenei di grado $d$).

A sua volta, si puo' prendere una base di $M$, ed il modulo delle relazioni per $M$ si chiama il modulo delle SECONDE SIZIGIE di $I$. E' quindi chiaro come si puo' induttivamente definire, per ogni intero $r$, il modulo delle $r$-sizigie.

Si va avanti all' infinito ? Hilbert ci dice di no:

**Theorem 6** *(TEOREMA delle SIZIGIE) : Per ogni ideale omogeneo $I \subset K[x_1, ...x_n]$ di un anello di polinomi a coefficienti in un campo $K$ il modulo delle $r$-esime Sizigie e' nullo non appena $r > n$.*

Nello stesso lavoro inoltre Hilbert introduce e studia le funzioni numeriche, dette oggi funzioni di Hilbert, $f_H(d) := dim_K(A_d/I_d), F_H(d) := dim_K(I_d)$, mostrando che per $d$ sufficientemente grande esse coincidono con dei polinomi ( a loro volta detti oggi POLINOMI DI HILBERT). In realta' Hilbert considera piu' generalmente il concetto di modulo graduato (finitamente generato) e la funzione numerica associata.

E' noto che la funzione di Hilbert $f_H(d)$ porge le definizioni piu' eleganti dei concetti di dimensione e grado del luogo di zeri ( nello spazio proiettivo $\mathbf{P^{n-1}}$) di un ideale $I$ omogeneo.

Infine, [Alg. Form.] culmina col citato teorema di finitezza degli invarianti, in cui la nostra traduzione di "Rationalitätsbereich" e' : "campo di caratteristica zero".

**Theorem 7** *(TEOREMA di finitezza di HILBERT) : dato un campo $K$ di caratteristica zero, ed interi $k, n$ qualsivoglia, l' anello degli invarianti per $SL(n, K)$ delle forme $n$-arie di grado $k$ a coefficienti in $K$ e' finitamente generato ( come $\mathbf{C}$-algebra).*

*Piu' generalmente, sia data una azione lineare di $SL(n, K)$ su un $K$-spazio vettoriale $W$. Allora l' anello delle funzioni polinomiali su $W$ che sono $SL(n, K)$-invarianti e' finitamente generato.*

Prima di accennare alle ulteriori profonde idee di Hilbert che portarono alla dimostrazione del teorema di finitezza, vorremmo proseguire indicando alcuni dei risultati di [Inv.Syst] che sono oggi ben noti al grande pubblico, in primo luogo il

**Theorem 8** *(TEOREMA del LUOGO di ZERI = NULLSTELLENSATZ di HILBERT) : Per ogni ideale $I \subset \mathbf{C}[z_1, ...z_n]$ di un anello di polinomi a coefficienti nel campo $\mathbf{C}$ dei numeri complessi, (od in un campo $K$ algebricamente chiuso) sia $Z(I)$ il luogo degli zeri di $I$ , cioe' il seguente sottinsieme dello spazio affine*

$Z(I) := \{z = (z_1, ..z_n) \in \mathbf{C}^n | P(z) = 0 \forall P \in I\}$.

*Allora, un polinomio $Q$ si annulla sul luogo di zeri $Z(I)$ se e soltanto se esiste una potenza $Q^\nu$ di $Q$ che appartenga all' ideale $I$.*

La dimostrazione che si da' oggigiorno e' piu' semplice di quella originaria, e si basa su un "trucco" introdotto da Rabinowisch nel 1926 ( anche lui della scuola di Hilbert ed Emmy Noether): ridursi al caso di un ideale $I'$ per cui $Z(I')$ sia l' insieme vuoto.

Nel caso in cui $Z(I) = \emptyset$, basta dimostrare che la costante 1 sta nell'ideale $I$.

Ammesso questo caso, il trucco consiste nel considerare per prima cosa l' ideale $I'$ associato ad $I$ nel seguente modo: aggiungiamo una variabile $y$ e consideriamo l'ideale $I' \subset \mathbf{C}[z_1, ..., z_n, y]$ generato dal sistema di generatori $\{P_1, ..., P_k\}$ di $I$ e dal polinomio $yQ(z) - 1$. Chiaramente, se $Q$ si annulla su $Z(I)$, allora non esiste nessun punto $(z, y)$ che soddisfi le equazioni

$P_1(z) = 0, ..., P_k(z) = 0, yQ(z) - 1 = 0$.

Adesso la funzione 1 e' una combinazione

$1 = G_1(z, y)P_1(z) + ... + G_k(z, y)P_k(z) + G(z, y)(yQ(z) - 1)$

ed il trucco finale consiste nel sostituire $y$ con $1/Q(z)$.

Come gia' detto, nel caso in cui $Z(I) = \emptyset$, basta dimostrare che la costante 1 sta nell'ideale $I$, e anche per questo caso particolare esistono oggi molte dimostrazioni: Hilbert, che si riduce al caso in cui il luogo di zeri sia finito, fa appello alla teoria classica della eliminazione. Questo approccio, se non il piu' breve od elegante, mi e' sempre parso quello piu' naturale e didatticamente piu' comprensibile.

Uno dei problemi ancora aperti a riguardo del Nullstellensatz e' la determinazione di stime effettive dall'alto per l' esponente $\nu$ tale che per ogni $Q$ che si annulli sul luogo di zeri $Z(I)$ valga: $Q^\nu \in I$.

Recenti ricerche di Brownawell, Kollar , Ein-Lazarsfeld ed altri autori ([Browna ], [Kollar], [E-L]) hanno condotto ad una determinazione di stime assai buone sotto opportune ipotesi per l' ideale $I$ ( tali ipotesi sono verificate per gli ideali che compaiono nelle questioni di geometria algebrica e di teoria dei numeri trascendenti).

Come osservato anche da David Mumford, i contributi del lavoro [Inv.Syst.] sono ancora in parte da (ri)scoprire, e la disamina sarebbe assai tecnica, mi limitero' percio' ad enunciare il famoso risultato che giace alla base dell' utilissimo strumento in teoria dei moduli chiamato oggi CRITERIO di HILBERT-MUMFORD

**Theorem 9** *(TEOREMA degli ZERI degli INVARIANTI) : Sia data una azione lineare di $SL(n, K)$ su un $K$-spazio vettoriale $W$. Allora l' anello delle funzioni polinomiali su $W$ che sono $SL(n, K)$-invarianti genera un ideale il cui luogo di zeri e' l' insieme dei VETTORI INSTABILI, cioe' dei vettori $w$ che soddisfano :*

*esiste un sottogruppo moltiplicativo ad un parametro $K^* \subset SL(n, K)$ tale che il vettore nullo $0$ giaccia nella chiusura della orbita $K^*w$.*

Passiamo ora a delineare l' argomentazione del teorema di finitezza degli invarianti, che si articola su due punti principali.

**Lemma 10** *Sia data una azione lineare di $G := SL(n, K)$ su un $K$-spazio vettoriale $W$. Allora, detto $K[W]$ l' anello delle funzioni polinomiali su $W$, e $K[W]^G$ il sottoanello delle funzioni polinomiali che sono $G = SL(n, K)$-invarianti, esiste un unico $G$-proiettore lineare $\rho : K[W] \to K[W]^G$ che, per ogni grado $d > 0$ induce una proiezione*

*$\rho : K[W]_d \to K[W]^G_d$*

*( si ha cioe' $\rho^2 = \rho$, il che dice che $\rho$ e' un proiettore, ed inoltre vale: $\rho g(w) = \rho(w) \forall g \in G, w \in W$).*

**Corollary 11** *Se $\rho$ e' l'unico $G$-proiettore ed $f_1 \in K[W]^G$, allora vale: $\forall f_2, \rho(f_1 f_2) = f_1 \rho(f_2)$.*

DIM. Segue subito dai seguenti fatti:

1) un prodotto di invarianti e' un invariante (qui: $f_1\rho(f_2)$)

2) Sul sottospazio dei multipli di $f_1$, $\{f_1 f_2\}$, il termine a destra definisce un G- proiettore.

3) il G- proiettore e' unico . Q.E.D.

**Proposition 12** *Sia data una azione lineare di un gruppo $G$ su di uno $K$-spazio vettoriale $W$. Allora, detto $K[W]$ l' anello delle funzioni polinomiali su $W$, e $K[W]^G$ il sottoanello delle funzioni polinomiali che sono $G = SL(n, K)$-invarianti, se esiste un unico $G$-proiettore lineare $\rho : K[W] \to K[W]^G$ come nel lemma precedente, allora l' anello $K[W]^G$ e' finitamente generato come $K$-algebra.*

DIM.

Sia $K[W]^G_+$ l' unione degli elementi di $K[W]^G$ omogenei e di grado strettamente positivo, $I \subset K[W]$ l'ideale generato da $K[W]^G_+$.

Per il teorema della base, l' ideale omogeneo $I$ e' finitamente generato da un sistema di generatori $\{P_1, ..., P_k\}$ omogenei in $K[W]^G_+$.

TESI : Gli elementi $\{1, P_1, ..., P_k\}$ generano l' anello $K[W]^G$ come $K$-algebra.

INFATTI: l'enunciato si dimostra per induzione sul grado di $f \in K[W]^G$.

Se $f \in K[W]^G_+ \subset I$, allora posso scrivere

$f = Q_1 P_1 + ... + Q_k P_k$.

Applicando il $G$-proiettore $\rho$ ed utilizzando il corollario, ottengo

$f = \rho(f) = \rho(Q_1 P_1 + ... + Q_k P_k) = \rho(Q_1)P_1 + ... + \rho(Q_k)P_k$.

Poiche' ogni $P_i$ ha grado positivo, $\rho(Q_i)$ sta in $K[W]^G$ ed ha grado strettamente minore di $f$. Per ipotesi induttiva allora i $\rho(Q_i)$ stanno nella sottoalgebra generata da $\{1, P_1, ..., P_k\}$, e dunque anche $f$. Q.E.D

Rimane la questione: per quali gruppi $G$ esiste un $G$-proiettore? (un gruppo $G$ si chiama RIDUTTIVO, se per ogni sua azione lineare su un $K$-spazio vettoriale esiste un tale $G$-proiettore).

Poiche' il campo $K$ ha caratteristica zero, la risposta e' positiva nel caso in cui il gruppo $G$ sia finito $= \{g_1, ..., g_t\}$, basta infatti definire:

$\rho(f) = (1/t)\Sigma_{i=1,,t} f \circ g_i^{-1}$.

Piu' generalmente, se il gruppo $G$ e' un gruppo topologico compatto con misura invariante $d\mu_G$ di massa totale $= 1$, invece della media finita si puo' utilizzare il seguente integrale per definire $\rho$:

$\rho(f) = \int_G (f \circ g^{-1}) d\mu_G$.

L' esistenza di un proiettore per $G = SL(n, \mathbf{C})$ segue in modo assai semplice, ma non costruttivo, col seguente argomento dovuto ad Hermann Weyl

IL TRUCCO UNITARIO DI H. WEYL

Il gruppo $G = SL(n, \mathbf{C})$ contiene il sottogruppo compatto $G' = SU(n, \mathbf{C})$ delle matrici unitarie a determinante 1.

Inoltre, il gruppo $G'$ e' denso nella topologia di Zariski di $G$, cioe' ogni identita' polinomiale che vale su $G'$ vale anche su $G$. Data dunque una azione lineare di $G$, che e' data da funzioni polinomiali di $g \in G$, se esiste un $G'$-proiettore $\rho$, allora $\rho$ e' anche un $G$-proiettore.

La risoluzione data da Hilbert del problema dell' esistenza del proiettore (oggigiorno chiamato "operatore di Reynolds") era piu' elaborata, ma anche piu' esplicita.

L'idea e' che, il gruppo $G$ essendo connesso, una identita' come quelle che definiscono la proprieta' di essere un $G$-proiettore vale per ogni $g \in G$ se e solo se vale per $g = Identita'$ ed inoltre la sua derivata e' nulla.

Hilbert usa dunque il metodo introdotto da Cayley, e delle identita' scoperte da Alfredo Capelli per l' algebra di operatori differenziali generata dagli

OPERATORI DIFFERENZIALI sul gruppo $GL(n, \mathbf{C})$
$\Delta_{ij} := \Sigma_{h=1,..n} x_{ih} \partial / \partial x_{jh}$.

Dunque l' approccio di Hilbert, sviluppato poi da Hermann Weyl nel suo libro " The classical groups" ( in cui si trova una ampia discussione delle identita' di Capelli), apri' una ulteriore generalizzazione in cui la teoria degli invarianti diveniva un capitolo di una piu' generale

TEORIA DELLE RAPPRESENTAZIONI DEI GRUPPI CONTINUI.

Questa teoria e' ancora in pieno sviluppo, ed in essa gli operatori differenziali $\Delta_{ij}$ sono i generatori dell' algebra di Lie del gruppo lineare $GL$, e la algebra di operatori differenziali considerata si chiama oggi, quando il gruppo $G$ e' arbitrario, la algebra inviluppante della algebra di Lie del gruppo.

In questo contesto la formula di Clebsch Gordan e' la formula che, data la rappresentazione $S^m(V)$ di $SL(2, \mathbf{C})$ data dalle forme binarie di grado $m$ ($V$ e' uno spazio vettoriale complesso di dimensione 2), decompone il prodotto tensoriale
$S^m(V) \otimes S^p(V) = \Sigma_{i=0,..min(m.p)} S^{m+p-2i}(V)$.

Oggigiorno, ( cf. [Adams]), tale formula si deriva dalla teoria dei caratteri del toro massimale, ed una sua potente generalizzazione e' la formula dei caratteri dovuta ad Hermann Weyl ( cf. [Weyl1], [Humphreys]).

Rimando il lettore interessato ad una piu' completa discussione sulla storia della teoria degli invarianti all' eccellente articolo di Claudio Procesi "150 years of invariant theory" ([Procesi]), pubblicato su un recente volume dedicato alla eredita' matematica di Emmy Noether.

Invece, per gli sviluppi dell' opera di Hilbert nella direzione della edificazione dell' algebra commutativa, ad opera di Emmy Noether, Emil Artin (a cui si deve, cf [Hilb2] la dimostrazione piu' semplice del teorema della base per un anello Noetheriano) e van der Waerden, rimando all' eccellente articolo di Hubert Flenner "Emmy Noether and the development of commutative algebra" ([Flenner]), nonche' al succinto "Nachwort" ( Epilogo) di van der Waerden, ed all' articolo di H. Weyl ( [Wey2-3]).

Per il lettore piu' interessato agli aspetti storici del contributo di Hilbert alla teoria degli invarianti, una fonte assai interessante e' il recente libro della Cambridge University Press ( [Hilb4]) in cui vengono pubblicate le note, scritte da uno studente di nome Sophus Marxsen, di un corso sulla teoria degli invarianti tenuto da Hilbert nel 1897.

Interessante per noi italiani scoprire come, all 'inizio del suo corso introduttivo, Hilbert raccomandasse ai suoi studenti quattro testi fondamentali, tre di Clebsch ( Teoria delle forme algebriche binarie), Salmon ( Modern higher algebra), e Gordan ( Lezioni sulla teoria degli invarianti), ed uno del citato Faà di Bruno ( scritto in francese ed edito a Torino nel 1876, poi tradotto in tedesco da Max Noether che aggiunse una prefazione).

Altre fonti (cf. [Cat]) richiedono una conoscenza della lingua tedesca.

# 5 Il XIV problema di Hilbert

Fra i problemi che pose Hilbert nel Congresso di Parigi del 1900, il quattordicesimo era motivato dalla sua brillante ed assai generale soluzione del problema della finitezza degli invarianti.

Il problema si enuncia cosi' , davvero in una generalita' molto grande

XIV PROBLEMA:

Sia $E$ un campo $K$-unirazionale di caratteristica zero, ovvero $K$ e' un campo di caratteristica zero ed $E$ e' contenuto in una estensione finitamente generata e puramente trascendente di $K$, si ha cioe' una serie di inclusioni

$K \subset E \subset K(x_1, .., x_n)$.

E' vero allora che l'anello $R := E \cap K[x_1, .., x_n]$ e' finitamente generato su $K$ ( cioe' come $K$-algebra) ?

**Example 5** *Sia data una azione lineare di $G$ su $K^n$: si puo' allora porre $E := K(x_1, .., x_n)^G$, ed allora, avendosi $R = K[x_1, .., x_n]^G$, il problema posto e' il solito problema di finita generazione della sottoalgebra degli invarianti.*

Nel 1959 Nagata ([Nag]) dette una risposta negativa al problema anche nel caso speciale di un anello di invarianti.

Nel contresempio di Nagata il campo $K$ e' il campo $\mathbf{C}$ dei numeri complessi, il gruppo $G$ e' un gruppo algebrico lineare unipotente, $n = 2r$ e' un intero pari, e la formulazione dell' esempio e' completamente geometrica.

Si hanno $r$ punti $p_1, .., p_r$ nel piano proiettivo complesso $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$, $K(x_1, .., x_{2r})$ e' il campo generato dalle coordinate degli $r$ punti, mentre l' anello $R$ e' l'anello bigraduato $R = \oplus_{n,m} H^0(S, \mathcal{O}_S(nL - m\Sigma_{i=1,..r} E_i))$.

Per capire la notazione bisogna appunto usare un po' di geometria algebrica, per cui la spiegazione sara' comprensibile solo per esperti:

$S$ e' la superficie ottenuta scoppiando il piano negli $r$ punti, che si suppongono generici, ed $E_1, .., E_r$ sono le corrispondenti curve eccezionali di prima specie su di $S$.

Come spiegato nell' avvincente articolo di David Mumford sul XIV problema ([Mum3]) , si deve ad Oscar Zariski, ed alla sua formulazione geometrica nel linguaggio dei divisori, la strada che ha portato ai contresempi di Rees e Nagata ([Rees], [Nag]).

A tutt' oggi, il problema, in formulazioni meno generali, rimane ancora aperto :

1) sotto quali tipo di ipotesi su $G$ e sulla sua azione gli invarianti sono finitamente generati ?

2) Se $D$ e' un divisore su una varieta' algebrica $X$, quando si puo' affermare che $R(X, D) = \oplus_n H^0(X, \mathcal{O}_X(nD))$ e' finitamente generato ? ( vedi [Zar2])

3) Congettura fondamentale per la estensione della classificazione di Enriques in dimensione maggiore o uguale a quattro: se X e' una varieta' liscia di tipo generale e $K_X$ e' il suo divisore canonico, allora e' vero che $R(X, K_X)$ e' finitamente generato ?

# 6 Bibliografia

[Adams] Adams, J. Frank
**Lectures on Lie groups**, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam (1969) .

[Brow] Felix Browder, editore
**Mathematical Developments arising from Hilbert problems** , Proc. Symp. Pure Math. XXVIII, A.M.S. (1976)

[Browna] Brownawell, W. Dale
**Bounds for the degrees in the Nullstellensatz**. Ann. of Math. (2) 126 (1987), no. 3, pp. 577–591.

[C-Z 1] Casadio, Giuseppina- Zappa, Guido
**L'attivita' matematica di Francesco Faa' di Bruno tra il 1850 e il 1859**, Memorie Acc. Scienze di Torino, ser.V, vol.16 (1992), pp. 3-25.

[C-Z 2] Casadio, Giuseppina- Zappa, Guido
**I contributi matematici di Francesco Faa' di Bruno nel periodo 1873-1881, con particolare riguardo alla teoria degli invarianti**, Suppl. Circolo Mat. di Palermo , ser.II, Num. 36 (1994),pp.47-70.

[Cat] Catanese, Fabrizio
**Hilbert a Gottinga**, questo volume.

[Courant Robbins] Courant, Richard - Robbins, Herbert
**Che cos'e' la matematica?**, Boringhieri, Torino (1950), traduzione di **What is mathematics? An elementary approach to Ideas and Methods** Oxford Univ. Press, New York(1941)

[D-C] Dieudonne',J. - Carrell, J.B.
**Invariant theory, old and new**, Acad. Press, New York (1971)

[E-L] Ein, Lawrence- Lazarsfeld, Robert
**A geometric effective Nullstellensatz**. Invent. Math. 137 (1999), no. 2,pp. 427–448.

[Faa' di Bruno] Faa' di Bruno, Francesco
**Theorie des formes binaires**, Torino (1876).

[Flenner] Flenner, Hubert
**Emmy Noether and the development of commutative algebra**, in 'Israel Mathematical Conference proceedings', M.Teicher, editore, vol.12 (1999), pp. 23-38.

[G-S] Guillemin,V.- Sternberg, S.
**Convexity properties of the moment map**, Inventiones Mathematicae, 67 (1984),pp. 515-538.

[Gor] Gordan, Paul
**Vorlesungen über Invariantentheorie**, Bd. 2, Teubner, Leipzig (1887)

[Prom] Hilbert, David
**Über die invarianten Eigenschaften spezieller binärer Formen, insbesondere die Kugelfunktionen**, Inauguraldissertation Königsberg i.Pr. (1885)

[Habil] Hilbert, David
**Über einen allgemeinen Gesichtspunkt für invarianten theoretische Untersuchungen in binäre Formengebiete**, Mathematische Annalen (1887), pp.381- 446.

[Alg. Form.] Hilbert, David
**Über die Theorie der algebraische Formen**, Mathematische Annalen (1890) pp. 473-534.

[Inv. Syst.] Hilbert, David
**Über die vollen Invariantensysteme** , Mathematische Annalen (1893), pp. 313- 373.

[Hilb1] Hilbert, David
**Gesammelte Abhandlungen. Bd. 1. Zahlentheorie.**
Julius Springer, Berlin (1932) (XIV + 539 p.).

[Hilb2] Hilbert, David

**Gesammelte Abhandlungen Bd. 2. Algebra. - Invariantentheorie. - Geometrie.**
Julius Springer, Berlin (1933) (VIII+ 453 p. 12 Fig.).

[Hilb3] Hilbert, David
**Gesammelte Abhandlungen. Bd. 3. Analysis. - Grundlagen der Mathematik. - Physik.** Contiene tra l'altro la **Lebensgeschichte** di Blumenthal
Julius Springer, Berlin (1935) (VII+ 435 p., 12 Fig.).

[Hilb4] Hilbert, David
**Theory of algebraic invariants. Lectures. Transl. by R. C. Laubenbacher, ed. and with an introduction by Bernd Sturmfels.** Cambridge University Press,. xiv, 192 p. (1993). ( Zbl. Reviewer: W.Wieslaw)

[Hilb5] Hilbert, David
**Lie groups: history, frontiers and applications. Vol. VIII. Hilbert's invariant theory papers. Translated by M. Ackerman. Comments by R. Hermann.** Brookline, Massachusetts: Math. Sci. Press. IX, 336 p. (1978).

[Humphreys] Humphreys, James E.
**Introduction to Lie algebras and representation theory**, Graduate Texts in Math. 9 ( 1972), Springer Verlag.

[Ig] Igusa,J.I.
**Arithmetic variety of moduli for genus two**, Annals of Math. 72 (1960), pp. 612-649.

[Kirwan] Kirwan, F.
**Cohomology of quotients in Symplectic and Algebraic Geometry**, Mathematics Notes, 31, Princeton University Press (1984).

[Kollár] Kollár, János
**Sharp effective Nullstellensatz**. J. Amer. Math. Soc. 1 (1988), no. 4,pp. 963–975.

[Lasker] Lasker,E.
**Zur Theorie der Moduln und Ideale**, Math.Ann. 60(1905), pp. 20-116.

[GIT] Mumford, David
**Geometric invariant theory**, Ergebnisse der Math. Bd.34, Springer Verlag (1965), second edition with J.Fogarty (1982).

[Mumford 2] Mumford, David
**The stability of projective varieties**, Enseignement Math. XXII, 1-2, (1977) , pp. 39-110.

[Mumford 3] Mumford, David
**Hilbert's fourteenth problem- The finite generation of subrings such as rings of invariants**, Proceedings of Symposia in Pure Math. 28 (1976), pp. 431-444.

[Nag] Nagata, Masayoshi
**On the** 14**-th problem of Hilbert**. Amer. J. Math. 81 (1959), pp. 766–772.

[Noether] Noether, Emmy
**Gesammelte Abhandlungen**, Nathan Jacobson editore, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York(1983).

[Procesi] Procesi, Claudio
**150 years of invariant theory**, in 'Israel Mathematical Conference proceedings',M.Teicher, editore, vol.12 (1999), pp. 5-21

[Rees] Rees, D.
**On a problem of Zariski**. Illinois J. Math. 2 (1958), pp. 145–149.

[Shi] Shioda, Tetsuji
**On the graded ring of invariants of binary octavics**, Amer. Journal of Math. 89 (1967), pp. 1022-1046.

[Reid] Reid, Constance

**Hilbert. With an appreciation of Hilbert's mathematical work by Hermann Weyl**
Springer-Verlag,Berlin-Heidelberg-New York (1970) (290 p. 28 illus).

[Salmon] Salmon,G.
**Lectures introductory to the modern higher algebra**, Dublin (1885), ristampato da Chelsea Publ. , New York (1969).

[vdW] van der Waerden, B.L.
**Nachwort zu Hilberts algebraischen Arbeiten** in: David Hilbert, **Gesammelte Abhandlungen. Bd. 2.**, Julius Springer, Berlin (1933) (pp. 401-403).

[Weyl 1] Weyl, Hermann
**The classical groups- Their invariants and representations**, Princeton Univ.Press (1939)

[Weyl 2-3] Weyl, Hermann
**David Hilbert and his Mathematical Work** Bulletin of the American Mathematical Society 50, (1944) (pp.612-654)

Boletin da Sociedade de Matematica de Sao Paulo 1 (1946) (pp.76-104) et 2 (1947) (pp. 37-60).

[Zar1] Zariski, Oscar
**Interprétations algébrico-géométriques du quatorzième problème de Hilbert**, Bull. Sci. Math. (2) 78, (1954), pp. 155–168.

[Zar2] Zariski, Oscar
**The theorem of Riemann Roch for high multiples of an effective divisor on an algebraic surface**, Annals of Math., 76 (1962),pp. 560-612

Indirizzo dell' autore :
Fabrizio Catanese
Mathematisches Institut der Georg August Universität Göttingen,
Bunsenstrasse 3-5 , 37073 Göttingen, Germania
e-mail: catanese@uni-math.gwdg.de

**NOTA**. Vorrei ringraziare Roberto Pignatelli per le sue osservazioni su una versione preliminare del manoscritto.